F 1405 f762

KAT

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

1

ANUL XII

1961

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

MŰSZAKI

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

1

ANUL XII

1961

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN S. STOILOW — *redactor responsabil*; ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — redactor responsabil adjunct; ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU; GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R. P. R.; N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R. P. R.; T. GANEA și A. HALANAY.

Revista STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE
apare de două ori pe an

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul XII, nr. 1 1961

SUMAR

Pag.

G. VRĂNCEANU, Reducerea la o formă canonică a două forme pătratice 21

SIMONA POPP, Cercetări asupra determinării corecţiilor de compresibilitate la mişcări plane în regim subsonic 37

ARNO KAHANE, Asupra funcţiilor armonice şi omogene cu aplicaţii în teoria suprafeţelor 91

G. G. VRĂNCEANU, Asupra unei densităţi vectoriale asociate unei transformări punctuale de speţă trei 121

VIOREL DUMITRAŞ, Determinarea spaţiilor A_3 cu grup G_5 cu varietăţi de intranzitivitate bidimensionale 133

DAN PASCALI, Cuaternioni olomorfi 163

N. PRAPORGESCU, Asupra unor ecuaţii funcţionale singulare 187

MARIUS I. STOKA, Asupra corespondenţelor speciale între spaţii proiective. I 197

HORIA BANEA, Asupra comportării soluţiilor sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu parametru mic pe lîngă derivate 251

EMERIC DEUTSCH, Asupra torsiunii barelor prismatice cu secţiune dublu-conexă 275

PETRE BRĂDEANU, Mişcări brachistochrone ale rachetelor 289

RECENZII 305

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome XII, n° 1 1961

SOMMAIRE

Page

G. VRĂNCEANU, Réduction à une forme canonique de deux formes quadratiques 21

SIMONA POPP, Recherches sur la détermination des corrections de compressibilité pour des mouvements plans en régime subsonique 37

ARNO KAHANE, Sur les fonctions harmoniques et homogènes et leurs applications géométriques 91

G. G. VRĂNCEANU, Sur une densité vectorielle associée à une transformation ponctuelle d'espèce trois 121

VIOREL DUMITRAŞ, Détermination des espaces A_3 ayant un groupe G_5 à variétés d'intransitivité bidimensionnelles 133

DAN PASCALI, Quaternions holomorphes 163

N. PRAPORGESCU, Sur des équations fonctionnelles singulières 187

MARIUS I. STOKÁ, Sur les correspondances spéciales entre des espaces projectifs. I 197

HORIA BANEA, Sur le comportement des solutions des systèmes d'équations différentielles dont les dérivées sont munies d'un petit paramètre . . . 251

EMERIC DEUTSCH, Sur la torsion des barres prismatiques à section doublement connexe 275

PETRE BRĂDEANU, Mouvements brachystochrones des fusées 289

COMPTES RENDUS 305

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том XII, № 1 1961

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Г. ВРЭНЧАНУ, Приведение к каноническому виду двух квадратичных форм 21

СИМОНА ПОПП, Исследования по определению поправок на сжимаемость при плоских дозвуковых обтеканиях 37

АРНО КАГАНЕ, Об однородных гармонических функциях и их геометрических приложениях 91

Г. Г. ВРЭНЧАНУ, Об одной векторной плотности, сопоставляемой точечному преобразованию третьего рода 121

ВИОРЕЛ ДУМИТРАШ, Определение пространств A_3 с группой G_5, обладающей двумерными многообразиями интранзитивности 133

ДАН ПАСКАЛИ, Голоморфные кватернионы 163

Н. ПРАПОРДЖЕСКУ, О некоторых сингулярных функциональных уравнениях 187

МАРИУС И. СТОКА, О специальных соответствиях между проективными пространствами. I 197

ХОРИЯ БАНЯ, О поведении решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных 251

ЭМЕРИК ДЕЙТЧ, О кручении призматических стержней с двухсвязным сечением 275

ПЕТРЕ БРЭДЯНУ, Брахистохронные движения ракет 289

РЕЦЕНЗИИ 305

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

SIMION STOILOW

La 4 aprilie 1961, a încetat din viață acad. prof. Simion Stoilow. Activitatea și opera sa creatoare constituie un exemplu viu pentru viitor, un titlu de mîndrie al școlii și științei românești, o pagină de glorie în istoria matematicii universale.

Născut la București la 2 (14) septembrie 1887, Simion Stoilow și-a petrecut copilăria la Craiova, unde a terminat școala primară și liceul, vădind încă de atunci un spirit inventiv și o reală vocație pentru matematici.

În anul 1910 obține licența în matematici la Facultatea de științe din Paris, unde își continuă apoi pregătirea științifică.

Puternic și hotărîtor răsunet au avut în inima tînărului, prelegerile celebrilor matematicieni E. Picard, H. Poincaré, E. Goursat, J. Hadamard, E. Borel, H. Lebesgue, despre care va vorbi cu emoție și cu o vie admirație în amintirile sale.

În 1914, după patru ani de muncă stăruitoare, își termină teza de doctorat. Totuși, din cauza războiului care începuse, o va susține în chip strălucit abia în 1916.

În 1919, tînărul matematician, S. Stoilow a fost numit docent la catedra de analiză matematică a Facultății de științe din Iași iar în ianuarie 1920 conferențiar la catedra de algebră superioară. Tot ca docent

și conferențiar îl găsim un an mai tîrziu la catedra de analiză a Facultății de științe din București.

Începînd din aprilie 1923 și pînă în 1939, S. Stoilow este profesor titular de teoria funcțiilor și algebră superioară, la Facultatea de științe din Cernăuți, al cărui decan a fost între anii 1925—1926 și 1932—1939. În acest răstimp de 15 ani, munca didactică și opera de creație se împletesc armonios cu spiritul său de neîntrecut organizator: „Consider anii aceștia, o pot spune fără ezitare, ca cei mai rodnici, ca cei mai fructuoși din întreaga mea activitate științifică".

În anul 1939, prof. S. Stoilow revine la București, la Institutul politehnic, și apoi ca profesor șef al catedrei de teoria funcțiilor complexe, la Universitate, urmînd lui D. Pompeiu.

Democrat convins și om de știință progresist, prof. S. Stoilow este unul din inițiatorii memoriului semnat de un grup de profesori universitari care cerea ieșirea Romîniei din războiul antisovietic.

După 23 August 1944 el se încadrează cu pasiune în lupta de democratizare și reconstrucție a țării sub conducerea Partidului Comunist Romîn. De asemenea, participă la fondarea A.R.L.U.S.-ului. În calitate de rector al Universității din București (1944—1945), muncește cu abnegație pentru reorganizarea învățămîntului superior și, mai apoi, desfășoară ca decan (1948—1951) o activitate hotărîtoare în alcătuirea actualei structuri a Facultății de matematică și fizică.

Membru corespondent (1936) și apoi membru al Academiei Romîne (1945), el participă intens la reorganizarea și transformarea acesteia în Academia Republicii Populare Romîne (1948), precum și la conducerea și organizarea cercetării științifice din țara noastră, ca președinte al Secției de științe matematice și fizice a Academiei R.P.R. și ca director al Institutului de matematică din București.

Prin numeroasele prelegeri ținute la unele din cele mai importante centre universitare ale lumii, prin conferințe și comunicări la congrese internaționale și colocvii de specialitate, acad. S. Stoilow a contribuit hotărîtor la creșterea prestigiului științei romînești. Roadele muncii sale s-au evidențiat în chip deosebit cu prilejul celui de-al IV-lea Congres al matematicienilor romîni (1956).

Acad. S. Stoilow a depus în același timp o importantă activitate social politică; el a reprezentat țara noastră peste hotare și a fost ales deputat în Marea Adunare Națională. Pentru meritele sale deosebite a fost distins cu Premiul de Stat clasa I, cu Ordinul Muncii cl. I, Ordinul 23 August cl. a III-a și Steaua R.P.R. cl. I și a II-a.

Aproape jumătate de veac, rodnica activitate didactică și organizatorică a acad. prof. S. Stoilow s-a îmbinat în mod firesc cu munca creatoare. Opera sa matematică unitară și profundă cuprinde peste 60 de lucrări originale, numeroase conferințe, tratate și cursuri. Fiecare din cercetările sale se distinge prin importanța și dificultatea problemei rezolvate, prin originalitatea punctului de vedere și ingeniozitatea metodelor folosite. Fiecare lucrare a sa a marcat un moment în dezvoltarea matematicii și prin răsunetul avut, a constituit și constituie un izvor de noi cercetări.

Îmbrățișînd diferite probleme ale analizei matematice sau ale topologiei, opera prof. S. Stoilow se grupează, după propria expresie a autorului, în jurul următoarei idei centrale, cu adîncă semnificație filozofică : „a aprofunda în ceea ce are mai esențial, mai caracteristic, fenomenul analiticității, care ne este impus într-un anumit mod, de natura în mijlocul căreia trăim". Dacă uneori studiul aspectului calitativ (topologic) al acestui fenomen a precumpănit, începînd cu teza sa de doctorat și pînă la ultimile publicații, legătura cu faptul concret, aspectul cantitativ a fost necontenit aprofundat.

Urmărind evoluția preocupărilor sale matematice, se disting trei direcții de cercetare.

Primul grup de lucrări, datînd din perioada 1914—1919, este consacrat teoriei ecuațiilor cu derivate parțiale în domeniul complex. În teza sa *Sur une classe de fonctions de deux variables définies par les équations linéaires aux dérivées partielles* (1916), el consideră problema Cauchy cu date inițiale prezentînd singularități și demonstrează că singularități simultan esențiale și logaritmice pentru date determină singularități de aceeași natură pentru integrale. Se pune în evidență o clasă importantă de ecuații, pentru care există întotdeauna integrale uniforme în vecinătatea unei singularități mobile și se aprofundează cazul coeficienților olomorfi și caracteristicilor — familii de drepte. Prin cuadraturi efectuate asupra unor expresii formate cu un nucleu fix, depinzînd numai de ecuație și cu funcțiile de o variabilă care constituie datele problemei, acad. S. Stoilow obține expresia integralei generale. Formula diferă, după cum toate familiile de caracteristici sînt distincte sau unele din ele sînt confundate. În cazul coeficienților constanți se stabilesc integrale cvadruplu periodice.

Acest ciclu de lucrări a determinat ulterior numeroase cercetări, printre care citățm pe cele ale matematicienilor St. Bergmann, L. Fantappié și H. Lewy. Recent, problema a fost reluată cu metodele actuale ale analizei și topologiei în studiile lui J. Leray.

La sfîrșitul primului război mondial, în cercetarea matematică se deschideau noi perspective. Lucrările școlii matematice de la Moscova, reprezentată de N. N. Luzin, M. I. Suslin, I. I. Privalov, P. S. Alexandrov și P. S. Urîson, ale școlii poloneze, inițiate de W. Sierpinski, C. Kuratowski și S. Banach, cursul lui Ch. de La Vallée Poussin, cartea lui F. Hausdorff, sau lucrările lui A. Denjoy, au trezit interesul tînărului matematician Stoilow pentru teoria generală a funcțiilor de variabile reale și topologie. Această a doua perioadă în creația sa începe cu o serie de note și comunicări asupra clasificării mulțimilor de măsură nulă (1919—1922), dar principalele rezultate, sînt sintetizate în memoriul *Sur l'inversion des fonctions continues*. În acest memoriu sînt aprofundate mulțimile de nivel ale funcțiilor continue și stabilite condiții ca aceste mulțimi să fie finite, numărabile sau nenumărabile. Folosind teorema lui Lebesgue de derivabilitate aproape peste tot a funcțiilor monotone, autorul obține o demonstrație simplă și elegantă a teoremei lui Denjoy asupra numerelor derivate. După cum a arătat în 1957 S. Marcus, din teorema fundamentală a lui Stoilow, cuprinsă în această lucrare, se deduc

aproape imediat rezultate astăzi clasice, obținute ulterior de S. Banach și S. Saks.

Preocupat mereu de studiul funcțiilor de mai multe variabile, acad. S. Stoilow consideră transformări între spații n-dimensionale obținînd extinderea unei teoreme a lui Luzin și a unei teoreme relative la determinantul funcțional.

Aprofundarea noțiunii de transformare continuă, îl conduce la definiția punctelor singulare. El numește punct singular al unei aplicații continue un punct pentru care există un domeniu, care îl conține, în timp ce imaginea lui, numită valoare singulară, este punct frontieră al imaginii domeniului. Mulțimea valorilor singulare este o mulțime de prima categorie.

În orice domeniu, care nu cuprinde puncte singulare, transformarea invariază mulțimile deschise, astfel încît această cercetare apare ca o introducere în teoria transformărilor interioare, transformări continue, deschise și 0-dimensionale, pe care acad. S. Stoilow le introduce în știință în 1927.

Astfel începe o a treia perioadă de cercetare, în care prin opera lui S. Stoilow se făurește o nouă ramură a matematicii : teoria topologică a funcțiilor analitice.

Memoriul fundamental *Sur les transformations continues et la topologie des fonctions analytiques* (1928), care s-a bucurat de un succes extraordinar, rezolva celebra problemă a lui Brouwer : caracterizarea topologică a funcțiilor analitice. Într-adevăr, atît funcțiile analitice cît și transformările topologice ale suprafețelor sînt transformări interioare. Pe de altă parte teorema de inversiune locală a lui S. Stoilow arată că, exceptînd puncte izolate, o transformare interioară este un homeomorfism local iar în vecinătatea punctelor excepționale se comportă, abstracție făcînd de o transformare topologică, ca transformarea $z = \zeta^n$, n întreg, în jurul originii. Cu ajutorul acestei teoreme, acad. S. Stoilow arată că, fiind dată o transformare interioară arbitrară I a unei varietăți topologice bidimensionale V în sfera complexă S, există întodeauna o transformare topologică T a lui V într-o suprafață riemanniană (în sensul lui Weyl) R astfel încît $I \circ T$ să fie o funcție analitică pe R. Prin urmare, pe V se poate introduce întotdeauna o structură conformă, astfel încît I să devină funcție analitică pe V.

Ca o consecință imediată a acestui memoriu, rezultă caracterul topologic al unor teoreme clasice relative la funcțiile analitice : principiul maximului modulului, proprietatea zerourilor unei funcții analitice de a fi izolate, teorema de inversiune.

Invitat de universitatea din Paris, prof. S. Stoilow ține în februarie 1931 o serie de conferințe asupra cercetărilor sale, publicate apoi în „Annales de l'Institut H. Poincaré" (1932).

Alte lucrări consacrate de acad. S. Stoilow transformărilor interioare introduc importantele noțiuni de acoperire totală și parțială regulată, pun în evidență sensul topologic al teoremei lui Denjoy despre zerourile și polii unei funcții meromorfe, stabilesc o generalizare a formulei lui Hurwitz și deduce criterii de biunivocitate pentru transformările interioare și homeomorfismele locale. Mai tîrziu aceste probleme aveau să fie reluate

de diferiți matematicieni dintre care citãm pe S. Eilenberg, S. Banach și S. Mazur, T. Ganea și C. Andreian Cazacu.

Printre multiplele aplicații date de acad. S. Stoilow transformărilor interioare, amintim și demonstrația completă, deosebit de simplă, a unui rezultat al lui Feodoroff: o funcție Pompeiu este perfect determinată de valorile luate pe o porțiune cît de mică din mulțimea singularităților, precum și noua formulare a problemei lui Denjoy asupra funcțiilor Pompeiu univalente, care avea să fie rezolvată în 1956 de M. Jurchescu, cu ajutorul metodelor lui Ahlfors.

Studiul transformărilor interioare a permis prof. S. Stoilow să aprofundeze valorile excepționale și asimptotice ale funcțiilor analitice iar E. Szpilrajn și S. Kierst au folosit rezultatele sale în studiul singularităților.

An de an importanța noțiunii de transformare interioară s-a dezvăluit tot mai mult. Ea a găsit un vast cîmp de aplicații în topologia generală. Alături de cercetări ulterioare întreprinse în acest sens de acad. S. Stoilow, studiului lor s-au consacrat numeroși matematicieni. N. Aronszajn a demonstrat că spațiile cvasipeaniene sînt caracterizate ca imagini de dendrite prin transformări interioare, S. Mazurkievicz a generalizat pentru aceste transformări teorema de extensie a homeomorfismelor a lui M. Lavrentiev, G. T. Whyburn a aprofundat sub diferite aspecte transformările interioare între spații topologice, M. Morse, M. Heins, T. A. Jenkins și D. A. Storvick le-au aplicat la diferite probleme, în special la studiul funcțiilor pseudoarmonice.

Concepte introduse de acad. S. Stoilow în legătură cu transformările interioare (aplicație proprie, aplicație 0-dimensională) s-au dovedit mai tîrziu esențiale nu numai în topologie ci și în teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe. Astfel noțiunile de acoperire proprie și acoperire analitică, care apar în definirea spațiului complex α, nu sînt decît generalizări firești, aproape imediate ale acoperirii totale în sensul lui Stoilow. Demonstrația sa că o suprafață de acoperire a sferei printr-o transformare interioară are bază numărabilă a fost extinsă pentru aplicațiile 0-dimensionale la o clasă largă de spații topologice și apoi aplicată la teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe.

Într-o notă publicată în Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris 1935), prof. S. Stoilow demonstra că transformările aproape analitice ale lui M. A. Lavrentiev sînt transformări interioare. Astăzi în teoria reprezentărilor cvasiconforme se ia în mod obișnuit ca punct de plecare transformările interioare ale lui Stoilow, la care se adaugă anumite condiții metrice (S. Kakutani, K. Noshiro, A. Pfluger, L. V. Ahlfors, A. Mori, L. I. Volkovîskii, T. Hersch, H. Künzi), iar dacă unele cercetări pornesc de la altă definiție (R. Cacciopoli, T. Tôki și K. Shibata, I. N. Pesin, L. Bers) se demonstrează caracterul interior al transformării. Studiul atît de bogat în aplicații practice al soluțiilor sistemelor de ecuații cu derivate parțiale generalizînd sistemul Cauchy-Riemann, dezvoltat de școala sovietică a lui Lavrentiev și Vekua, paralel cu școala americană a lui Bers, este de asemenea legat de aceste transformări. Cele mai importante sisteme eliptice admit ca soluții transformări interioare; M. A. Lavrentiev și B. V. Șabat, G. N. Polojii, B. Boiarskii, L. Bers iar în cazul

general al sistemului lui Carleman, I. I. Daniliuk, au demonstrat că există cel puțin o soluție transformare interioară, celelalte soluții fiind oarecum degenerate. Astfel noțiunea de transformare interioară apare ca graniță firească a generalizării noțiunii de transformare analitică, constituind eventual un punct de plecare pentru extinderea ei la mai multe variabile reale.

Cu ajutorul transformărilor interioare, prof. S. Stoilow rezolvă o a doua problemă fundamentală a teoriei funcțiilor analitice : definirea suprafețelor riemanniene de acoperire, creînd un nou și puternic instrument de cercetare.

Mult timp după introducerea suprafețelor riemanniene, pentru continuatorii operei lui Riemann, acestea au rămas doar un mijloc de a intui structura complexă a funcțiilor analitice multiforme. Dezvoltarea teoriei mulțimilor și topologiei a permis însă lui H. Weyl să definească în 1913 suprafața riemanniană abstractă. Precizată în 1925 de T. Radó, această noțiune a putut fi folosită cu succes în multe probleme de teoria reprezentării conforme și a uniformizării. Dar ea nu cuprindea întreaga bogăție a conceptului introdus de Riemann, deoarece lăsa de o parte orice element legat de modul de acoperire și nu se putea deci aplica în cercetările relative la puncte de ramificații și foi.

La Congresul internațional de la Oslo din 1936, folosind un rezultat publicat într-o notă din Comptes Rendus (Paris 1935) acad. S. Stoilow dă definiția topologică a acoperirilor riemanniene : suprafața riemanniană de acoperire, după Stoilow este o suprafață de acoperire a sferei printr-o varietate topologică bi-dimensională după o transformare interioară.

Importanța acestui rezultat l-a determinat pe L. V. Ahlfors să-l însereze în raportul prezentat de el la congres. În volumul *Contributions to the theory of Riemann surfaces* (1953), analizînd dezvoltarea teoriei suprafețelor riemanniene în decurs de un veac, L. V. Ahlfors accentuează în mod deosebit etapa datorită acad. S. Stoilow iar tratatele moderne de specialitate ale lui A. I. Markușevici (1950), R. Nevanlinna (1953), H. Behnke și R. Sommer (1955), A. Pfluger (1957), L. V. Ahlfors și L. Sario (1960) consacră un loc de bază transformărilor interioare și suprafeței riemanniene de acoperire.

În 1938, apare în celebra colecție Borel, opera fundamentală a prof. S. Stoilow : *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*. Cine studiază această carte profund originală, care face epocă nu numai în teoria funcțiilor dar și în topologie, rămîne uimit de bogăția și extraordinara varietate a rezultatelor, măestria cu care autorul trece de la intuiția concretă a faptelor geometrice la cele mai abstracte generalizări. În această monografie, care cuprinde teoria suprafețelor riemanniene de acoperire și caracterizarea topologică a funcțiilor analitice, autorul aduce noi contribuții originale. El face un studiu profund al varietăților topologice ce pot fi organizate ca suprafețe riemanniene abstracte și, cu ajutorul transformărilor interioare, dă caracterizarea topologică a acestor suprafețe, demonstrînd că triangulabilitatea și orientabilitatea sînt nu numai proprietăți necesare ci și suficiente.

Completînd teoria homeomorfiei suprafețelor, prof. S. Stoilow studiază noțiunea de frontieră ideală a lui B. Kérékjárto. El definește

șirul determinant al unui element frontieră și introduce o topologie pe mulțimea obținută, completînd suprafața riemanniană de acoperire cu totalitatea elementelor frontieră.

Această frontieră, astăzi unanim denumită frontiera Kérékjárto-Stoilow, joacă un rol fundamental în teoria modernă a suprafețelor riemanniene. Astfel frontierele conforme (frontiera Martin, Kuramocki, Royden, Constantinescu-Cornea), introduse mai tîrziu pentru rezolvarea diferitelor probleme metrice, apar ca rafinări ale frontierei Kérékjárto-Stoilow.

Problema centrală a teoriei suprafețelor riemanniene este aceea a clasificării lor. Un criteriu de bază în clasificare îl constituie existența sau inexistența pe suprafață a unor clase de funcții; acesta a condus la considerarea claselor $\mathcal{O}_{EF}$ (R. Nevanlinna, L. V. Ahlfors, L. Sario și alții). Apoi s-a demonstrat că apartenența la unele din aceste clase este o proprietate frontieră. A apărut astfel ideea de a folosi frontiera Kérékjárto-Stoilow în introducerea de clase noi. Pe această cale, L. Sario a definit clasa suprafețelor riemanniene cu frontiera absolut discontinuă.

Printre problemele importante ale teoriei suprafețelor riemanniene este și aceea de a ști dacă o suprafață riemanniană admite sau nu o prelungire esențială.

Frontiera Kérékjárto-Stoilow a permis rezolvarea integrală a acestei probleme. M. Jurchescu a obținut caracterizarea clasei de suprafețe riemanniene esențial neprelungibile și relațiile ei cu clasele de tip $\mathcal{O}_{EF}$.

Altă direcție de cercetare, în care intervine frontiera Kérékjárto-Stoilow, este prelungirea funcțiilor analitice și armonice pe o suprafață riemanniană la elemente frontieră (O. Lehto, M. Heins, C. Constantinescu, A. Cornea, K. Oikawa).

Dar și în clasificarea suprafețelor riemanniene de acoperire acad. S. Stoilow aduce contribuții esențiale.

Pe această cale, el introduce în 1938 și 1940 clasa suprafețelor riemanniene normal exhaustibile, extensie naturală a suprafețelor riemanniene de acoperire închise.

Suprafețe normal exhaustibile admit o exhaustiune prin domenii poliedrice ce acopăr total în sensul lui S. Stoilow proiecțiile lor. Importante teoreme de repartiția valorilor după Ahlfors au fost demonstrate de acad. S. Stoilow pentru aceste suprafețe. Cercetări ulterioare datorite lui G. T. Whyburn, C. Andreian Cazacu, T. Kuroda și alții, au aprofundat și generalizat această direcție.

Încă în prelegerile ținute la Paris în 1931, prof. S. Stoilow a relevat importanța proprietății Iversen (pe care a denumit-o astfel, deoarece în 1914 F. Iversen o demonstrase pentru inverse de funcții meromorfe).

Într-o serie de memorii (1936, 1943, 1952), prof. S. Stoilow definește și aprofundează suprafețele riemanniene de acoperire cu proprietatea Iversen, descoperind clase importante cu această proprietate: suprafețele generate de funcțiile definite de o relație întreagă $G(x, y) = 0$ și cele generate de funcțiile meromorfe pe suprafețele riemanniene cu frontiera nulă. Acoperirile riemanniene generate de funcții meromorfe în $|z| < 1$ de clasă U (W. Seidel, O. Frostman) de soluțiile anumitor clase de ecuații

diferențiale (M. Jurchescu), și de alte funcții (M. Heins, T. Kuroda), au proprietatea Iversen. O parte din numeroasele cercetări dezvoltate asupra acestei clase sînt sintetizate în monografia *Cluster sets* a lui K. Noshiro, (1960). Suprafețele riemanniene de acoperire de clasă Iversen se disting, după cum a arătat acad. S. Stoilow, prin modul de comportare al aplicației, care definește acoperirea, în vecinătatea elementelor frontierei ideale ale suprafeței.

Printre ultimele preocupări ale prof. S. Stoilow citățm aprofundarea acoperirilor neorientabile. Asupra acestui subiect, a vorbit la congresul de la Innsbruck, în toamna anului 1960.

Continuînd opera marilor matematicieni romîni : David Emmanuel, Spiru Haret, Traian Lalescu, Gheorghe Țițeica, Dimitrie Pompeiu, ale căror figuri luminoase le-a evocat adesea, prof. S. Stoilow a fost îndrumătorul neobosit și entuziast al tineretului.

An de an, cu o bogăție de argumentare mereu sporită prin vasta sa erudiție și numeroase interpretări originale, cu o claritate și eleganță clasică, cursurile sale au dezvoltat unele din cele mai importante aspecte ale matematicii contemporane. O mărturie grăitoare sînt cele două volume ale tratatului : *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă* (1954, 1958), laureate cu premiul de Stat.

În anii puterii populare, acad. S. Stoilow a avut posibilitatea de a grupa în jurul său numeroși tineri cercetători creînd o adevărată școală romînească de teoria funcțiilor. Seminarul, pe care l-a condus la Institutul de matematică, pe linia marilor realizări mondiale și totodată în direcția deschisă de propria sa operă, s-a dezvoltat mereu cuprinzînd noi probleme : de la teoria repartiției valorilor și reprezentărilor cvasiconforme, la clasificarea suprafețelor riemanniene, teoria potențialului și teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe. În ultima vreme, expunerile ținute în cadrul Seminarului Stoilow au fost grupate și sînt în curs de publicare. Treptat numărul lucrărilor inspirate din opera și prelegerile sale a crescut. Pe lîngă lucrările citate mai sus, elevii săi au adus contribuții în teoria reprezentărilor cvasiconforme (C. Andreian Cazacu, N. Boboc, M. Jurchescu, P. Caraman, S. Guiașu), în teoria metricii hiperbolice (C. Constantinescu), în problema clasificării de tip $\mathcal{O}_{EF}$ a suprafețelor riemanniene și a comportării funcțiilor analitice la frontiera suprafețelor (C. Constantinescu, A. Cornea) și în teoria repartiției valorilor (C. Andreian Cazacu, C. Constantinescu). T. Ganea a dat o definiție a varietății Prüfer ca spațiu-cît regulat dar nenormal al unui spațiu metric și a aprofundat spațiile topologice de acoperire. C. Teleman a studiat spațiile A_1 complexe (organizînd suprafețele riemanniene de acoperire cu diferite structuri afine), și teoria funcțiilor abeliene pe o suprafață riemanniană. N. Boboc a construit teoria potențialului pe varietăți riemanniene. Împreună cu N. Radu a dat o generalizare a armonicității și împreună cu S. Marcus a aprofundat mulțimile de determinare, la baza cărora stă ideea analiticității. Gh. Mocanu a studiat convergența șirurilor de funcții analitice.

Drum de luptă pentru înflorirea patriei în noua orînduire socialistă, drum de muncă stăruitoare, drum de sclipire genială, iată viața și opera acad. prof. S. Stoilow, care va străbate luminoasă veac după veac.

LUCRĂRILE ȘTIINȚIFICE

ALE

ACADEMICIANULUI PROFESOR S. STOILOW

Memorii, articole, note

1. *Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles a deux variables indépendantes.* C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, **159**, 231—234 (1914).
2. *Sur les fonctions quadruplement périodiques.* Ibid., **160**, 129—134 (1915).
3. *Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives.* Ibid., **162**, 217—219 (1916).
4. *Sur une classe de fonctions de deux variables définies par les équations linéaires aux dérivées partielles (Thèse).* Gauthier-Villars, Paris, 1916.
5. *Sur les singularités mobiles des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles et sur leurs intégrales générales.* Annales scienitfiques de l'Ecole Normale Supérieure, **36 (3)**, 235—262 (1919).
6. *Sur la représentation analytique des fonctions de plusieurs variables indépendantes.* C.R. de l'Académie des Sciences de Paris, **168**, 610—612 (1919).
7. *Sur la classification des ensembles de mesure nulle.* C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, **169**, 766—768 (1919).
8. *Sur la notion d'ordre des ensembles de mesure nulle.* C. R. du Congrès international des mathématiciens, Strassbourg, 160—163 (1920).
9. *Remarque sur les ensembles de mesure nulle à plusieurs dimensions.* C.R. de l'Académie des Sciences de Paris, **171**, 539—541 (1920).
10. *Sur l'intégrale définie et la mesure des ensembles.* Ibid., **174**, 802—804 (1922).
11. *Sur les fonctions continues et leurs dériveés.* Ibid., **176**, 227—229 (1923).
12. *Sur les transformations continues d'une variable.* Ibid., **179**, 807—810 (1924).
13. *Sur l'ensemble où une fonction continue a une valeur constante.* Ibid., **179**, 1585—1586 (1924).
14. *Sur l'inversion des fonctions continues.* Bulletin de la Société Mathématique de France, **53**, 135—148 (1925).
15. *Remarques sur quelques propriétés des transformations continues de n variables.* C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, **183**, 731—732 (1926).

16. *Sur les transformations continues et le théorème de Picard sur les fonctions entières.* C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, **185**, 173—175 (1927).
17. *Sur une classe de transformations continues a variation bornée.* Ibid., **186**, 621—623 (1928).
18. *Sur les transformations continues et la topologie des fonctions analytiques.* Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Paris, **45(3)**, 347—382 (1928).
19. *Sur la topologie des fonctions analytiques.* Atti del congresso internationale dei matematici, Bologna, **3**, 231—233 (1928).
20. *Sur les valeurs singulières des transformations continues de plusieurs variables.* Mathematica, **2**, 94—101 (1929).
21. *Sur la continuité et la dérivabilité des fonctions.* Buletinul Facultăţii de ştiinţe din Cernăuţi, **3**, 59—62 (1929).
22. *Sur un théorème topologique.* Fundamenta mathematica, Warszawa, **13**, 186—194(1929).
23. *Du caractère topologique d'un théorème sur les fonctions méromorphes*, C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, **190**, 251—253 (1930).
24. *Sur l'inversion des transformations continues de deux variables.* Ibid., **192**, 1342—1344 (1931).
25. *Sur les valeurs des fonctions analytiques au voisinage de la frontière d'un domaine de régularité.* Ibid., **193**, 14—16 (1931).
26. *Les propriétés topologiques des fonctions analytiques d'une variable.* Annales de l'Institut Henri Poincaré, **2**, 233—266 (1932).
27. *Remarques sur quelques théorèmes topologiques de la théorie des fonctions.* C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, **196**, 156—158 (1933).
28. *Du nombre des points de ramification d'une transformation intérieure sur une variété topologique à deux dimensions.* Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris, **57(2)**, 355 — 376 1933).
29. *Sur les transformations continues des espaces topologiques.* Bulletin Mathématique de la Société roumaine des Sciences, **35**, 229—235 (1933).
30. *La topologie et la théorie des fonctions.* Actes du Congrès interbalcanique des mathématiciens Atena, 115—120 (1934).
31. *Sur la caractérisation topologique des surfaces de Riemann.* C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, **200**, 189—190 (1935).
32. *Remarques sur la définition des fonctions presque analytiques de M. Lavrentieff.* Ibid., **200**, 1520—1521 (1935).
33. *Sur les transformations intérieures et la caractérisation topologique des surfaces de Riemann.* Compositio mathematica Amsterdam, **3**, 435—440 (1936).
34. *Sur les fonctions analytiques dont les surfaces de Riemann ont des frontières partout discontinues.* Mathematica, **12**, 123—138 (1936).
35. *Remarques sur les fonctions analytiques continues dans un domaine où elles admettent un ensemble parfait de discontinu de singularités.* Bulletin mathématique de la Société roumaine des Sciences, **38**, 117—120 (1936).
36. *Sur l'extension d'une homéomorphie entre ensembles fermés.* Revue mathém. de l'Union interbalcanique, **1**, 97—100 (1936).
37. *Sur la définition des surfaces de Riemann.* C. R. du Congrès international des mathématiciens, Oslo, 1936, **2**, 143—144 (1937).
38. *Sur une classe de surfaces de Riemann régulièrement exhaustibles et sur le théorème des disques de M. Ahlfors.* C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, **207**, 517—519 (1938).
39. *La formule de Hurwitz et les critères d'univalence.* Bulletin math. de la Soc. roumaine des Sciences, **40**, 79—80 (1938).

40. *Sur l'inversion des transformations dont le déterminant fonctionnel s'annule sans changer de signe.* Bulletin mathém. de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, **10**, 19—22 (1939).
41. *Sur une extension topologique du principe du maximum du module et sur ses applications à la théorie des fonctions.* Bulletin scientifique de l'Académie Roumaine, **23**, 28—30 (1940).
42. *Sur les surfaces de Riemann normalement exhaustibles et sur le théorème des disques pour ces surfaces.* Composition mathematica, **7**, 428—435 (1940).
43. *Des sous-ensembles sur lesquels une transformation continue d'un espace est intérieure ou topologique.* Disquisitiones Mathematicae et Physicae, **1**, 23—28 (1940).
44. *Sur les singularités des fonctions analytiques multiformes dont la surface de Riemann a sa frontière de mesure harmonique nulle.* Mathematica, **19**, 126—138 (1943).
45. *Remarque sur la définition des points singuliers des fonctions analytiques multiformes.* Bulletin scientifique de l'Académie Roumaine, **26**, 10, 671—672 (1944).
46. *Quelques remarques sur les éléments frontière des surfaces de Riemann et sur les fonctions correspondentes a ces surfaces.* C. R. de l'Académie des Sciences Paris, **227**, 1326—1328 (1948).
47. *Despre factorizarea grupurilor topologice local euclidiene prin subgrupurile lor închise zero-dimensionale.* Buletinul ştiinţific. A. Matematică, fizică, chimie, geologie, geografie, biologie, ştiinţe tehnice şi agricole, I, 9,829—834 (1949).
48. *Consideraţiuni asupra invariantei unor teorii matematice.* Lucrările sesiunii generale ştiinţifice a Academiei R.P.R. din iunie 1950, p. 178—182.
49. *Les transformations intérieures des variétés a trois dimensions.* C.R. du 1er Congrès des mathématiciens hongrois, Budapest 1950, p. 263—266.
50. *Les surfaces de Riemann à frontière nulle.* C. R. du VIe Congrès des mathématiciens polonais, Warszawa 1948, apărut în Dodetek Rocznika polsk. Towarz. mat., **22**, 36—37 (1951).
51. *Asupra cîtorva aspecte moderne ale teoriei funcţiilor de o variabilă complexă.* Comunicările Acad. R.P.R., **I**, *8*, 753—756, (1951).
52. *Despre unele chestiuni privitoare la bazele Analizei clasice.* Revista Universităţii „C. I. Parhon" şi a politehnicii Bucureşti, **1**, *1*, 20—24 (1952).
53. *Note sur les fonctions analytiques multiformes.* Annales de la Société polonaise de mathématiques, **25**, 69—74 (1952).
54. *Observări asupra principiului extremelor în teoria funcţiilor.* Studii şi cercetări ştiinţifice, Iaşi, seria I, **6**, 1—2, 13—18 (1955).
55. *Probleme de geometrie diferenţială în teoria funcţiilor.* Lucrările consfătuirii de geometrie diferenţială, Timişoara, 1955, p. 23—29.
56. *Asupra convergenţei continue.* Studii şi cercetări matematice, **VII**, 247—250 (1956); Revue de math. pures et appl., Acad. R.P.R., **IV**, *3*, 341—344 (1959).
57. *Sur la classification topologique des recouvrements riemanniens.* Revue de math. pures et appl., Acad. R.P.R., **I**, *2*, 37—42 (1956).
58. *Sur la notion de pseudo-analyticité.* Lucrările celui de-al IV-lea congres al matematicienilor romîni (Bucureşti, 1956), Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1960, p. 69—70.
59. *Sur quelques points de la théorie moderne des surfaces de Riemann.* Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni Roma,, 16 (5) 170—196 (1957).
60. *Bemerkungen über die durch ganze Relationen definierten analytischen Funktionen.* Deutsche Akad. der Wissenschaften. Band Leonhard Euler, 331—333 (1957).

61. *Sur la théorie topologique des recouvrements riemanniens.* Colloque sur la Théorie des fonctions (1957). Annales Academiae scientiarum fenniciae, 250/35 (1958).
62. *Sur les fonctions analytiques continues sur leurs singularités.* Conferința unională de Teoria funcțiilor, Moscova 1957, publicat rezumatul: *Об однозначных аналитических фуикциях, непрерывных на множестве их особенностей 1957.* Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, Москва. гос. издат. физ.-мат. лит., 1960 418—419.
63. *Probleme geometrico-topologice ale teoriei funcțiilor complexe.* Consfătuirea de geometrie și topologie, Iași, 1958.
64. *Représentation quasi conforme et théorie géométrique des fonctions.* Conferință ținută la Paris în mai 1960.
65. *Topologische Funktionentheorie auf nichtorientierbaren Flächen,* V. Österreichischer Mathematikerkongress, Innsbruck, 12—17 IX 1960.

Monografii, tratate și cursuri

1. *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques.* (Collection Borel). Gauthier Villars, Paris, 1938; ediția a II-a, Paris, 1956.
2. *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă: Noțiuni și principii fundamentale.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1954.
3. *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă: Funcții armonice, suprafețe riemanniene* (în colaborare cu Cabiria Andreian-Cazacu). Ed. Acad. R.P.R., București, 1958.
4. *Algebra abstractă* (curs litografiat), Cernăuți, 1935.
5. *Analiza matematică* (curs litografiat), Politehnica din București, 1939—40.
6. *Teoria metrico-topologică a suprafețelor de acoperire* (Litografiat), Facultatea de științe, București, 1943.
7. *Curs de teoria funcțiilor de o variabilă complexă,* partea I și II. (Litografiat), Facultatea de matematică și fizică, București, ultima ediție: 1952-53.

Publicații cu caracter general

1. Despre natura cantităților imaginare, Pitagora **5**, 7—8, 221—226 (1940).
2. *Opera matematică a lui Henri Lebesgue.* Mathematica, **18**, 13—25 (1942).
3. *Gîndirea axiomatică în matematica modernă.* Revista fundațiilor, **11**, 364—381 (1944).
4. *Gheorghe Țițeica,* Natura, **29**, 3, 108—110 (1940).
5. *Despre contribuția sovietică la progresul științei matematice moderne.* Analele romîno-sovietice, **14**, 3, caiet 2, 222—230 (1948).
6. *Matematica modernă și realitatea,* Studii (1949).
7. *Reprezentarea quasi-conformă și extensiuni ale noțiuni de funcție analitică în lucrările lui M.A. Lavrentie.* Analele romîno-sovietice, **1**, 77—82 (1949).
8. *Ce sînt facultățile de matematică și fizică ale Universităților noastre și care este menirea lor.* Gazeta matematică și fizică **1**, *3*, 9—15 (1949).
9. *Materialismul dialectic, singura metodă științifică de cercetare în matematică.* Gazeta matematică și fizică, **2**, 4, 3—14 (1950).
10. *Caracterul revoluționar al ideilor lui Bolyai și Lobacevski.* Analele Academiei Republicii Populare Romîne, II, 113—117 (1952).

11. *Sigularităţile funcţiilor analitice şi lucrările lui D. Pompeiu.* Studii şi cercetări matematice, **V**, *1—2*, 19—24 (1954).
12. *David Emanuel* (1854—1941) Biblioteca Acad. R.P.R., Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1955, 24 p.
13. *Dezvoltarea matematicii în Republica Populară Romînă între 1944—1945.* Gazeta matematică şi fizică, seria A, *8—9*, 341—348 (1954).
14. *Cuvînt de deschidere.* Consfătuirea de geometrie diferenţială din Timişoara, 1955, p. 9—11.
15. *Emile Borel şi analiza matematică modernă.* Gazeta matematică şi fizică, seria A, *8 (61)*, 169—175 (1956).
16. *О математических исследованиях в Румынии.* Успехи математических наук, **II**, *4*, (*70*), 207—225 (1956).
17. *Realizări ale matematicii şi fizicii în ţara noastră în ultimii* 15 *ani.* Analele romîno-sovietice. Seria matematică-fizică, *3*, 5—9 (1959).
18. *Cuvîntări la cel de-al IV-lea Congres al matematicienilor romîni* (1956). Lucrările celui de al IV-lea Congres al matematicienilor romîni, Ed. Acad. R.P.R., 1960, p. 9—11 şi 19—20.
19. *Задачи физико-математических наук в свете директив III съезда Румынской рабочей партии.* Бюллетень научной информации Акад. РНР, *2*, 31—35 (1960).
20. *Sărbătorirea acad. S. Stoilow.* Analele Acad. R.P.R., 1958, *8*, 173—201 (1958), publ. în 1960.
21. *Matematica în ajutorul producţiei metalurgice*, p. 33—43.
22. *Răspuns la Ancheta revistei „Cercetări Filozofice" : Oamenii de ştiinţă despre însemnătatea materialismului dialectic pentru avîntul ştiinţific.* Cercetări Filozofice, 183—184 (1960).
23. *Conferinţă ţinută la Simposionul : „Rolul conducător al partidului în orientarea cercetării ştiinţifice în ţara noastră"* din 1961.
24. (În colaborare cu M. Neculce). *Teoria leninistă a cunoaşterii şi critica idealismului în matematică, 50 de ani de la apariţia operei lui V. I. Lenin, Materialism şi empiriocriticism.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1960, p. 39—46.

REDUCEREA LA O FORMĂ CANONICĂ A DOUĂ FORME PĂTRATICE

DE

G. VRĂNCEANU

Într-o altă lucrare [1] am considerat problema reducerii la o formă canonică a două forme pătratice

$$\varphi = a_{ij}\, x^i x^j, \quad \psi = b_{ij}\, x^i x^j$$

din care φ este de tip hiperbolic normal.

Vom presupune acum cazul general în care φ poate fi redusă la forma canonică

$$\varphi = (x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \ldots - (x^n)^2 \tag{1}$$

şi vom zice că $x^1, \ldots, x^p$ sînt variabile canonice pozitive, în timp ce $x^{p+1}, \ldots, x^n$ sînt variabile canonice negative ale formei φ. Dacă $n - p \geqslant 1$ deci dacă φ posedă unul sau mai multe pătrate negative, putem presupune că avem $p \geqslant n - p$, căci altfel ne reducem la acest caz schimbînd semnul lui φ. Aceasta revine la a presupune că numărul pătratelor negative din φ nu întrece numărul pătratelor pozitive.

Vom arăta în primul rînd că dacă ecuaţia caracteristică referitoare la φ şi ψ posedă o rădăcină reală, a cărei direcţie caracteristică nu este o direcţie nulă, atunci se poate separa în ψ o variabilă canonică a lui φ corespunzătoare acestei direcţii. Dacă direcţia caracteristică este o direcţie nulă, se asociază $2s$ variabile în cazul cînd rădăcina este multiplă de ordinul $2s$ şi anume s variabile pozitive şi s variabile negative.

În al doilea rînd vom arăta că dacă ecuaţia caracteristică are o rădăcină imaginară şi dacă direcţia caracteristică imaginară nu este o direcţie nulă, se poate separa în ψ un grup de două variabile canonice ale lui φ, una pozitivă şi una negativă. Dacă direcţia caracteristică este o direcţie nulă, se pot separa $4r$ variabile, atunci cînd rădăcina ecuaţiei caracteristice este multiplă de ordinul $2r$. Rezultă astfel că ecuaţia caracteristică admite cel mult $2\,(n - p)$ rădăcini imaginare.

I

Să presupunem că ecuația caracteristică referitoare la formele φ și ψ :

$$| b_{ij} - \rho a_{ij} | = 0 \tag{2}$$

are o rădăcină reală. Putem scrie atunci o direcție caracteristică referitoare la această rădăcină sub forma

$$x^k = a^k t, \quad x^\alpha = a^\alpha t, \qquad (k \leqslant p, \ \alpha > p), \tag{3}$$

unde a^k, a^α sînt cantități reale și t un parametru.

Dacă φ este redusă la forma canonică (1) și dacă a^α sînt zero, sau a^k sînt zero, atunci prin transformări ortogonale în variabilele $x^1, \ldots, x^p$ sau în variabilele $x^{p+1}, \ldots, x^n$ putem separa una din variabile ca în cazul obișnuit cînd forma φ este definită pozitivă.

Să presupunem că nici a^k nici a^α nu sînt toți nuli. În acest caz, considerînd transformări ortogonale în variabilele x^k pe de o parte și în variabilele x^α pe de altă parte putem face să avem

$$\begin{aligned} &x^1 = at, \ x^s = 0, \qquad (s = 2, \ldots, p), \qquad (a > 0) \\ &x^\rho = 0, \ (\rho = p+1, \ldots, n-1), \ x^n = bt, \qquad (b > 0) \end{aligned} \tag{4}$$

căci aceasta revine a lua respectiv în spațiile euclidiene :

$$E_p(x^1, \ldots, x^p), \quad E_{n-p}(x^{p+1}, \ldots, x^n)$$

ca direcții ale vectorilor a^k și a^α : axa x^1 și axa x^n.

Printr-o transformare hiperbolică

$$\begin{aligned} x'^1 &= \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} x^1 + \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} x^n \\ x'^n &= \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} x^1 + \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} x^n \end{aligned} \tag{5}$$

avem formulele

$$\begin{aligned} a' &= \frac{e^\theta}{2}(a+b) + \frac{e^{-\theta}}{2}(a-b), \\ b' &= \frac{e^\theta}{2}(a+b) + \frac{e^{-\theta}}{2}(b-a). \end{aligned} \tag{5'}$$

Rezultă deci că putem alege θ așa fel ca a' sau b' să fie nuli după cum $b > a$ sau $a > b$. Rezultă deci că dacă $a \neq b$, deci dacă direcția caracteristică nu este o direcție nulă a formei φ, putem presupune că toate variabilele sînt nule pentru această direcție caracteristică afară de una. Dacă această variabilă este x^1, atunci variabila x^1 apare separată în forma ψ de celelalte variabile, deoarece considerînd ecuațiile ce definesc o direcție caracteristică

$$(b_{pq} - \rho a_{pq}) x^q = 0, \tag{6}$$

obținem în cazul nostru

$$b_{p1} = 0, \qquad (p \neq 1).$$

Dacă avem însă $a = b$, deci direcția caracteristică (4) este o direcție nulă a formei ψ, formulele (6) trebuie să fie verificate cînd luăm $x^1 = x^n$ iar celelalte variabile nule. Avem deci ecuațiile

$$\begin{aligned} &b_{11} + b_{1n} = \rho = -b_{n1} - b_{nn} \\ &b_{p1} + b_{pn} = 0, \qquad (p = 2, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{6'}$$

Să considerăm în acest caz ecuația caracteristică. Putem scrie

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \rho & b_{12} & b_{13} \ldots b_{1n} \\ b_{12} & & b_{2n} \\ b_{13} & \Delta & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} \ldots & b_{nn} + \rho \end{vmatrix} = 0,$$

unde Δ este polinomul caracteristic referitor la variabilele $x^2, \ldots, x^{n-1}$.

Adunînd ultima coloană la prima coloană și ținînd seamă de ecuațiile (6'), obținem ca prim și ultim element al coloanei întîi : $b_{11} + b_{1n} - \rho$, $b_{n1} + b_{nn} + \rho$, iar celelalte elemente nule. Adăugînd apoi prima linie la ultima linie, ultima linie are toate elementele nule afară de ultimul, deci ecuația caracteristică se scrie

$$-[b_{11} + b_{1n} - \rho]^2 \Delta = 0,$$

deci ecuația caracteristică are o rădăcină dublă

$$\rho = b_{11} + b_{1n}.$$

Forma ψ se scrie

$$\begin{aligned} \psi = {} & b_{11}(x^1)^2 + b_{nn}(x^n)^2 - (b_{11} + b_{nn})\, x^1 x^n + \\ & + 2b_{p1}(x^1 - x^n)\, x^p + \Phi(x^2, \ldots, x^{n-1}), \qquad (p \neq 1, n), \end{aligned}$$

unde Φ este o formă pătratică în variabilele $x^2, \ldots, x^{n-1}$. Se vede că variabilele x^1, x^n sînt separate de $x^2, \ldots, x^{n-1}$ numai dacă b_{p1}, $(p \neq 1, n)$ sînt nule. Se poate observa de asemenea că putem scrie

$$\psi = (x^1 - x^n)\,(b_{11} x^1 - b_{nn} x^n + 2b_{p1} x^p) + \Phi. \tag{7}$$

Dacă formele φ și ψ conțin numai două variabile x^1, x^n, regăsim forma canonică dată în [1].

Avem deci următoarea teoremă :

O condiție suficientă ca să putem separa variabilele în forma pătratică ψ este ca ecuația caracteristică să aibă sau rădăcini reale simple sau rădăcini reale multiple, ale căror direcții caracteristice nu sînt direcții nule pentru forma φ.

Rezultă deci că dacă ecuația caracteristică are rădăcini reale și numai o singură rădăcină dublă care corespunde unei direcții caracteristice

nule, atunci variabilele se separă în ψ în grupe de cîte o variabilă și o grupă de două variabile.

Să presupunem că avem două rădăcini duble care dau direcții caracteristice nule și fie x^1, x^n variabilele legate de prima rădăcină și x^2, x^{n-1} variabilele legate de-a doua rădăcină. Luînd ca noi variabile

$$y^1 = \frac{x^1 - x^n}{\sqrt{2}}, \quad y^2 = \frac{x^1 + x^n}{\sqrt{2}},$$
$$y^3 = \frac{x^2 - x^{n-1}}{\sqrt{2}}, \quad y^4 = \frac{x^2 + x^{n-1}}{\sqrt{2}}, \quad y^{i+2} = x^i, \qquad (i = 3, \ldots, n-2), \tag{7'}$$

direcțiile caracteristice sînt definite respectiv de

$$y^2 \neq 0, \; y^i = 0, \; (i \neq 2); \quad y^4 \neq 0, \; y^s = 0, \; (s \neq 4)$$

iar forma φ se scrie

$$\varphi = 2y^1y^2 + 2y^3y^4 + \varepsilon_k (y^k)^2, \qquad (k = 5, \ldots, n; \; \varepsilon_k = \pm 1). \tag{7''}$$

De asemenea forma ψ, ținînd seama de (7'), se scrie

$$\psi = y^1(ay^1 + 2by^2 + 2cy^3 + 2dy^4) + y^3(\alpha y^3 + 2\beta y^4) +$$
$$+ 2b_{1k}y^1y^k + h_{3k}y^3y^k + b_{kl}y^ky^l, \qquad (k, l > 4). \tag{7'''}$$

Observăm că ecuația caracteristică referitoare la φ și ψ cînd $y^k = 0$ se scrie

$$\begin{vmatrix} a & b-\rho & c & d \\ b-\rho & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & \alpha & \beta-\rho \\ d & 0 & \beta-\rho & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ceea ce ne arată că rădăcinile duble sînt respectiv egale cu b și β. Să arătăm că dacă $b \neq \beta$, deci dacă rădăcinile duble nu sînt egale, putem separa variabilele în două grupe, deci că putem anula pe c și d.

Într-adevăr, să considerăm în primul rînd o transformare de forma

$$y^1 = y'^1, \; y^2 = y'^2 - my'^4$$
$$y^3 = my'^1 + y'^3, \; y^4 = y'^4, \; y^k = y'^k$$

care conservă forma canonică (7'') a lui φ, în timp ce noul coeficient d' în ψ este dat de formula

$$d' = d + m(\beta - b).$$

Dacă $\beta \neq b$, putem alege m așa fel ca d' să fie zero și prin urmare putem presupune în formula (7''') că avem $d = 0$, dacă $\beta \neq b$.

Să facem atunci transformarea de variabile

$$y^1 = y'^1, \; y^2 = y'^2 + qy'^3$$
$$y^3 = y'^3, \; y^4 = -qy'^1 + y'^4, \; y^k = y'^k \tag{7^{IV}}$$

care, de asemenea, conservă forma canonică (7″) și păstrează nul coeficientul d, în timp ce coeficientul c este dat de formula

$$c' = c + q(b - \beta)$$

și deci putem alege q așa fel ca c' să fie nul.

Avem deci următoarea teoremă:

Dacă ecuația caracteristică admite numai rădăcini reale și aceste rădăcini ce corespund la direcții nule sînt numai rădăcini duble, variabilele se separă în grupe de cîte una și două variabile.

O dată reduși c și d la zero, transformările ce păstrează variabilele y^1, y^2 și y^3, y^4 sînt de forma

$$\begin{aligned} y'^1 &= \pm e^{\sigma} y^1, \quad y'^2 = \pm e^{-\sigma} y^2 \\ y'^3 &= \pm e^{\lambda} y^3, \quad y'^4 = \pm e^{-\lambda} y^4 \end{aligned} \tag{7^V}$$

față de care b, β sînt invarianți absoluți, în timp ce a, α sînt invarianți relativi și avem

$$a' = e^{2\sigma} a, \quad \alpha' = e^{2\lambda} \alpha$$

și prin urmare putem reduce a, α la ± 1 dacă nu sînt nuli.

Să presupunem că $b = \beta$ deci că rădăcina ce corespunde la direcția nulă este cvadruplă. În acest caz forma ψ se scrie

$$\psi = 2b(y^1 y^2 + y^3 y^4) + y^1(ay^1 + 2cy^3 + 2dy^4) + \alpha(y^3)^2 + \dots$$

Să considerăm transformarea de variabile

$$\begin{aligned} y^1 &= y'^1, y^2 = mq y'^1 + y'^2 + q y'^3 - m y'^4 \\ y^3 &= m y'^1 + y'^3, y^4 = -q y'^1 + y'^4 \end{aligned}$$

ce lasă invariantă forma φ. Avem prin această transformare

$$\begin{aligned} a' &= a + 2cm - 2dq + \alpha m^2, \\ c' &= c + \alpha m, \; d' = d, \; \alpha' = \alpha. \end{aligned}$$

Aceste formule ne arată că dacă d și α sînt diferiți de zero, putem face, utilizînd m și q, să avem $a' = c' = 0$. Deci forma ψ se scrie

$$\psi = 2b(y^1 y^2 + y^3 y^4) + 2dy^1 y^4 + \alpha(y^3)^2 + \dots \tag{8}$$

și prin transformări de forma (7^{IV}) putem face $d = 1$ și $\alpha = \pm 1$.

Dacă $\alpha = 0$, putem face $a = 0$, dacă c și d nu sînt în același timp nuli. Deci avem cazurile

$$\begin{aligned} \psi &= 2b(y^1 y^2 + y^3 y^4) + 2y^1(cy^3 + dy^4) + \dots \\ \psi &= 2b(y^1 y^2 + y^3 y^4) \pm (y^1)^2 + \dots \end{aligned} \tag{8'}$$

unde d poate fi redus la unitate, dacă nu este nul, altfel c poate fi redus la unitate.

Avem deci un rezultat care, interpretat geometric, poate să fie enunțat în forma următoare:

Dacă $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sînt două cuadrice riglate, ce au o generatoare comună și dacă ecuația caracteristică relativă la φ și ψ are o rădăcină cva-

dublă, atunci, prin transformări proiective de variabile, formele pătratice φ, ψ *se scriu*

$$\varphi = 2y^1y^2 + 2y^3y^4, \quad \psi = b\varphi + \Phi,$$

unde Φ are una din formele

$$2\,dy^1y^4 + \alpha(y^3)^2, \qquad 2y^1(cy^3 + dy^4), \qquad \pm(y^1)^2$$

deci $\Phi = 0$ *reprezintă un cilindru, două plane distincte sau un plan dublu.*

II

Să considerăm cazul cînd ecuația (2) are rădăcini imaginare. În acest caz la o asemenea rădăcină se asociază o direcție caracteristică imaginară, deci avem formule de forma

$$x^k = (a^k + ib^k)\,t, \quad x^\alpha = (a^\alpha + ib^\alpha)\,t \tag{9}$$

deci putem considera în spațiile euclidiene E_p și E_{n-p} cîte o pereche de vectori a^k, b^k și a^α, b^α. Putem, prin transformări ortogonale de coordonate în E_p și E_{n-p}, face să avem

$$x^s = 0, \ (s = 3, \ldots, p), \quad x^\alpha = 0, \ (\alpha = p+1, \ldots n-2). \tag{9'}$$

Presupunînd $n - p > 1$, deci că avem cel puțin două pătrate negative, direcția caracteristică se găsește în planul variabilelor x^1, x^2, x^{n-1}, x^n definită de formule de forma

$$\begin{aligned} &x^1 = (a + ib)\,t, \quad x^2 = (c + id)\,t, \\ &x^{n-1} = (\alpha + i\beta)\,t, \quad x^n = (\gamma + i\delta)\,t. \end{aligned} \tag{9''}$$

Să presupunem că sîntem în cazul particular cînd în formulele (9'') avem $x^2 = x^{n-1} = 0$, deci în cazul în care direcția caracteristică este situată în planul variabilelor x^1, x^n. Să arătăm că în acest caz variabilele x^1, x^n se separă. Într-adevăr, ecuațiile (6) ce definesc direcția caracteristică se scriu

$$(b_{p1} - \rho\, a_{p1})\, x^1 + (b_{pn} - \rho a_{pn})\, x^n = 0.$$

Aceste ecuații ne dau pentru $p = 2, \ldots, n-1$

$$b_{p1}(a + ib) + b_{pn}(\gamma + i\delta) = 0, \qquad (p \neq 1, n)$$

deci b_{p1}, b_{pn}, $(p \neq 1, n)$, satisfac sistemul

$$b_{p1}\,a + b_{pn}\,\gamma = 0, \ b_{p1}\,b + b_{pn}\,\delta = 0. \tag{10}$$

Cum nu putem avea $a\delta - b\gamma = 0$, căci în acest caz, alegînd convenabil pe t, variabilele x^1, x^n ar fi reale, rezultă b_{p1}, b_{pn} nuli și deci variabilele x^1, x^n se separă în forma ψ.

Avem deci următoarea teoremă:

O condiție suficientă ca să separăm în ♆ două variabile în legătură cu o direcție caracteristică imaginară este ca această direcție să fie situată în planul a două variabile.

Să arătăm acum că fiind dată direcția caracteristică (9′), în planul variabilelor x^1, x^2, x^{n-1}, x^n, ea se poate reduce la anumite forme canonice utilizînd transformări ortogonale și hiperbolice. În adevăr, putem face prin transformări ortogonale în x^1, x^2 și x^{n-1}, x^n așa fel ca $d = \beta = 0$, deci să avem

$$x^1 = (a + ib)t, \quad x^2 = ct, \quad x^{n-1} = \alpha t, \quad x^n = (\gamma + i\delta)t, \quad (b \geqslant 0, \delta > 0).$$

Să considerăm atunci transformări hiperbolice în x^1, x^n. Putem face să avem $\delta = 0$, dacă $b \neq \delta$, însă în acest caz putem face printr-o transformare ortogonală în variabilele x^{n-1}, x^n să avem $\alpha = 0$ și atunci printr-o transformare hiperbolică în x^2, x^n putem face $c = 0$, dacă $c \neq \gamma$. Avem deci dacă $b \neq \delta$ sau cazul

$$x^1 = (a + ib)t, \quad x^2 = ct, \quad x^n = ct, \quad x^i = 0, \quad (i = 3, \ldots, n-1)$$

sau cazul în care direcția caracteristică este situată în planul variabilelor x^1, x^n, caz considerat mai sus.

Să presupunem că avem $b = \delta$.

În acest caz dacă $a \neq \gamma$, putem face $\gamma = 0$ și avem următoarele două cazuri de considerat:

$$\begin{aligned} &x^1 = (a + ib)t, \quad x^2 = ct, \quad x^n = ibt, \quad x^i = 0, \quad (i = 3, \ldots, n-1), \\ &x^1 = (a + ib)t, \; x^2 = ct, \; x^{n-1} = ct, \; x^n = ibt, \; x^s = 0, \; (s = 3, \ldots n-2), \end{aligned} \tag{11}$$

unde $c \neq 0$ după cum $c \neq \alpha$ sau $c = \alpha$.

Dacă $a = \gamma$, avem de asemenea cazurile

$$\begin{aligned} &x^1 = (a + ib)t, \; x^2 = ct, \; x^n = (a + ib)t, \; x^i = 0, \\ &x^1 = (a + ib)t, \; x^2 = ct, \; x^{n-1} = ct, \; x^n = (a + ib)t, \; x^s = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

unde $c \neq 0$, căci altfel direcția caracteristică ar fi situată în planul a două variabile canonice x^1, x^n ale funcției φ.

Să considerăm în formulele (11) următoarea transformare de variabile

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}(x^1 - x^n) - \alpha x^2 + \beta x^{n-1} \\ x'^n &= x^n + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}(x^1 - x^n) - \alpha x^2 + \beta x^{n-1}, \\ x'^2 &= x^2 + \alpha(x^1 - x^n), \\ x'^{n-1} &= x^{n-1} + \beta(x^1 - x^n), \; x'^i = x^i, \qquad (i = 3, \ldots, n-2), \end{aligned} \tag{13}$$

unde α, β sînt constante, transformare care, cum este ușor de văzut, păstrează forma canonică a formei φ. În aceste variabile formulele (11) ne dau respectiv pentru x'^2, x'^{n-1} :

$$\begin{aligned} x'^2 &= (c + \alpha a)\,t, \quad x'^{n-1} = \beta a t, \\ x'^2 &= (c + \alpha a)\,t, \quad x'^{n-1} = (c + \beta a)\,t. \end{aligned} \tag{14}$$

Rezultă deci că dacă $a \neq 0$, putem lua respectiv

$$\alpha = -\frac{c}{a},\ \beta = 0; \qquad \alpha = \beta = -\frac{c}{a}$$

așa fel ca să avem $x'^2 = x'^{n-1} = 0$, deci așa fel ca direcția caracteristică să fie situată în planul variabilelor x^1, x^n caz deja considerat. Deci din formulele (11) trebuie să reținem numai cazul în care $a = 0$. Însă în acest caz, formulele (11) sînt conținute în formulele (12) pentru $a = 0$.

Rezultă deci că o direcție caracteristică imaginară poate fi considerată situată în planul a două direcții canonice x^1 și x^n ale formei φ, afară de cazul cînd această direcție este dată de formulele (12). Să considerăm direcția caracteristică dată de primele formule (12) și să arătăm că ea nu este compatibilă cu presupunerea de a corespunde la o rădăcină imaginară a ecuației caracteristice.

Într-adevăr, ecuațiile (6) ne dau în acest caz

$$\begin{aligned} &(b_{11} + b_{1n} - \rho)\,(a + ib) + b_{12}\,c = 0, \qquad (b \neq 0,\ c \neq 0), \\ &(b_{21} + b_{2n})\,(a + ib) + (b_{22} - \rho)\,c = 0, \\ &(b_{n1} + b_{nn} + \rho)\,(a + ib) + b_{2n}\,c = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Adunînd prima cu ultima ecuație, rezultă că trebuie să avem

$$b_{11} + b_{nn} + 2b_{1n} = 0, \qquad b_{12} + b_{2n} = 0.$$

În acest caz însă a doua ecuație (15) ne spune că $b_{22} = \rho$, deci că ρ este real, ceea ce contrazice presupunerea că direcția caracteristică corespunde unei rădăcini imaginare.

Rămîne deci de considerat al doilea caz (12), care corespunde unei direcții caracteristice nule.

Ținînd seamă de ecuațiile (6) rezultă că avem

$$\begin{aligned} &(b_{11} + b_{1n} - \rho)\,(a + ib) + (b_{12} + b_{1\,n-1})\,c = 0, \\ &(b_{21} + b_{2n})\,(a + ib) + (b_{22} + b_{2\,n-1} - \rho)\,c = 0, \\ &(b_{n-1\,1} + b_{n-1\,n})\,(a + ib) + (b_{n-1\,2} + b_{n-1\,n-1} + \rho)\,c = 0, \\ &(b_{n1} + b_{nn} + \rho)\,(a + ib) + (b_{n2} + b_{n\,n-1})\,c = 0, \\ &(b_{p1} + b_{pn})\,(a + ib) + (b_{p2} + b_{p\,n-1})\,c = 0, \qquad (p = 3, \ldots, n-2). \end{aligned} \tag{16}$$

Rezultă deci că avem adunînd prima cu ultima și a doua cu a treia ecuație :

$$\begin{aligned} &b_{11} + b_{nn} + 2b_{1n} = 0, \quad b_{22} + b_{n-1\,n-1} + 2b_{n\,n-1} = 0, \\ &b_{12} + b_{2n} + b_{1\,n-1} + b_{n-1\,n} = 0, \\ &b_{p1} + b_{pn} = 0, \quad b_{p2} + b_{p\,n-1} = 0, \qquad (p = 3, \ldots, n-2) \end{aligned} \tag{16'}$$

De asemenea rezultă că ρ satisface la ecuația

$$\delta = \begin{vmatrix} b_{11} + b_{1n} - \rho & b_{12} + b_{1\,n-1} \\ b_{12} + b_{2n} & b_{22} + b_{2\,n-1} - \rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

această ecuație urmînd bineînțeles să aibă rădăcini imaginare, deci $b_{12} + b_{1\,n-1}$, $b_{12} + b_{2n}$ nu pot fi nuli.

Să considerăm însă ecuația caracteristică a formelor φ și ψ. Avem, punînd în evidență liniile și coloanele $1,2,\ n-1,\ n$:

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} - \rho & b_{12} & b_{1\,n-1} & b_{1n} & b_{13} & \dots & b_{1\,n-2} \\ b_{12} & b_{22} - \rho & b_{2\,n-1} & b_{2n} & b_{23} & \dots & b_{2\,n-2} \\ b_{1\,n-1} & b_{2\,n-1} & b_{n-1\,n-1} - \rho & b_{n-1\,n} & b_{n-13} & \dots & b_{n-1\,n-2} \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{n-1\,n} & b_{nn} - \rho & b_{n3} & \dots & b_{n\,n-2} \\ b_{13} & b_{23} & b_{3\,n-1} & b_{3n} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \Delta & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ b_{1\,n-2} & b_{2\,n-2} & b_{n-2\,n-1} & b_{n-2\,n} & & & \end{vmatrix} \qquad (18)$$

unde Δ este determinantul caracteristic relativ la formele φ și ψ cînd $x^1 = x^2 = x^{n-1} = x^n = 0$.

Să adunăm linia a patra la linia întîi și linia a treia la linia a doua și după aceea să adunăm coloana întîi la coloana a patra și coloana a doua la coloana a treia. Obținem un determinant în care elementele liniilor întîi și a doua sînt nule, începînd cu coloana a treia, iar elementele coloanelor a treia și a patra începînd cu linia a cincea sînt de asemenea nule. Rezultă de asemenea că minorii principali formați cu liniile întîia și a doua și cu liniile a treia și a patra sînt egali cu δ.

Dezvoltînd determinantul D astfel obținut după regula lui Laplace după minorii liniei întîi cu a doua și apoi a liniei a treia cu a patra rezultă formula

$$D = \delta^2 \Delta,$$

deci ecuația caracteristică admite rădăcinile ecuației $\delta = 0$ ca rădăcini duble.

Ținînd seamă că în virtutea formulelor (16′) forma ψ se scrie

$$\begin{aligned} \psi = {} & b_{11}(x^1)^2 + b_{nn}(x^n)^2 - (b_{11} + b_{nn})\, x^1 x^n + b_{22}(x)^2 + \\ & + b_{n-1\,n-1}(x^{n-1})^2 - (b_{22} + b_{n-1\,n-1})\, x^2 x^{n-1} + 2b_{12}\, x^1 x^2 + \\ & + 2b_{1\,n-1}\, x^1 x^{n-1} + 2b_{2n}\, x^2 x^n - 2(b_{12} + b_{2n} + b_{1\,n-1})\, x^{n-1} x^n + \\ & + 2b_{p1}(x^1 - x^n)\, x^p + 2b_{p2}(x^2 - x^{n-1})\, x^p + \Phi, \\ & (p = 3, \dots, n-2), \end{aligned} \qquad (19)$$

unde Φ conține variabilele $x^3, \dots, x^{n-2}$, rezultă că variabilele canonice x^1, x^2, x^{n-1}, x^n ale lui φ apar separate în ψ de $x^3, \dots, x^{n-2}$ numai dacă b_{p1}, b_{p2} sînt nule.

Ţinînd seamă şi de rezultatul obţinut mai sus, relativ la rădăcinile reale, rezultă următoarea teoremă :

Dacă ecuaţia caracteristică a formelor φ şi ψ are numai rădăcini simple reale sau imaginare, sau dacă avînd rădăcini multiple, aceste rădăcini nu dau direcţii caracteristice nule, variabilele se separă în ψ în grupe de una sau două variabile canonice ale lui φ după cum rădăcina este reală sau imaginară.

Să observăm acum că dacă facem o transformare de variabile de forma (7′), formula (19) se scrie

$$\psi = y^1(ay^1 + 2by^2 + 2cy^3 + 2dy^4) + y^3(\alpha y^3 + 2\beta y^4 + 2\gamma y^2) + \\ + 2b_{1p}y^1y^p + 2b_{3p}y^3y^p + \Phi, \tag{19′}$$

unde Φ conţine numai variabilele y^p, $(p = 5, \ldots, n)$, şi ecuaţia caracteristică referitoare la variabilele y^1, y^2, y^3, y^4 se scrie

$$[(b - \rho)(\beta - \rho) - \gamma d]^2 = 0. \tag{20}$$

Să facem transformarea de variabile

$$\begin{aligned} y^1 &= M(y'^1 + ny'^3),\ y^2 = M(mqy'^1 + y'^2 + qy'^3 - my'^4) \\ y^3 &= M(my'^1 + y'^3),\ y^4 = M(-qy'^1 - ny'^2 - nqy'^3 + y'^4), \end{aligned} \tag{20′}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 - mn}}$$

ceea ce ne dă

$$b' = \frac{b - dn - mn\beta + \gamma m}{1 - mn},$$

$$\beta' = \frac{-nmb + dn + \beta - m\gamma}{1 - mn}.$$

Rezultă că avem $b' + \beta' = \beta + b$ în timp ce

$$\beta' - b' = (\beta - b)\frac{1 + mn}{1 - mn} + \frac{2nd - 2m\gamma}{1 - mn}.$$

Cum d, γ nu sînt nuli, înseamnă că putem alege m, n aşa fel ca $\beta' = b'$. Dacă presupunem de la început că avem $\beta = b$, transformările (20′) care păstrează această situaţie au m, n legate prin relaţia $nd = m\gamma$.

Presupunînd $b = \beta$, forma ψ se scrie pentru $y^5 = \ldots = y^n = 0$,

$$\psi = 2b(y^1y^2 + y^3y^4) + y^1(ay^1 + 2cy^3 + 2dy^4) + \\ + y^3(\alpha y^3 + 2\gamma y^2) \tag{21}$$

iar ecuaţia (20) devine

$$[(\rho - b)^2 - \gamma d]^2 = 0$$

ceea ce ne spune că γ, d sînt de semne contrarii, dacă ρ este imaginar.

Pe de altă parte, prin transformarea de variabile (20′), avem

$$\begin{aligned} a' &= \frac{a + 2cm - 2dq + \alpha m^2 + 2\gamma m^2 q}{1 - mn}, \\ \alpha' &= \frac{\alpha + 2\gamma q + an^2 + 2cn - 2dn^2 q}{1 - mn}. \end{aligned} \tag{21′}$$

Să arătăm că putem presupune $a' = \alpha' = 0$. Pentru a avea $a' = 0$ este de ajuns a lua $m = n = 0$ și $q = \frac{a}{2d}$. Vom presupune deci $a = a' = 0$, și prin urmare q definit de ecuația

$$q = \frac{2cm + \alpha m^2}{2[d - m^2\gamma]};$$

deoarece γ, d sînt de semne contrarii cantitatea $d - m^2\gamma$ nu se poate anula. Pentru ca α' să se anuleze trebuie să avem deci

$$\alpha + \frac{2cm + \alpha m^2}{d - m^2\gamma}(\gamma - dn^2) + 2cn = 0, \quad n = \frac{m\gamma}{d},$$

ceea ce ne dă pentru m ecuația

$$\gamma\alpha m^2 + 4c\gamma m + d\alpha = 0$$

al cărei realizant este

$$4\gamma^2 c^2 - \gamma d\,\alpha^2$$

ce este pozitiv deoarece $\gamma d < 0$ și prin urmare există valori reale pentru m, care anulează α'.

Avem deci următoarea teoremă:

Forma ψ relativă la cazul unei direcții caracteristice imaginare nule se poate scrie

$$\psi = 2b(y^1y^2 + y^3y^4) + 2cy^1y^3 + 2dy^1y^4 + 2\gamma y^2y^3. \tag{22}$$

Evident, putem încă presupune că prin transformări (7^{v}) d și γ să fie egali cu ± 1.

Să presupunem acum că ecuația caracteristică are o a doua direcție caracteristică imaginară nulă și fie y^5, y^6, y^7, y^8 variabilele asociate acestei direcții. Putem scrie forma ψ, ținînd seamă de formula (19′) și (22), sub forma

$$\begin{aligned} \psi = {} & 2b(y^1y^2 + y^3y^4) + 2cy^1y^3 + 2dy^1y^4 + 2\gamma y^2y^3 + \\ & + 2m_5y^1y^5 + 2m_6y^1y^6 + 2m_7y^1y^7 + 2m_8y^1y^8 + \\ & + 2n_5y^3y^5 + 2n_6y^3y^6 + 2n_7y^3y^7 + 2n_8y^3y^8 + \\ & + 2k(y^5y^6 + y^7y^8) + 2ly^5y^7 + 2py^5y^8 + 2qy^6y^7 + \ldots, \end{aligned} \tag{22′}$$

unde am pus în evidență toți termenii care conțin numai variabilele $y^1, \ldots, y^8$.

Vom observa că cele două direcții imaginare nule corespund la rădăcini egale numai dacă avem în același timp

$$b = k \quad , \quad \gamma d = pq. \tag{23}$$

Așa fiind, să considerăm o transformare de variabile de forma

$$\begin{aligned} &y^1 = y'^1,\ y^3 = y'^3,\ y^5 = y'^5 + \rho y'^1 + \delta y'^3,\ y^7 = y'^7 + \alpha y'^1 + \beta y'^3 \\ &y^2 = y'^2 - \rho y'^6 - \alpha y'^8, y^4 = y'^4 - \delta y'^6 - \beta y'^8, y^6 = y'^6, y^8 = y'^8 \end{aligned} \tag{23'}$$

care păstrează atît forma canonică a lui φ :

$$\varphi = 2y^1 y^2 + 2y^3 y^4 + 2y^5 y^6 + 2y^7 y^8 + \varepsilon_k (y^k)^2 \ , \quad (k > 8, \varepsilon_k = \pm 1)$$

cît și forma (22′) a lui ψ, care se caracterizează prin faptul că

$$y^1 = y^3 = y^5 = y^7 = 0, \ \ y^k = 0$$

este o soluție a lui $\psi = 0$, cît și prin faptul că nu există în ψ termeni în $(y^1)^2$, $(y^3)^2$, $(y^5)^2$, $(y^7)^2$, și nici termeni în $y^2 y^5$, $y^4 y^5$, $y^2 y^7$, $y^4 y^7$.

Prin transformarea (23′) coeficienții m_6, m_8, n_6, n_8 se transformă după formulele

$$\begin{aligned} m'_6 &= m_6 + (k - b)\ \rho + q\alpha - d\delta, \\ m'_8 &= m_8 + p\rho + (k - b)\ \alpha - d\beta, \\ n'_6 &= n_6 - \gamma\rho + (k - b)\ \delta + q\beta, \\ n'_8 &= n_8 - \gamma\ \alpha + p\delta + (k - b)\ \beta. \end{aligned} \tag{24}$$

Să arătăm că dacă formulele (23) nu sînt verificate, deci dacă rădăcinile corespunzătoare la cele două grupe de variabile y^1, y^2, y^3, y^4 și y^5, y^6, y^7, y^8 nu sînt egale, putem anula m'_6, m'_8, n'_6, n'_8. În adevăr, determinantul M al membrilor al doilea ai ecuațiilor (24), considerate ecuații în necunoscutele ρ, α, δ, β, se scrie

$$M = \begin{vmatrix} k - b & q & -d & 0 \\ p & k - b & 0 & -d \\ -\gamma & 0 & k - b & q \\ 0 & -\gamma & p & k - b \end{vmatrix} \tag{25}$$

și rezultă formula

$$M = (k - b)^4 - 2\ (\gamma d + pq)\ (k - b)^2 + (pq - \gamma d)^2. \tag{26}$$

Ținînd seamă că γd și pq sînt negativi, M este mereu pozitiv și nu se anulează decît dacă formulele (23) sînt verificate. Cum aceasta nu are loc în cazul rădăcinilor distincte, rezultă că putem presupune m_6, m_8, n_6, n_8 egali cu zero.

Să considerăm atunci transformarea de variabile

$$\begin{aligned} &y^1 = y'^1,\ y^3 = y'^3,\ y^5 = y'^5,\ y^7 = y'^7,\\ &y^2 = y'^2 - hy'^5 - gy'^7,\ y^4 = g'^4 - uy'^5 - vy'^7,\\ &y^6 = y'^6 + hy'^5 + uy'^3, y^8 = y'^8 + gy'^1 + vy'^3. \end{aligned} \tag{27}$$

Această transformare păstrează forma φ precum și forma (22′) cu m_6, m_8, n_6, n_8 nuli.

Coeficienții m'_5, m'_7, n'_5, n'_7 se transformă după formulele

$$\begin{aligned} m'_5 &= m_5 + (k - b)\,h + pg - du,\\ m'_7 &= m_7 + qh + (k - b)g - dv,\\ n'_5 &= n_5 + \gamma\, h + (k - b)\,u + pv,\\ n'_7 &= n_7 - \gamma g + qu + (k - b)v. \end{aligned} \tag{28}$$

Considerînd aceste ecuații, ca ecuații liniare în necunoscutele h, g, u, v, ele au ca determinant determinantul M în care se schimbă p cu q. Această schimbare nu modifică însă valoarea determinantului M dată de formula (26), valoare care am văzut că este diferită de zero dacă ecuațiile (23) nu sînt verificate. Deci putem anula m'_5, m'_7, n'_5, n'_7. Avem deci următoarea teoremă:

Putem separa variabilele în două grupe

$$y^1,\ y^2,\ y^3,\ y^4;\ y^5,\ y^6,\ y^7,\ y^8$$

referitoare la două direcții caracteristice imaginare nule, dacă rădăcinile corespunzătoare nu sînt egale.

Ținînd seamă că aceeași proprietate are loc pentru direcțiile caracteristice nule reale, rezultă că în forma ψ putem separa variabilele în grupe de o variabilă canonică a formei φ, dacă rădăcina este reală și nu corespunde la o direcție nulă, în grupe de două variabile canonice ale lui φ, una pozitivă și una negativă, dacă rădăcina este imaginară și nu corespunde la o direcție nulă, în grupe de $2s$ variabile corespunzătoare la o direcție nulă legată de o rădăcină reală multiplă de ordinul $2s$ în care sînt s variabile canonice pozitive ale lui φ și s variabile canonice negative și în grupe de $4r$ variabile, dacă direcția caracteristică este o direcție nulă imaginară referitoare la rădăcini imaginare multiple de ordinul $2r$, numărul variabilelor canonice pozitive și negative fiind respectiv $2r$.

Ținînd seamă că în cazul rădăcinilor imaginare, variabilele canonice se prezintă în grupe de un număr egal de variabile canonice pozitive și negative, rezultă următoarea teoremă:

Numărul rădăcinilor imaginare ale ecuației caracteristice (2) *este cel mult* 2 $(n - p)$.

Mai observăm că în cazul cînd condițiile (23) sînt verificate, ecuațiile (24) permit să anulăm n'_6, n'_8, în timp ce ecuațiile (28) permit să anulăm m'_7, n'_7, deci putem anula patru din cantitățile m_i, n_i, $(i = 5, 6, 7, 8)$.

Rezultă de asemenea că o direcție caracteristică nulă introduce în matricea determinantului caracteristic un număr de determinanți principali de ordinul doi sau patru cu valori egale după cum direcția este reală sau imaginară și așa fel ca elementele matricei la stînga acestor determinanți sînt toate nule. În ce privește elementele la dreapta, unele din aceste elemente pot fi, în parte sau în total reduse la zero.

Astfel, în cazul direcției caracteristice reale de ordinul doi, avem ca matrice asociată în cazul (8) al formei ψ :

$$\left\| \begin{matrix} 0 & b & 0 & d \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & b \\ d & 0 & b & 0 \end{matrix} \right\| . \tag{29}$$

În ultimul caz (8′) avem de exemplu

$$\left\| \begin{matrix} \pm 1 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{matrix} \right\| . \tag{29′}$$

Observăm însă că determinanții principali au valori egale, însă nu au toate elementele egale.

De asemenea, în cazul direcțiilor caracteristice imaginare de ordinul $4s$, $(s \geqslant 2)$, determinanții principali de ordinul 4 au valori egale, însă nu au în general toate elementele egale.

ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ДВУХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается приведение к каноническому виду двух квадратичных форм φ и ψ с действительными переменными и коэффициентами, ни одна из которых не является положительно или отрицательно определенной. Показывается, что приведение к каноническому виду зависит от корней характеристического уравнения $|\psi - \rho\varphi| = 0$, сопоставляемого этой паре квадратичных форм, и от того, приводят ли эти корни к нулевым характеристическим направлениям. Показывается, что последняя возможность может иметь место только если характеристическое уравнение обладает кратными корнями. Если это уравнение имеет действительный корень, которому соответствует

нулевое характеристическое направление, то можно в φ и ψ выделить $2s$ переменных , тогда как если характеристическое уравнение имеет мнимый корень, которому соответствует нулевое характеристическое направление, то можно в φ и ψ выделить $4r$ переменных.

RÉDUCTION À UNE FORME CANONIQUE DE DEUX FORMES QUADRATIQUES

RÉSUMÉ

On considère la réduction à la forme canonique de deux formes quadratiques φ et ψ à variables et coefficients réels, dont aucune n'est définie positive ou négative. On montre que la réduction à la forme canonique dépend des racines de l'équation caractéristique $|\psi - \rho\varphi| = 0$ associée aux deux formes quadratiques et du fait si ces racines conduisent à des directions caractéristiques nulles ou non. On montre que la première éventualité peut se produire seulement si l'équation caractéristique a des racines multiples. Si cette équation a une racine réelle à laquelle correspond une direction caractéristique nulle, on peut séparer en φ et ψ un nombre $2s$ de variables, tandis que si l'équation caractéristique possède une racine imaginaire à laquelle correspond une direction caractéristique nulle, on peut séparer en φ et ψ un nombre $4r$ de variables.

BIBLIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Reducerea la forma canonică a unei forme pătratice prin transformări hiperbolice.* Analele ştiinţifice ale Univ. „C. I. Parhon", *25*, 93–104 (1960).

CERCETĂRI ASUPRA DETERMINĂRII CORECȚIILOR DE COMPRESIBILITATE LA MIȘCĂRI PLANE ÎN REGIM SUBSONIC [1)]

DE

SIMONA POPP

INTRODUCERE

Studiul mișcării fluidelor compresibile a luat un mare avînt în urma cercetărilor profunde ale lui S. A. Ciaplîghin [1] efectuate în teza sa de doctorat, cercetări care au fost, apoi, făcute cunoscute și extinse, în primul rînd de către H. Villat precum și de D. Riabouchinsky [2], B. Demtchenko [3], [4] și C. Iacob [5], [6], [7], [8].

S. A. Ciaplîghin a dezvoltat, în memoriul său, două metode pentru studiul mișcării subsonice, plane, permanente, irotaționale a unui fluid perfect compresibil : o metodă riguroasă, bazată pe studiul ecuației lui Molenbroek [9] și o metodă aproximativă considerată pentru prima dată de autor în teza sa.

Ambele metode au condus, ulterior, la numeroase și importante cercetări.

În ceea ce privește metoda riguroasă, citățm lucrările lui C. Iacob [10], C. Ferrari [11], F. Ringleb [12], N. A. Slioskin [13]. Unele aplicații au fost efectuate și de S. Popp [14], [15]. Studii mai recente, referitoare la mișcările supersonice, au fost făcute de V.S. Tatarencic [16], H. Krafft - Q. Dibble [17], F. I. Frankl [18], H. S. Tsien-Y. H. Kuo [19], Th. Theodorsen [20], S. D. Daymond [21], M. Y. Lighthill [22], T. M. Cherry [23], [24], H. Seifert [25].

Metoda de aproximație a dat loc, de asemenea, la o serie de lucrări începînd cu acelea ale lui D. Riabouchinsky [26], B. Demt-

---

[1)] Dizertație de candidat în științe fizico-matematice susținută în ziua de 20 iunie 1960 la Facultatea de matematică și fizică a Universității „C. I. Parhon" din București.

chenko [4], N. A. Slioskin [27], A. Busemann [28], continuînd cu cele trei memorii dezvoltate, apărute aproape simultan, în 1939, ale lui B. Demtchenko [29], C. Iacob [30], H. S. Tsien [31], urmate, apoi, de studiile făcute de Th. von Kármán [32], Ko. Tamada [33], I. Imai [34] și de extinderile date de J. Pérès [35], Chin-Shin-Ken [36] C. Iacob [37], L. I. Sedov [38], A. I. Bunimovici [39], G. A. Dombrovski [40], [41], [42], [43], I. Filimon [44], [45], [46].

Dar, deoarece metodele riguroase conduc la calcule foarte complicate, care nu se pot aplica decît în anumite cazuri particulare iar metoda de aproximație a lui Ciaplîghin, împreună cu variantele ei, este o metodă hodografică prin care trecerea la planul fizic — planul mișcării — se efectuează ulterior, s-a ivit necesitatea de a se recurge și la metode de aproximație directe în care se folosesc ca variabile coordonatele x și y din planul mișcării.

Dintre aceste metode de aproximare directe citățm, în primul rînd, metoda lui O. Janzen [47] — Rayleigh [48] care a fost aplicată la studiul mișcării unui fluid compresibil, subsonic, în jurul unui obstacol circular, în absența circulației.

Cazul în care se admite și existența circulației a fost studiat de H. Lamb [49] și E. Pistolesi [50].

Aceeași problemă, referitoare la obstacolul circular, cînd nu există circulație, a fost reluată de I. Imai [51] care a folosit în tratare coordonatele polare.

De asemenea, E. Lamla [52] a utilizat metoda O. Janzen — Rayleigh pentru cazul mai general al mișcării unui fluid într-un canal cu pereții rectilinii paraleli în prezența unui obstacol cvasicircular.

Această problemă a mai fost tratată și de Z. Hasimoto [53] cu metoda lui I. Imai precum și de S. Popp [54] cu metoda de aproximație hodografică a lui S. A. Ciaplîghin sub trei variante.

O variantă a metodei de aproximație a lui Janzen-Rayleigh a fost dată de L. Poggi [55] în 1932, pe care a aplicat-o la cazul obstacolului circular.

În 1934, L. Poggi și apoi C. Kaplan [56] au întrebuințat aceeași metodă, la studiul mișcării în jurul profilelor Jucovski simetrice.

Totodată C. Kaplan a considerat cazul obstacolului eliptic și a calculat, în a treia aproximație, distribuția de viteze în mișcarea în jurul unui obstacol circular. Aceste calcule au fost reluate de I. Imai, Ko Tamada și Y. Saito care au arătat că dezvoltările făcute de I. Imai în lucrarea citată [51] erau cele juste.

O altă variantă a metodei lui Janzen-Rayleigh constă în dezvoltarea calculelor pe baza schimbării de variabile $z = x + iy$ $\bar{z} = x - iy$ și a schimbării de funcție $f = \varphi + i\,\psi$, $\overline{f} = \varphi - i\psi$ (schimbări care au fost, de altfel, considerate de către Poggi în 1932).

Această metodă a fost folosită de E. Lamla [57] la studiul mișcării unui fluid compresibil, subsonic, limitat de două linii libere, în prezența unui obstacol circular.

Reluînd metoda lui E. Lamla și aducîndu-i anumite completări și modificări, C. I a c o b [58], [59], [60] o aplică la problema simetrică a lui Kirchhoff pentru cazul fluidului compresibil subsonic.

Alături de metodele citate, tot ca metodă de aproximare directă se utilizează și metoda de liniarizare a lui G l a u e r t [61] și P r a n d t l [62] întrebuințată, în special, la studiul mișcărilor care diferă puțin de o translație.

După cum am mai arătat, toate metodele de aproximare directă prezintă avantajul, față de metodele hodografice, de a păstra pereții solizi din planul fizic, dînd astfel posibilitatea de a se urmări cu ușurință efectul de compresibilitate.

În lucrarea de față se adaptează metoda de aproximație Imai-Lamla- Iacob la studiul unor probleme Helmholtz în fluid compresibil, subsonic nelimitat.

În primul capitol se face o scurtă expunere a metodei Imai-Lamla-Iacob, scoțînd în evidență, în special, modul în care se pun condițiile la limită precum și studiul făcut de C. I a c o b [60] asupra desprinderii liniilor libere de pereți.

Aceste considerații se adaptează, apoi, la cazul problemei Helmholtz în fluid nelimitat pentru placa normală pe direcția curentului la infinit și se arată că rezolvarea problemei la limită de tip mixt care apare se poate reduce, în acest caz, la integrarea unei ecuații diferențiale.

De asemenea, se determină, în virtutea condițiilor de desprindere ale liniilor libere de extremitățile plăcii, toate constantele care intervin, se studiază distribuția vitezelor pe obstacol și se calculează presiunea curentului asupra plăcii dîndu-se expresia coeficientului de rezistență.

Capitolul doi cuprinde studiul cazului mai general al diedrului simetric în fluid nelimitat. Prin considerații analoage cu cele făcute în primul capitol se obțin elementele mișcării, rezultanta forțelor hidrodinamice care se exercită asupra obstacolului, precum și expresia coeficientului de rezistență.

În capitolul trei se tratează cazul nesimetric al problemei Helmholtz pentru placa înclinată față de direcția curentului la infinit cu un unghi oarecare și se ajunge la determinarea coeficientului de rezistență, formulă care generalizează pe cea corespunzătoare din primul capitol.

Așadar, metoda folosită pentru tratarea problemelor citate permite cercetarea directă a mișcărilor considerate în fluid compresibil nelimitat chiar și în cazul, mai general, al diedrului și conduce la determinarea rezultantei forțelor hidrodinamice asupra obstacolelor, ceea ce constituie, de altfel, scopul principal al studiului fiecărui caz considerat.

Încheind această introducere, țin să exprim în mod deosebit, cele mai alese mulțumiri prof. C a i u s I a c o b, membru corespondent al Academiei R.P.R., pentru îndrumările prețioase acordate în cursul elaborării lucrării de față.

CAPITOLUL I

METODA DE APROXIMARE IMAI-LAMLA- IACOB

1. *Generalități.* Considerăm mișcarea subsonică, plană permanentă, irotațională a unui fluid compresibil supus legii adiabatice :

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \tag{1.1}$$

p și ρ fiind, respectiv, presiunea și masa specifică a fluidului, p_0 și ρ_0 aceleași mărimi în punctul de viteză nulă, iar γ raportul căldurilor specifice sub presiune sau volum constant. Presupunem, totodată, că mișcarea fluidului are loc în prezența unor pereți solizi, imobili $\mathfrak{S}$, de care se desprind linii libere λ.

Fie $\varphi\ (x,y)$ și $\psi\ (x,y)$ potențialul vitezelor, respectiv, funcția de curent, iar $u(x,y)$ și $v(x,y)$ proiecțiile vitezei $\overline{V}$ pe axele de coordonate Ox și Oy , ale unui sistem de referință, rectangular, fix, considerat în planul mișcării, axa Ox fiind paralelă și de același sens cu viteza curentului $\overline{U}$ de la infinit.

Luînd, împreună cu I. I m a i [51], T. A i h a r a [63] și E. L a m l a [57], ca variabile independente pe $z = x + iy$ și $\bar{z} = x - iy$, funcțiile $f = \varphi + i\,\psi$ și $\bar{f} = \varphi - i\,\psi$ pe care le considerăm în locul funcțiilor φ și ψ, devin funcții de z și $\bar{z}$.

În baza ipotezelor făcute, ținînd seama de ecuația de continuitate

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \tag{1.2}$$

putem scrie sistemul

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.3}$$

în virtutea căruia se obțin relațiile [60]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\rho}{\rho_0}\right)(u - iv),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)(u + iv) \\ &\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)(u - iv),\quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\rho}{\rho_0}\right)(u + iv) \end{aligned} \tag{1.4}$$

care conduc la

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{k}\,\frac{\partial \bar{f}}{\partial z},\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = k\,\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}, \tag{1.5}$$

unde

$$k = \frac{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}{1 + \frac{\rho}{\rho_0}}. \tag{1.6}$$

Se arată că [58] este suficient să reținem din (1.5), pentru înlocuirea sistemului (1.3), numai relația

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = k \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}. \tag{1.5'}$$

Dar, în virtutea ecuației lui Bernoulli

$$\frac{dp}{\rho} = -\frac{1}{2} d(V^2)$$

și a legii adiabatice (1.1), expresia lui ρ este de forma

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V^2}{c_0^2}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \tag{1.7}$$

c_0 fiind viteza de propagare a sunetului în fluidul în repaus, astfel încît, dacă introducem numărul lui Mach M_0, în curent neperturbat, definit de relația

$$M_0 = \frac{U}{c_0}, \tag{1.8}$$

expresia (1.6) a lui k, dezvoltată după puterile numărului Mach, devine

$$k = \frac{1}{4} M_0^2 \frac{V^2}{U^2} + O(M_0^4). \tag{1.6'}$$

Considerînd și dezvoltările

$$\begin{aligned} f(z, \bar{z}) &= f_0 + M_0^2 f_1 + M_0^4 f_2 + \dots \\ \bar{f}(z, \bar{z}) &= \bar{f}_0 + M_0^2 \bar{f}_1 + M_0^4 \bar{f}_2 + \dots \end{aligned} \tag{1.9}$$

prin înlocuirea acestora în (1.5'), avînd în vedere pe (1.6'), egalarea coeficienților aceleiași puteri ale lui M_0^2 conduce la relațiile

$$\begin{aligned} f_0 &= f_0(z) = \varphi_0(x, y) + i\psi_0(x, y) \\ f_1(z, \bar{z}) &= \varphi_1(x, y) + i\,\psi_1(x, y) = \\ &= \frac{1}{4U^2} \frac{df_0}{dz} \int_{z_0}^{z} \overline{\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2} dz + \frac{1}{4} g(z) \\ f_2(z, \bar{z}) &= \dots\dots\dots \end{aligned} \tag{1.10}$$

în care $f_0(z)$ și $g(z)$ sînt funcții analitice de z care vor fi determinate ulterior.

În considerațiile pe care le vom face, de acum înainte, ne vom mărgini la aproximația a doua.

Păstrînd, deci, în calcule, numai termenii în M_0^2:

$$f(z, \bar{z}) = f_0(z) + M_0^2 f_1(z, \bar{z}). \tag{1.11}$$

Totodată expresia vitezei complexe, dedusă din (1.4), va fi dată de relația

$$u - iv = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} =$$

$$= \frac{df_0}{dz} + \frac{1}{4} M_0^2 \left[\frac{1}{U^2} \frac{d^2 f_0}{dz^2} \overline{\int_{z_0}^{z} \left(\frac{df_0}{dz} \right)^2 dz} + \frac{1}{U^2} \left(\frac{df_0}{dz} \right)^2 \overline{\frac{df_0}{dz}} + \frac{dg}{dz} \right]. \tag{1.12}$$

2. *Condițiile la limită.* Metoda expusă a fost folosită, după cum am mai arătat, de E. L a m l a [57] și C. I a c o b [58] pentru studierea anumitor cazuri de mișcări fluide compresibile.

În cele ce urmează, ne propunem să adaptăm această metodă la studiul problemei lui Helmholtz în fluid compresibil, subsonic, nelimitat și să o aplicăm, apoi, la cîteva cazuri de mișcări clasice.

În acest scop [58], alegem funcția

$$f_0(z) = \varphi_0(x, y) + i\psi_0(x, y)$$

ca potențial complex al mișcării fluide incompresibile corespunzătoare la aceiași pereți ϖ și la aceeași viteză la infinit ca în mișcarea compresibilă.

Se știe că această funcție se poate determina cu metoda lui Levi-Cività [64] care revine la exprimarea funcției $f_0(z)$ cu ajutorul unei alte variabile ζ al cărei domeniu de variație se poate alege, de exemplu, un semicerc cu centrul în origine, de rază egală cu unitatea și cu diametrul pe axa reală, domeniile descrise de f_0 și ζ fiind în corespondență conformă.

Totodată, funcția $f_0(z)$ este o funcție analitică, regulată în toate punctele la distanță finită ale domeniului D_0 exterior conturului format de pereții ϖ și de liniile de curent $\lambda^{(0)}$, domeniu ocupat de fluidul incompresibil în mișcare și satisface la următoarele condiții la limită:

Pe pereții ϖ și pe liniile libere $\lambda^{(0)}$ care se detașează de aceștia

$$\mathcal{I}m\,[f_0(z)] = \psi_0 = q^{(0)} = \text{const.} \tag{1.13}$$

iar pe liniile libere $\lambda^{(0)}$, $V^{(0)2} = U^2$, $V^{(0)}$ fiind mărimea vitezei unei particule din fluidul incompresibil.

Pentru mișcarea fluidă compresibilă condițiile la limită sînt analoge.

Pe pereții ϖ și pe liniile libere corespunzătoare λ,

$$\mathcal{I}m\,[f(z, \bar{z})] = \psi = q = \text{const.}$$

și dacă notăm

$$\mathcal{I}m\ [f_1\ (z, \bar{z})] = q^{(1)} \tag{1.14}$$

rezultă din (1.11)

$$q = q^{(0)} + M_0^2\, q^{(1)}$$

deci

$$q^{(1)} = \text{const. pe } \mathfrak{w}. \tag{1.15}$$

De asemenea, pe liniile libere λ,

$$V^2 = U^2, \tag{1.16}$$

V fiind mărimea vitezei unei particule din fluidul compresibil.

Rezolvarea problemei referitoare la fluidul compresibil revine, așadar, la determinarea domeniului D limitat de aceiași pereți solizi $\mathfrak{w}$ și de liniile libere λ corespunzătoare, precum și a funcției $g(z)$, ținînd seama de condițiile la limită stabilite.

Pentru simplificarea calculelor introducem funcția $g_1(z)$ definită de relația

$$g_1(z) = g(z) + f_0(z). \tag{1.17}$$

Prin urmare $g_1(z)$ este o funcție analitică, regulată în domeniul D_0, exclusiv punctul de la infinit și satisface anumite condiții pe care le deducem din relațiile (1.14) și (1.16). Astfel, în virtutea relațiilor (1.10), (1.13) și (1.17), condiția (1.14) se scrie

$$\mathcal{I}m\ [g_1(z)] = -\frac{1}{U^2}\,\mathcal{I}m\left[\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\overline{\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z}\right] + q^{(0)} + 4q^{(1)}. \tag{1.14'}$$

Pentru a explica condiția (1.16) vom ține seamă de următoarele considerații făcute de C. I a c o b [60]:

Se alege o anumită lege după care se face să corespundă unui punct P_0 de afixă $z^{(0)} = x^{(0)} + iy^{(0)}$ de pe $\lambda^{(0)}$, un punct P de afixă $z = x + iy$ de pe λ.

Fie această lege:

$$\varphi(x, y) - \varphi_0(x^{(0)}, y^{(0)}) = \delta\varphi, \tag{1.18}$$

unde $\delta\varphi$ este o funcție de φ_0 care este singur variabil pe $\lambda^{(0)}$, după cum se constată din (1.13), avînd forma

$$\delta\varphi = M_0^2\,\Phi(\varphi_0) \tag{1.19}$$

Vom nota, pentru simplificare, $\varphi_0(P_0) = p^{(0)}$ și $\Phi(p^{(0)}) = p^{(1)}$.

În cazul configurației considerate, deoarece liniile libere $\lambda^{(0)}$ și λ ajung la infinit, rezultă că se poate lua corespondența

$$\varphi - \varphi(P) = \varphi_0 - \varphi_0(P_0) \tag{1.20}$$

deci

$$\delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \varphi(P) - p^{(0)} = M_0^2 p^{(1)} \tag{1.20'}$$

și cum pe $\lambda^{(0)}$ și pe λ, $\frac{d\varphi_0}{ds^{(0)}} = U$ și $\frac{d\varphi}{ds} = U$, relația (1.20) revine la asocierea punctelor de pe $\lambda^{(0)}$ și λ care au abscisele curbilinii $s^{(0)}$ și s egale, acestea fiind considerate, respectiv, de la punctele P_0 și P.

Scriind, apoi, relația de legătură între z și $z^{(0)}$ aparținînd liniilor libere λ și $\lambda^{(0)}$, respectiv, sub forma

$$z = z^{(0)} + M_0^2 z^{(1)} + \dots \tag{1.21}$$

în virtutea expresiei vitezei complexe (1.12), C. Iacob [60] obține, în definitiv, formula care exprimă viteza complexă pe λ sub forma

$$(u - iv)_\lambda = \left\{ \frac{df_0}{dz} + \frac{1}{4} M_0^2 \left[\frac{df_0}{dz} + \frac{dg}{dz} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (4\Phi(\varphi_0) + 4iq^{(1)} - g(z)) \frac{d}{d\varphi_0}\left(\frac{df_0}{dz}\right) \right] \right\}_{\lambda^{(0)}}. \tag{1.22}$$

Această formulă generalizează pe aceea dată de E. Lamla [57]. În consecință, se arată că [60] relația (1.16) revine la condiția

$$1 + \frac{dA}{d\varphi_0} + \frac{d\theta}{d\varphi_0}(4q^{(1)} - B) = 0 \quad \text{pe } \lambda^{(0)} \tag{1.23}$$

sau, trecînd la funcția $g_1(z)$,

$$\frac{dA_1}{d\varphi_0} = \frac{d\theta}{d\varphi_0}(B_1 - q^{(0)} - 4q^{(1)}) \text{ pe } \lambda^{(0)} \tag{1.24}$$

θ fiind unghiul pe care îl face vectorul viteză cu axa Ox în mișcarea incompresibilă.

Relațiile (1.14') și (1.24) alcătuiesc, astfel, condițiile la limită ale problemei.

Alături de aceste condiții se mai adaugă, după cum se va vedea, pentru determinarea constantelor care apar în rezolvarea acestei probleme, condițiile de desprindere ale liniilor libere λ de pereții $\mathfrak{W}$.

În ceea ce privește comportarea funcției $g_1(z)$ în punctul de la infinit al liniilor libere, din formula (1.12) deducem că

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{dg}{dz} = -U \tag{1.25}$$

deoarece

$$\lim_{|z| \to \infty} (u - iv) = U \quad \text{și} \quad \lim_{|z| \to \infty} \frac{df_0}{dz} = U.$$

Rezultă deci, pentru $g_1(z)$, condiția

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{dg_1}{dz} = 0. \tag{1.26}$$

3. *Problema Helmholtz pentru placa normală pe direcția curentului la infinit.* Pentru a ilustra considerațiile făcute, vom studia, ca un prim

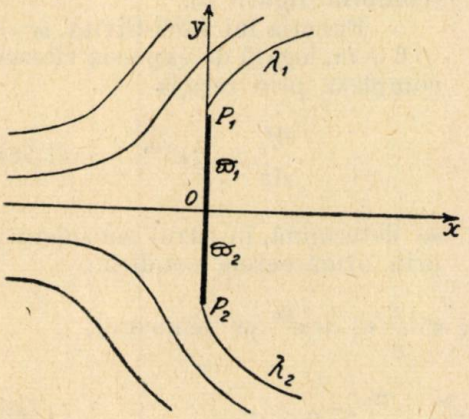


Fig. 1

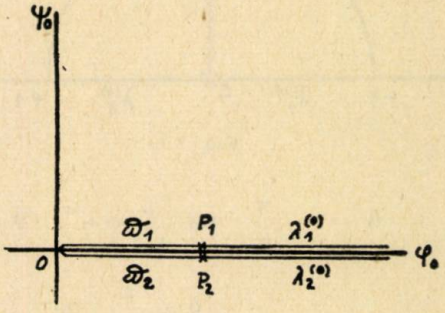


Fig. 2

exemplu concret, mișcarea unui curent fluid compresibil subsonic nelimitat în prezența unei plăci normale pe direcția curentului la infinit, caz de care ne-am ocupat, în parte, într-o lucrare anterioară [65].

Considerăm, în planul mișcării, un sistem de axe Ox, Oy rectangulare (Ox paralelă cu direcția curentului la infinit), placa fiind reprezentată, în plan, prin peretele solid ϖ format din segmentele ϖ_1 și ϖ_2 așezate pe axa Oy, simetric față de axa Ox, conform figurii 1.

De la extremitățile acestor pereți, P_1 și P_2, se detașează, respectiv, liniile de curent libere λ_1 și λ_2, punctul de bifurcare al curentului fiind punctul O.

Urmînd calea indicată în paragrafele anterioare, determinăm, în primul rînd, potențialul $f_0(z)$ al mișcării fluide incompresibile corespunzătoare acelorași pereți și aceleași viteze la infinit, prin metoda T. Levi-Civită-H. Villat.

Domeniul de variație a lui $f_0 = \varphi_0 + i\psi_0$ fiind întreg planul $O\varphi_0\ \psi_0$ cu o tăietură pe porțiunea pozitivă a axei reale, corespondența frontierelor fiind cea indicată în figura 2 se știe că [66] transformarea care realizează trecerea la semicercul lui Levi-Civită de rază egală cu unitatea din planul $\zeta = \xi + i\,\eta$ este dată de funcția

$$f_0 + \frac{a^2}{4}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2, \quad (a = \text{const.}). \tag{1.27}$$

Frontierele domeniilor din planele z și ζ se corespund astfel:

Semicercul corespunde pereților ϖ_1 și ϖ_2, iar diametrul situat pe axa reală $O\xi$ corespunde liniilor libere $\lambda_1^{(0)}$ și $\lambda_2^{(0)}$ care se desprind în punctele P_1 și P_2 de pereții ϖ_1 și ϖ_2 în mișcarea incompresibilă.

Punctul $\zeta = i$ corespunde originii O din planul z, iar originea O din planul ζ corespunde punctului de la infinit din planul mișcării (conform figurii 3).

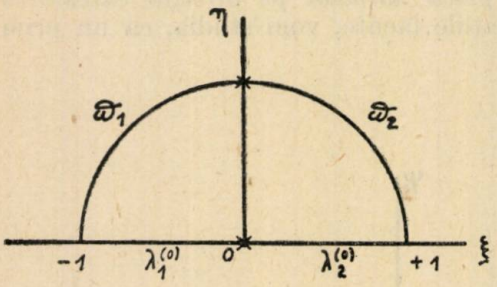


Fig. 3

Funcția lui Levi-Civită $\omega = \theta + i\tau$, legată de expresia vitezei complexe prin relația

$$\frac{df_0}{dz} = Ue^{-i\omega} \tag{1.28}$$

se determină, în cazul considerat, prin următoarele condiții:

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{pe} \quad \zeta = e^{i\sigma}, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{\pi}{2} \; (\zeta = e^{i\sigma} \text{ pe semicerc}),$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{pe} \quad \zeta = e^{i\sigma}, \quad \frac{\pi}{2} < \sigma \leqslant \pi, \tag{1.29}$$

$$\tau = 0 \quad \text{pe} \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad \eta = 0,$$

care conduc [66] la expresia

$$\omega(\zeta) = -\pi + i \lg \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \tag{1.30}$$

logaritmul fiind egal cu $-i\pi$ pentru $\zeta = 0$.

4. *Condițiile la limită.* Condițiile la limită (1.14′) și (1.24) devin în planul ζ, după cum se poate constata ușor,

$$\mathcal{I}m\,[g_1(\zeta)] = -\frac{1}{U^2}\mathcal{I}m\left[\frac{df_0}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}\overline{\int_{\zeta_0}^{\zeta}\left(\frac{df_0}{d\zeta}\right)^2\frac{d\zeta}{dz}d\zeta}\right] + \tag{1.14″}$$

$$+ q^{(0)} + 4q^{(1)} \text{ pe semicerc}$$

și

$$\frac{dA_1}{d\xi} = \frac{d\theta}{d\xi}(B_1 - q^{(0)} - 4q^{(1)}) \text{ pe } -1 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad \eta = 0. \tag{1.24′}$$

În cazul problemei de față, aceste condiții capătă o formă mai simplă, deoarece, este firesc să luăm, atît pe perete cît și pe liniile libere, în mișcarea incompresibilă precum și în cea compresibilă

$$\psi_0 = q^{(0)} = 0 \text{ și } \psi = q = 0. \tag{1.31}$$

Prin urmare, ținînd seama de legătura dintre q și $q^{(0)}$ rezultă din (1.31)

$$q^{(1)} = 0. \tag{1.32}$$

Se observă, de asemenea, că

$$\mathcal{I}m\left[\frac{df_0}{dz}\overline{\int_0^z\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz}\right] = 0 \text{ pe placă}$$

luînd limita inferioară a integralei $z_0 = 0$.

Într-adevăr, din relațiile (1.27), (1.28) și (1.30) deducem

$$\int_0^z\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz = U\int_i^\zeta e^{-i\omega(\zeta)}\, df_0 = -\frac{1}{2}a^2 U\int_i^\zeta\left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i}\right)\left(\zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

integrala fiind convergentă pentru $\zeta = i$.

Pe de altă parte, considerînd un punct z_1 pe peretele $\overline{\omega}_1$

$$\mathcal{I}m\left[\frac{df_0}{dz}\overline{\int_0^z\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz}\right]_{z_1} = \mathcal{I}m\left[Ue^{-i\left(\frac{\pi}{2}+i\tau\right)}\int_0^{\varphi_0} Ue^{+i\left(\frac{\pi}{2}-i\tau\right)} d\varphi_0\right] = 0$$

o relație analogă fiind valabilă și pentru punctele peretelui $\overline{\omega}_2$.

În virtutea acestor observații, din condițiile (1.14″) și (1.24′) obținem următoarele condiții la limită pentru problema considerată:

$$B_1 = 0 \quad \text{pe} \quad \zeta = e^{i\sigma} \quad , \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant \pi \tag{1.33}$$

și

$$\frac{dA_1}{d\xi} = \frac{d\theta}{d\xi} B_1 \quad \text{pe} \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad \eta = 0. \tag{1.34}$$

Vom avea deci de rezolvat o problemă la limită de tip mixt, care revine, după cum se va vedea din cele ce urmează, la integrarea unei ecuații diferențiale.

5. *Determinarea funcției* $g_1(\zeta)$. După cum am mai arătat, în cele ce precedă, determinarea funcției $g_1(\zeta)$ se face pe baza condițiilor la limită stabilite (1.33) și (1.34) ținînd seama și de comportarea la infinit a acestei funcții.

În virtutea relațiilor (1.29) și (1.33) putem scrie, pe semicerc:

$$\frac{\dfrac{dg_1}{d\zeta}}{\dfrac{d\omega}{d\zeta}} = \frac{\dfrac{dB_1}{d\sigma} - i\dfrac{dA_1}{d\sigma}}{\dfrac{d\tau}{d\sigma} - i\dfrac{d\theta}{d\sigma}} = -i\frac{\dfrac{dA_1}{d\sigma}}{\dfrac{d\tau}{d\sigma}}$$

și deci, avînd în vedere iarăși (pe 1.33),

$$\mathcal{R}e\left[\frac{\dfrac{dg_1}{d\zeta}}{\dfrac{d\omega}{d\zeta}} + ig_1(\zeta)\right] = 0 \quad \text{pe} \quad \zeta = e^{i\sigma}, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant \pi. \tag{1.35}$$

De asemenea, pe diametrul real, unde $\tau = 0$, va fi satisfăcută relația

$$\mathcal{R}e\left[\frac{\frac{dg_1}{d\zeta}}{\frac{d\omega}{d\zeta}}\right] = \frac{\frac{dA_1}{d\xi}}{\frac{d\theta}{d\xi}}$$

sau, conform condiției (1.34),

$$\mathcal{R}e\left[\frac{\frac{dg_1}{d\zeta}}{\frac{d\omega}{d\theta}} + ig_1(\zeta)\right] = 0 \quad \text{pe} -1 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad \eta = 0. \tag{1.36}$$

Funcția din paranteza, (1.36) este analitică, regulată în semicerc, continuă pe contur, în afara punctului $\zeta = 0$, corespunzător punctului de la infinit, unde vom arăta că această funcție posedă un pol de ordinul doi și o singularitate logaritmică.

Într-adevăr, din condiția la infinit (1.25) obținem

$$\left(\frac{dg}{dz}\right)_\infty = \left(\frac{dg}{d\zeta}\right)\cdot\left(\frac{d\zeta}{dz}\right) = -U$$

de unde

$$\frac{dg}{d\zeta} = -U\frac{dz}{d\zeta}. \tag{1.37}$$

Se impune deci să studiem comportarea lui $\frac{dz}{d\zeta}$ în punctul $\zeta = 0$.

Relația (1.28) ne dă

$$dz = \frac{1}{U}\,df_0\, e^{i\omega(\zeta)} \tag{1.38}$$

și cum expresia lui df_0 dedusă din (1.27) este

$$df_0 = \frac{a^2}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta^3}\right)d\zeta$$

rezultă pentru $\frac{dz}{d\zeta}$ următoarea dezvoltare după puterile lui ζ:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{U}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta^3}\right)\left\{e^{i\omega(0)} + i\,\omega'(0)\,e^{i\omega(0)}\,\zeta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!}\left[-\omega'^2(0) + i\omega''(0)\right]e^{i\omega(0)}\zeta^2 + \ldots.\right\}$$

Dar, deoarece $\omega(0) = 0$, ținînd seama de valoarea aleasă pentru logaritm în punctul $\zeta = 0$, în expresia lui $\omega(\zeta)$, (1.30), putem scrie, făcînd calculele,

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{U}\frac{1}{\zeta^3} - \frac{1}{2}\frac{ia^2\omega'(0)}{U}\frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{4}\frac{a^2}{U}[-\omega'^2(0) + i\omega''(0)]\frac{1}{\zeta} + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots$$

a_1, a_2 etc. fiind coeficienți constanți care apar în dezvoltare.

Prin urmare, din (1.37) rezultă

$$\frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{2}\frac{a^2}{\zeta^3} + \frac{1}{2}\frac{ia^2\omega'(0)}{\zeta^2} + \frac{1}{4}a^2[-\omega'^2(0) + i\omega''(0)]\frac{1}{\zeta} - a_1U\zeta - a_2U\zeta^2\dots \tag{1.39}$$

Pe de altă parte, trecînd la funcța $g_1(\zeta)$ avem

$$\frac{dg_1}{d\zeta} = \frac{dg}{d\zeta} + \frac{df_0}{d\zeta} \tag{1.40}$$

și cum $\frac{df_0}{d\zeta}$ se comportă în punctul $\zeta = 0$ ca $-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\zeta^3}$, rezultă că, în virtutea relațiilor (1.39) și (1.40), $\frac{dg_1}{d\zeta}$ va avea în acest punct un pol de ordinul doi.

Așadar funcția $\dfrac{\dfrac{dg_1}{d\zeta}}{\dfrac{d\omega}{d\zeta}} + ig_1(\zeta)$ are în punctul $\zeta = 0$ un pol de ordinul doi și o singularitate logaritmică.

Deci, dacă scădem din funcția considerată în parantezele (1.35) și (1.36) funcția $iC_2\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2$, care este analitică, regulată în semicerc, cu partea reală nulă pe contur (C_2 fiind o constantă reală), și care are în punctul $\zeta = 0$ un pol de ordinul doi, deducem, în virtutea relațiilor (1.35) și (1.36),

$$\frac{\dfrac{dg_1}{d\zeta}}{\dfrac{d\omega}{d\zeta}} + ig_1(\zeta) = i\left[C_1 + C_2\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2\right],$$

C_1 fiind tot o constantă reală.

Astfel, determinarea funcției $g_1(\zeta)$ revine la integrarea ecuației diferențiale

$$\frac{dg_1}{d\zeta} + ig_1(\zeta)\frac{d\omega}{d\zeta} = i\frac{d\omega}{d\zeta}\left[C_1 + C_2\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2\right] \tag{1.41}$$

a cărei soluție este

$$g_1(\zeta) = C_1 + C_3 e^{-i\omega(\zeta)} - 2iC_2 e^{-i\omega(\zeta)}\int_i^{\zeta} e^{i\omega(\zeta)}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{1.42}$$

C_3 fiind o constantă de integrare.

Funcția $g_1(\zeta)$ găsită trebuie să verifice, efectiv, condițiile la limită (1.33) și (1.34).

În plus, datorită simetriei mișcării față de axa Ox, $B_1 = 0$ pe $\xi = 0$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, de unde rezultă că C_3 trebuie să fie o constantă reală.

În consecință, condiția la limită (1.33) conduce la $C_3 = 0$, după cum se constată din relația

$$\mathcal{I}m\left[C_1 + C_3 e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{\tau} - 2iC_2 e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{\tau}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} 2ie^{i\frac{\pi}{2}} e^{-\tau}\cos\sigma\, d\sigma\right] = 0$$

obținută din (1.42), valabilă pentru punctele lui $\bar{\omega}_1$.

O relație analogă se poate scrie și pentru $\bar{\omega}_2$.

Condiția (1.34) se verifică, de la sine, imediat.

6. *Determinarea constantelor C_1 și C_2. Condițiile de detașare în cazul general.* Pentru determinarea parametrilor care intervin în studiul mișcărilor compresibile subsonice cu linii de discontinuitate pentru viteze, se impune, după cum a arătat C. Iacob [58], [60], un studiu mai adînc al modului de desprindere al liniilor libere λ de pereții $\bar{\omega}$ atît în mișcarea compresibilă cît și în mișcarea incompresibilă.

Astfel, în lungul unei linii λ, în virtutea relației (1.21) și a legii de corespondență (1.18), care se mai poate scrie

$$\mathcal{R}e[f_0(z) + M_0^2 f_1(z, \bar{z})]_{\lambda} = \mathcal{R}e\,[f_0(z)]_{\lambda^{(0)}} + M_0^2\Phi(\varphi_0)$$

se deduce [60]:

$$z^{(1)} = \frac{e^{i\theta}}{U}[\Phi(\varphi_0) + iq^{(1)} - f_1(z^{(0)}, \bar{z}^{(0)})] \tag{1.43}$$

ținînd seamă că

$$\mathcal{I}m[f_0(z) + M_0^2 f_1(z, \bar{z})]_{\lambda} = \mathcal{I}m\,[f_0(z)]_{\lambda^{(0)}} + M_0^2 q^{(1)}.$$

De asemenea [60], notînd cu Θ unghiul pe care îl formează tangenta la linia λ în punctul z cu axa Ox și cu θ unghiul tangentei la $\lambda^{(0)}$ cu axa Ox, prin diferențierea relației (1.43) și din condiția (1.34) se obține

$$\Theta = \theta + \frac{1}{4}M_0^2\left[(4\Phi(\varphi_0) + \varphi_0 - A_1)\frac{d\theta}{d\varphi_0} - \frac{dB_1}{d\varphi_0}\right] + O(M_0^4) \text{ pe } \lambda. \tag{1.44}$$

Pentru deducerea condițiilor de detașare ale liniilor libere se disting două cazuri [60], după cum peretele $\mathfrak{S}$ este concav sau convex către curent.

a) În cazul pereților concavi, punctele de desprindere P_0 și P coincid, iar liniile libere λ, respectiv $\lambda^{(0)}$, se detașează tangențial de pereții $\mathfrak{S}$ în aceste puncte.

Deci dacă P coincide cu P_0, din (1.43) se deduce, făcînd $z^{(1)} = 0$, pentru $\varphi_0 = \varphi_0(P_0) = p^{(0)}$,

$$p^{(1)} + iq^{(1)} - [f_1(z, \bar{z})]_{P_0} = 0$$

care se reduce, în baza condiției la limită (1.14), la relația

$$p^{(1)} - \varphi_1(P_0) = 0. \tag{1.45}$$

Scriind, apoi, condiția ca λ și $\lambda^{(0)}$ să fie tangente în P_0, se obține din (1.44) făcînd pe φ_0 să tindă către $p^{(0)}$:

$$\lim_{\varphi_0 \to p^{(0)}} \left\{ [4\Phi(\varphi_0) + \varphi_0 - A_1] \frac{d\theta}{d\varphi_0} - \frac{dB_1}{d\varphi_0} \right\} = 0. \tag{1.46}$$

b) În cazul pereților convecși către curent, C. I a c o b dă în lucrarea citată [66], în urma unui studiu amănunțit, următoarele condiții de detașare în proră ale liniilor libere :

$$[p^{(0)} + 4\varphi_1(P_0) - A_1(P_0)] \left(\frac{d\theta}{d\varphi_0} \right)_{P_0} = \lim_{M \to P_0} \frac{dB_1}{d\varphi_0}$$

ceea ce impune ca limita membrului al doilea să existe și să fie finită precum și

$$\lim_{\varphi_0 \to p^{(0)}} \left[\frac{d^2 B_1}{d\varphi_0^2} - (4\Phi(\varphi_0) + \varphi_0 - A_1) \frac{d^2\theta}{d\varphi_0^2} \right] = \text{finit.} \tag{1.47}$$

7. *Condițiile de detașare în problema plăcii normale.* În cazul problemei considerate, putem lua $\Phi(\varphi_0) \equiv 0$, deci $p^{(1)} = 0$, încît relația (1.45) devine, în punctele P_1 și P_2,

$$\varphi_1(P_1) = 0 \quad \text{și} \quad \varphi_1(P_2) = 0 \tag{1.48}$$

ținînd seama și de simetria mișcării.

De asemenea, condiția (1.46) se va scrie

$$\lim_{\varphi_0 \to p^{(0)}} \left\{ (\varphi_0 - A_1) \frac{d\theta}{d\varphi_0} - \frac{dB_1}{d\varphi_0} \right\} = 0$$

sau, trecînd la planul ζ,

$$\lim_{\zeta \to -1} \left\{ \frac{dB_1}{d\xi} + \frac{d\theta}{d\xi} (A_1 - \varphi_0) \right\} = 0 \text{ pentru } \eta = 0$$

care este echivalentă cu

$$\mathcal{I}m\left\{\frac{\dfrac{dg_1}{d\zeta}}{\dfrac{d\omega}{d\zeta}}+i\,[g_1(\zeta)-f_0(\zeta)]\right\}_{\zeta=-1}=0. \tag{1.49}$$

Explicitînd condițiile (1.48) și (1.49) obținem două relații din care vom determina constantele C_1 și C_2.

Astfel, relațiile (1.48) care se reduc de fapt la una dintre ele, datorită simetriei, ne dau, în virtutea expresiei (1.10) a lui $f_1(z,\bar{z})$,

$$\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{4U^2}\frac{df_0}{dz}\overline{\int_0^{z_{P_1}}\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz}+\frac{1}{4}\,[g_1(z)-f_0(z)]\right\}_{P_1}=0$$

ceea ce se mai poate scrie, avînd în vedere pe (1.28), (1.29) și (1.42),

$$\frac{1}{U}\int_0^{z_{P_1}} V^{(0)^2}\,dy+C_1+4C_2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\tau}\cos\sigma\,d\sigma-a^2=0. \tag{1.48'}$$

Totodată, condiția (1.49) devine, în baza relației (1.41) și a valorii lui $f_0(\zeta)$ în punctul $\zeta=-1$:

$$\left[C_1+C_2\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)^2\right]_{\zeta=-1}=a^2$$

sau

$$C_1+4C_2=a^2. \tag{1.49'}$$

Să calculăm, acum, cele două integrale din (1.48').

Din expresia (1.30) a lui $\omega(\zeta)$ deducem pe τ, făcînd $\zeta=e^{i\sigma}$ pe semicircumferință și luînd $\mathcal{I}m\,[\omega(\zeta)]$.

Găsim astfel

$$\tau=\lg\frac{|\cos\sigma|}{1+\sin\sigma} \tag{1.50}$$

de unde

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\tau}\cos\sigma\,d\sigma=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\sin\sigma)\,d\sigma=-\frac{\pi+2}{2}\cdot \tag{1.51}$$

Cealaltă integrală din (1.48') se calculează, de exemplu, folosind expresia presiunii pe placă în mișcarea fluidă incompresibilă.

Se știe că [66]:

$$R_x^{(0)}-iR_y^{(0)}=-i\int_{\overline{\omega}}(p-p_0)\,d\bar{z}, \tag{1.52}$$

$R_x^{(0)}$ și $R_y^{(0)}$ fiind componentele pe axele Ox și Oy ale rezultantei forțelor hidrodinamice care se exercită asupra plăcii.

Pe de altă parte, din ecuația lui Bernoulli se deduce următoarea expresie a presiunii :

$$p - p_0 = \frac{\rho_0}{2}(U^2 - V^{(0)^2})$$

care înlocuită în (1.52) ne dă

$$R_x^{(0)} - iR_y^{(0)} = \rho_0\left[U^2 l - \int_0^{P_1} V^{(0)^2}\mathrm{d}y\right], \quad (P_1P_2 = 2\,l).$$

Și cum

$$R_x^{(0)} - iR_y^{(0)} = 2\rho_0 l U^2 \frac{\pi}{\pi+4} \tag{1.52'}$$

rezultă

$$\int_0^{y_{P_1}} V^{(0)^2}\mathrm{d}y = \frac{4-\pi}{4+\pi} l U^2 = \frac{4-\pi}{2} a^2 U \tag{1.53}$$

deoarece [64]

$$a^2 = \frac{2}{4+\pi} lU. \tag{1.54}$$

Introducînd rezultatele din (1.51) și (1.53) în (1.48') obținem

$$C_1 - 2C_2(\pi+2) + \frac{4-\pi}{2} a^2 = a^2. \tag{1.55}$$

Din această relație și (1.49') determinăm constantele căutate C_1 și C_2 sub forma

$$C_1 = \frac{2\pi}{4+\pi} a^2 \quad \text{și} \quad C_2 = \frac{4-\pi}{4(4+\pi)} a^2. \tag{1.56}$$

Expresiile acestor constante se mai pot scrie, ținînd seamă de (1.54), și astfel :

$$C_1 = \frac{4\pi}{(4+\pi)^2} lU \quad \text{și} \quad C_2 = \frac{4-\pi}{2(4+\pi)^2} lU. \tag{1.56'}$$

O dată găsite aceste constante, rezultă că funcția $f(z, \bar{z})$ este complet determinată, încît vom putea calcula elementele care ne interesează în mișcarea compresibilă.

8. *Distribuția vitezelor pe placă.* Pentru a obține distribuția vitezelor pe placă ne referim la expresia vitezei complexe (1.12), care împreună cu expresia complex conjugată acesteia ne dă

$$V^2 = u^2 + v^2 = \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\overline{\mathrm{d}f_0}}{\mathrm{d}z} + \frac{M_0^2}{4U^2}\left\{\frac{\mathrm{d}^2 f_0}{\mathrm{d}z^2}\frac{\overline{\mathrm{d}f_0}}{\mathrm{d}z}\overline{\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z} + \right.$$

$$\left. + \frac{\overline{\mathrm{d}^2 f_0}}{\mathrm{d}z^2}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z + 2\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2\left(\frac{\overline{\mathrm{d}f_0}}{\mathrm{d}z}\right)^2 + U^2\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\frac{\overline{\mathrm{d}g}}{\mathrm{d}z} + \frac{\overline{\mathrm{d}f_0}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\right)\right\}. \tag{1.57}$$

Să explicităm termenii care figurează în această formulă, făcînd calculul pentru determinarea vitezei pe peretele ϖ_1. Rezultatele găsite vor fi valabile și pentru peretele ϖ_2, datorită simetriei.

În primul rînd,

$$\frac{df_0}{dz} \cdot \overline{\frac{df_0}{dz}} = V^{(0)^2}. \tag{1.58}$$

Apoi, din (1.28) obținem

$$\frac{df_0}{dz} = Ue^{-i\omega} = -iUe^{\tau} \quad \text{și} \quad \overline{\frac{df_0}{dz}} = iUe^{\tau} \tag{1.59}$$

deoarece pe ϖ_1 în virtutea relațiilor (1.29) avem

$$\omega = \theta + i\tau = \frac{\pi}{2} + i\tau.$$

Pe de altă parte,

$$\frac{d^2 f_0}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{df_0}{dz}\right) = \frac{d}{dz}(Ue^{-i\omega}) = -Ue^{\tau}\frac{d\tau}{dy}, \tag{1.60}$$

peretele ϖ_1 fiind un segment pe axa Oy.

Pentru calculul lui $\frac{dg}{dz}$ ne referim la expresia funcției $g_1(\zeta)$ dedusă din (1.42) pentru $\zeta = e^{i\sigma}$:

$$g_1(\sigma) = C_1 + 4C_2 e^{\tau}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} e^{-\tau}\cos\sigma\, d\sigma = C_1 - 4C_2 e^{\tau}\left(\sigma - \cos\sigma - \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.61}$$

care conduce la

$$\frac{dg_1}{dy} = 4C_2 e^{\tau}\left[\left(\cos\sigma - \sigma + \frac{\pi}{2}\right)\frac{d\tau}{dy} - (1+\sin\sigma)\frac{d\sigma}{dy}\right]. \tag{1.62}$$

Dar, $\frac{d\sigma}{dy}$ și $\frac{d\tau}{dy}$ au următoarele expresii:

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{U}{2a^2}\frac{1}{\sin\sigma(1+\sin\sigma)} \tag{1.63}$$

$$\frac{d\tau}{dy} = -\frac{U}{2a^2}\frac{1}{\cos\sigma\sin\sigma(1+\sin\sigma)}, \tag{1.64}$$

obținute din relațiile (1.38) și (1.50), ținînd seamă că pentru $\zeta = e^{i\sigma}$,

$$df_0 = -2a^2\sin\sigma\cos\sigma\, d\sigma. \tag{1.65}$$

Urmează că putem scrie relația (1.62) sub forma

$$\frac{dg_1}{dy} = \frac{2UC_2}{a^2}\frac{2\cos\sigma - \sigma + \frac{\pi}{2} + \cos\sigma\sin\sigma}{\sin\sigma(1+\sin\sigma)^2}. \tag{1.62'}$$

Revenind la expresia vitezei (1.57), prin înlocuirea termenilor calculați din (1.58), (1.59), (1.60), (1.63) și (1.64) deducem

$$V^2 = V^{(0)^2} + \frac{M_0^2}{2}\left\{2a^2 U e^{2\tau}\frac{d\tau}{dy}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} e^{2\tau}\sin\sigma\,(1+\sin\sigma)\,d\sigma + \frac{V^{(0)^4}}{U^2} + \right.$$

$$\left. + U e^{\tau}\left[\frac{dA_1}{dy} - \frac{d\varphi_0}{dy}\right]\right\}. \tag{1.66}$$

În definitiv, făcînd calculul obținem din (1.66), ținînd seamă de (1.62'),(1.64), (1.65) și de valoarea (1.50) a lui τ, următoarea expresie a vitezei pe peretele ϖ_1:

$$V^2 = V^{(0)^2} + \frac{M_0^2}{2} V^{(0)^2}\left[\frac{V^{(0)^2}}{U^2} - 1\right] -$$

$$- \frac{M_0^2 U^2}{4a^2}\left\{\frac{\cos\sigma}{\sin\sigma\,(1+\sin\sigma)^3}\left[2\,(4C_2 - a^2)\cos\sigma + (4C_2 + a^2)\left(\frac{\pi}{2} - \sigma + \sin\sigma\cos\sigma\right)\right]\right\}$$

care devine, introducînd valoarea constantei C_2 din (1.56),

$$V^2 = V^{(0)^2} + \frac{M_0^2}{2} V^{(0)^2}\left[\frac{V^{(0)^2}}{U^2} - 1\right] +$$

$$+ \frac{M^2 U^2}{4+\pi}\left[\frac{\cos\sigma\,(\pi\cos\sigma + 2\sigma - \pi - 2\sin\sigma\cos\sigma)}{\sin\sigma\,(1+\sin\sigma)^3}\right] \tag{1.67}$$

Observăm că numitorul ultimului termen din (1.67) se anulează pentru $\sigma = \pi$, valoare corespunzătoare extremității P_1, dar pentru aceeași valoare a lui σ se anulează și numărătorul.

Calculînd, se obține, în punctul P_1, valoarea vitezei $V^2 = U^2$, avînd în vedere că $V^{(0)^2} = U^2$ în acest punct.

Datorită simetriei, viteza pe peretele ϖ_2 are o expresie analoagă.

Totodată pentru $\sigma = \frac{\pi}{2}$, valoare corespunzătoare originii O, rezultă $V = 0$, așa cum era de așteptat.

9. *Calculul presiunii curentului asupra plăcii.* În cele ce urmează ne propunem să determinăm rezultanta acțiunilor hidrodinamice asupra plăcii.

Pentru aceasta folosim formula

$$R_x - iR_y = -i\int_{\varpi}(p - p_\infty)\,d\bar{z} \tag{1.68}$$

în care p_∞ reprezintă valoarea presiunii la infinit.

În cazul obstacolului considerat la paragrafele precedente componentele rezultantei devin

$$R_x = 2\int_0^l (p - p_\infty)\,dy \tag{1.69}$$

și

$$R_y = 0 \tag{1.70}$$

datorită simetriei mișcării față de axa Ox.

Curentul compresibil fiind supus legii adiabatice (1.1), în virtutea relației (1.7) rezultă

$$p = p_0\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}\frac{V^2}{c_0^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{1.71}$$

și

$$p_\infty = p_0\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}\frac{U^2}{c_0^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{1.72}$$

notațiile folosite avînd semnificația dată la începutul acestui capitol.

Dezvoltînd expresiile (1.71) și (1.72) după puterile numărului lui Mach $M_0 = \frac{U}{c_0}$, ținînd seama, totodată, că $c_0^2 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}$, obținem

$$p - p_\infty = \frac{\rho_0}{2}(U^2 - V^2) + \frac{\rho_0}{8}\frac{M_0^2}{U^2}(V^4 - U^4), \tag{1.73}$$

mărginindu-ne la aproximația admisă.

În virtutea relației (1.73), R_x devine

$$R_x = \rho_0\int_0^l (U^2 - V^2)\,dy + \frac{\rho_0}{4}\frac{M_0^2}{U^2}\int_0^l (V^4 - U^4)\,dy \tag{1.74}$$

ceea ce se mai poate scrie, avînd în vedere expresia vitezei (1.67),

$$R_x = \rho_0\int_0^l (U^2 - V^{(0)^2})\,dy + \frac{\rho_0}{2}M_0^2\int_0^l V^{(0)^2}dy - \frac{\rho_0 M^2}{4U^2}\int_0^l V^{(0)^4}dy - \frac{\rho_0}{4}M_0^2U^2l -$$

$$- 2\rho_0 a^2\frac{U}{4+\pi}M_0^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos\sigma(\pi\cos\sigma + 2\sigma - \pi - 2\sin\sigma\cos\sigma)}{(1+\sin\sigma)^2}d\sigma. \tag{1.75}$$

În ultima integrală s-a înlocuit dy cu expresia sa din (1.63).

Să facem, acum, calculul integralelor care intervin în relația (1.75).

Observăm, mai întîi, că primul termen reprezintă chiar rezultanta acțiunilor hidrodinamice a unui fluid incompresibil de densitate ρ_0 asupra unei plăci normale pe direcția curentului la infinit avînd, deci, valoarea cunoscută [66]:

$$R_x^{(0)} = \rho_0\int_0^l (U^2 - V^{(0)^2})\,dy = 2\rho_0 lU^2\frac{\pi}{\pi+4}. \tag{1.76}$$

Apoi, deoarece

$$V^{(0)^2} = \frac{\cos^2\sigma}{(1+\sin\sigma)^2}U^2$$

și dy are expresia dedusă din (1.63),

$$\int_0^l V^{(0)4}\,dy = 2a^2U^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos^4\sigma\sin\sigma}{(1+\sin\sigma)^3}\,d\sigma = \frac{1}{2}(9\pi-28)a^2U^3 = (9\pi-28)\frac{lU^4}{\pi+4}. \tag{1.77}$$

Ultimul termen din (1.75) se descompune în următoarele integrale :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos^2\sigma}{(1+\sin\sigma)^2}\,d\sigma = 2-\frac{\pi}{2};\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sigma\cos\sigma}{(1+\sin\sigma)^2}\,d\sigma = 1-\frac{3\pi}{4},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos\sigma}{(1+\sin\sigma)^2}\,d\sigma = -\frac{1}{2};\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\sigma\cos^2\sigma}{(1+\sin\sigma)^2}\,d\sigma = \pi-3. \tag{1.78}$$

Înlocuind rezultatele obținute din (1.53), (1.76), (1.77) și (1.78) în relația (1.75), găsim, în definitiv, următoarea expresie a rezultantei forțelor hidrodinamice asupra plăcii [67] :

$$R_x = 2\rho_0 lU^2\frac{\pi}{\pi+4}\left[1-\frac{\pi}{2(\pi+4)}M_0^2\right]. \tag{1.79}$$

Această expresie se mai poate pune și sub altă formă dacă ne referim la valoarea lui ρ_0 :

$$\rho_0 = \rho_\infty\left(1-\frac{\gamma-1}{2}M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{1.80}$$

Deducem, astfel, mărginindu-ne tot la aproximația a doua

$$R_x = 2lU^2\rho_\infty\frac{\pi}{\pi+4}\left[1+\frac{2}{\pi+4}M_0^2\right]. \tag{1.81}$$

Așadar, coeficientul de rezistență este, în acest caz,

$$k = \frac{\pi}{4+\pi}\left(1+\frac{2}{4+\pi}M_0^2\right). \tag{1.82}$$

Această valoare a lui k coincide cu cea găsită de C i a p l î g h i n [1] care a studiat mișcarea unui curent compresibil de lărgime finită în prezența unei plăci normale pe direcția generală a vitezei la infinit. Făcînd apoi o trecere la limită, însă pe o expresie aproximativă, C i a p l î g h i n a obținut rezultatele corespunzătoare curentului nelimitat.

Metoda folosită de noi, în această lucrare, ne-a permis să facem, direct, acest studiu în fluid nelimitat și rezultatul obținut legitimează procedeul lui C i a p l î g h i n.

CAPITOLUL II

CAZUL DIEDRULUI SIMETRIC

1. Considerațiile făcute în capitolul precedent le vom extinde la cazul obstacolului constituit dintr-un diedru care va fi reprezentat, în plan, prin pereții rectilinii OP_1 și OP_2, pentru care păstrăm notațiile ϖ_1 și ϖ_2.

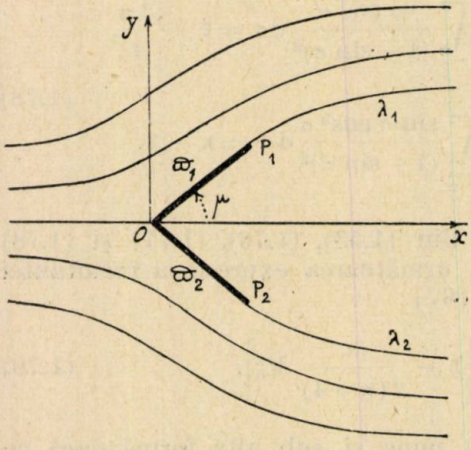


Fig. 4

Presupunem segmentele OP_1 și OP_2 de lungimi egale, l, așezate simetric față de axa Ox, unghiul format de OP_1 cu această axă fiind μ, $(0 < \mu < \pi)$, conform figurii 4. De la extremitățile P_1 și P_2 se detașează liniile de curent libere λ_1 și λ_2. Axa Ox este și în acest caz paralelă cu direcția curentului la infinit, iar O este punctul de bifurcare al curentului [68]. Funcția care realizează trecerea la semicercul lui Levi-Civită din planul ζ va fi, ca și în cazul plăcii normale pe direcția curentului la infinit,

$$f_0 = \frac{a^2}{4}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2. \qquad (2.1)$$

Frontierele domeniilor din planele z și ζ se corespund conform figurilor 3 și 4.

Funcția lui Levi-Civită $\omega(\zeta) = \theta + i\tau$ va fi definită, acum, prin următoarele condiții

$$\begin{aligned} &\theta = -\mu \text{ pe } \zeta = e^{i\sigma};\ 0 \leqslant \sigma < \frac{\pi}{2}, \\ &\theta = \mu \quad \text{pe } \zeta = e^{i\sigma};\ \frac{\pi}{2} < \sigma \leqslant \pi, \\ &\tau = 0 \quad \text{pe } -1 \leqslant \xi \leqslant 1,\ \eta = 0 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

care conduc la expresia [66]:

$$\omega(\zeta) = \frac{2i\mu}{\pi} \lg \frac{\zeta - i}{\zeta + i} - 2\mu. \qquad (2.3)$$

2. *Condițiile la limită.* Ca și în cazul $\mu = \frac{\pi}{2}$ putem considera, pe pereții ϖ_1 și ϖ_2 și pe liniile libere, în mișcarea incompresibilă cît și în cea compresibilă:

$$\psi_0 = q^{(0)} = 0, \quad \psi = q = 0 \quad \text{deci și} \quad q^{(1)} = 0 \qquad (2.4)$$

precum și $V^2 = U^2$ pe liniile libere λ.

Vom observa, de asemenea, că pe pereții $\overline{\omega}_1$ și $\overline{\omega}_2$

$$\mathcal{I}m\left[\frac{df_0}{dz}\overline{\int_0^z\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz}\right]=0.$$

Într-adevăr, în virtutea relațiilor (1.28), (2.1) și (2.2) se obține

$$\int_0^z\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz=U\int_i^\zeta e^{-i\omega}\,df_0=\frac{1}{2}a^2U\int_i^\zeta e^{2i\mu}\left(\frac{\zeta-i}{\zeta+i}\right)^{\frac{2\mu}{\pi}}\left(\zeta^2-\frac{1}{\zeta^2}\right)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

integrala fiind convergentă pentru $\zeta=i$.

Totodată, considerînd un punct z_1 pe peretele $\overline{\omega}_1$:

$$\mathcal{I}m\left[\frac{df_0}{dz}\overline{\int_0^z\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz}\right]_{z_1}=\mathcal{I}m\left[Ue^{-i(\mu+i\tau)}\int_0^{\varphi_0}Ue^{+i(\mu-i\tau)}\,d\varphi_0\right]=0;$$

o relație analogă putînd fi scrisă și pentru punctele peretelui $\overline{\omega}_2$.

Vor rămîne deci valabile condițiile la limită (1.33) și (1.34) adică

$$B_1=0 \text{ pe } \zeta=e^{i\sigma},\quad 0\leqslant\sigma\leqslant\pi$$

și

$$\frac{dA_1}{d\xi}=\frac{d\theta}{d\xi}B_1 \text{ pe } -1\leqslant\xi\leqslant 1,\quad \eta=0$$

care conduc, pe baza considerațiilor făcute în primul capitol pentru determinarea funcției $g_1(\zeta)$, la ecuația diferențială

$$\frac{dg_1}{d\zeta}+ig_1(\zeta)\frac{d\omega}{d\zeta}=i\frac{d\omega}{d\zeta}\left[C_1+C_2\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)^2\right]. \tag{2.5}$$

Avînd în vedere expresia (2.3) a lui $\omega(\zeta)$, soluția ecuației diferențiale (2.5) este

$$g_1(\zeta)=C_1+C_3e^{-i\omega(\zeta)}-\frac{4\mu i}{\pi}C_2e^{-i\omega(\zeta)}\int_i^\zeta e^{i\omega(\zeta)}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{2.6}$$

C_3 fiind o constantă de integrare care rezultă egală cu zero din condițiile $B_1=0$ pe $\xi=0$, $0\leqslant\eta\leqslant 1$ și $B_1=0$ pe semicircumferință.

3. *Determinarea constantelor C_1 și C_2.* Pentru determinarea constantelor C_1 și C_2 vom putea lua și în acest caz condițiile de detașare (1.45) și (1.46) sub forma

$$\varphi_1(P_1)=0 \quad \text{și} \quad \varphi_2(P_2)=0,$$

$$\mathcal{I}m\left\{\frac{\dfrac{dg_1}{d\zeta}}{\dfrac{d\omega}{d\zeta}}+i\left[g_1(\zeta)-f_0(\zeta)\right]\right\}_{\zeta=-1}=0$$

pe care le vom explicita ținînd seamă de expresia (2.6) a lui $g_1(\zeta)$.

Prima condiție, $\varphi_1(P_1) = 0$, devine, în virtutea relațiilor (1.10) și (2.6),

$$C_1 + \frac{8\mu}{\pi} C_2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\tau} \cos \sigma d\sigma - 2a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\tau} \cos \sigma \sin \sigma d\sigma = a^2, \tag{2.7}$$

iar condiția a doua se scrie, ținînd seamă de ecuația diferențială (2.5), sub forma

$$C_1 + 4C_2 = a^2. \tag{2.8}$$

Pentru calculul integralelor care intervin în relația (2.7) determinăm, în primul rînd, expresia lui τ, luînd $\mathcal{I}m\,[\omega(\zeta)]$ pe cerc.

Obținem astfel

$$\tau = \frac{2\mu}{\pi} \lg \frac{|\cos \sigma|}{1 + \sin \sigma} = \frac{\mu}{\pi} \lg \left[\frac{\sin\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right]^2. \tag{2.9}$$

Așadar,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\tau} \cos \sigma d\sigma = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right]^{-\frac{2\mu}{\pi}} \cos \sigma d\sigma =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2}\right) \right]^{-\frac{2\mu}{\pi}} \cos \sigma \, d\sigma.$$

Luînd, după procedeul lui Levi-Civită [69],

$$t = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2}\right), \tag{2.10}$$

$$\sin \sigma = \frac{1 - t}{1 + t} = -1 + \frac{2}{1 + t} \text{ și } \cos \sigma \, d\sigma = -\frac{2dt}{(1 + t)^2},$$

rezultă

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2}\right) \right]^{-\frac{\mu}{\pi}} \cos \sigma \, d\sigma = 2 \int_0^1 \frac{t^{-\frac{\mu}{\pi}}}{(1 + t)^2} dt.$$

Integrala obținută se poate exprima cu ajutorul funcției lui Stirling

$$\beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1 + t} dt, \qquad (x > 0) \tag{2.11}$$

legată de derivata logaritmică Ψ a funcției Γ prin formula

$$\beta(x) = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

De asemenea, se știe că, luînd

$$\beta_n = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^n}\,dt, \quad (x > 0 \text{ și } n \text{ întreg pozitiv}),$$

există relația de recurență

$$\beta_n = \frac{1}{(n-1)\,2^{n-1}} + \frac{n-1-x}{n-1}\,\beta_{n-1}. \tag{2.12}$$

Așadar,

$$\int_0^1 \frac{t^{-\frac{\mu}{\pi}}}{(1+t)^2}\,dt = \beta_2\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\pi}\,\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right) \tag{2.13}$$

cu $x = 1 - \frac{\mu}{\pi}$ în virtutea relației (2.12).

În mod analog, se calculează și a doua integrală din (2.7) și se obține

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\tau}\cdot\cos\sigma\sin\sigma\,d\sigma = 2\,\beta_2\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right) - 4\beta_3\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right) \text{ cu } x = 1+\frac{\mu}{\pi}.$$

În definitiv, folosind relația de recurență (2.12) obținem

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\tau}\cdot\cos\sigma\sin\sigma\,d\sigma = -\frac{1}{2} + \frac{\mu}{\pi} - \frac{2\mu^2}{\pi^2}\,\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right). \tag{2.14}$$

Deci condiția (2.7) devine, introducînd rezultatele obținute în relațiile (2.13) și (2.14):

$$C_1 - \frac{8\mu}{\pi}\,C_2\left[1 + \frac{2\mu}{\pi}\,\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)\right] + a^2\left[1 - \frac{2\mu}{\pi} + \frac{4\mu^2}{\pi^2}\,\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)\right] = a^2. \tag{2.15}$$

Din această relație, împreună cu condiția (2.8), determinăm constantele C_1 și C_2 sub forma

$$C_1 = a^2\left[1 - \frac{1 - \frac{2\mu}{\pi} + \frac{4\mu^2}{\pi^2}\,\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)}{1 + \frac{2\mu}{\pi} + \frac{4\mu^2}{\pi^2}\,\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)}\right],$$

$$C_2 = a^2\,\frac{1 - \frac{2\mu}{\pi} + \frac{4\mu^2}{\pi^2}\,\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)}{4\left[1 + \frac{2\mu}{\pi} + \frac{4\mu^2}{\pi^2}\,\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)\right]}. \tag{2.16}$$

Urmează că și în acest caz funcția $f(z, \bar{z})$ este complet determinată.

În particular, făcînd în (2.16) $\mu = \frac{\pi}{2}$ se regăsesc valorile constantelor C_1 și C_2 date de relațiile (1.56).

Într-adevăr, pentru $\mu = \frac{\pi}{2}$, expresiile (2.16) devin

$$C_1 = a^2\left[1 - \frac{\beta\left(\frac{3}{2}\right)}{2 + \beta\left(\frac{1}{2}\right)}\right]; \quad C_2 = a^2 \frac{\beta\left(\frac{3}{2}\right)}{4\left[2 + \beta\left(\frac{1}{2}\right)\right]} \tag{2.17}$$

dar, avînd în vedere că

$$\beta\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}\,dt}{1+t} = \frac{4-\pi}{2} \text{ și } \beta\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{2}}\,dt}{1+t} = \frac{\pi}{2},$$

rezultă, din (2.17),

$$C_1 = \frac{2\pi}{4+\pi}a^2; \quad C_2 = \frac{4-\pi}{4(4+\pi)}a^2.$$

4. *Distribuția vitezelor pe obstacol.* Expresia vitezei pe obstacol se obține și în acest caz din formula (1.57) în care explicităm termenii ce intervin ținînd seamă de relațiile (2.1), (2.2) și (2.6).

Astfel, pe peretele $\overline{\omega}_1$, făcînd $\zeta = e^{i\sigma}$, găsim

$$\frac{df_0}{dz} = Ue^{-i\mu}\cdot e^{\tau}, \quad \overline{\frac{df_0}{dz}} = Ue^{i\mu}\cdot e^{\tau}, \tag{2.18}$$

$$\frac{d^2 f_0}{dz^2} = \frac{\mu}{\pi}\cdot\frac{U^2}{a^2}\, e^{-2i\mu}\cdot e^{2\tau}\frac{1}{\sin\sigma\cos^2\sigma}. \tag{2.19}$$

De asemenea,

$$\frac{dg}{dz} = \frac{dg}{d\zeta}\frac{d\zeta}{df_0}\frac{df_0}{dz} = \frac{2U}{a^2}\, e^{-i\omega}\frac{1}{\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta}}\frac{dg}{d\zeta}$$

sau, în virtutea relației (2.6), pentru $\zeta = e^{i\sigma}$,

$$\frac{dg}{dz} = \frac{8\mu^2}{\pi^2}\cdot\frac{U}{a^2}\, C_2\, e^{-i\mu}\cdot e^{2\tau}\frac{1}{\sin\sigma\cos^2\sigma}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} e^{-\tau}\cdot\cos\sigma\, d\sigma -$$

$$- \frac{4\mu}{\pi}\frac{U}{a^2}\, C_2\, e^{-i\mu}\cdot e^{\tau}\frac{1}{\sin\sigma} - Ue^{-i\mu}\cdot e^{\tau}. \tag{2.20}$$

Înlocuind în relația (1.57) rezultatele din (2.18), (2.19) și (2.20) obținem expresia vitezei pe peretele $\widehat{\omega}_1$ sub forma

$$V^2 = V^{(0)^2} + \frac{M_0^2}{2} V^{(0)^2} \left[\frac{V^{(0)^2}}{U^2} - 1 \right] -$$

$$- M_0^2 U^2 \left[\frac{\mu}{\pi} e^{3\tau} \frac{1}{\sin\sigma \cos^2\sigma} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} e^{\tau} \sin\sigma \cos\sigma \, d\sigma - \right.$$

$$\left. - \frac{4\mu^2}{\pi^2 a^2} C_2 e^{3\tau} \frac{1}{\sin\sigma \cos^2\sigma} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} e^{-\tau} \cos\sigma \, d\sigma + \frac{2\mu}{\pi a^2} C_2 e^{2\tau} \frac{1}{\sin\sigma} \right] \cdot \quad (2.21)$$

Datorită simetriei, pe peretele $\widehat{\omega}_2$ va fi valabilă o expresie analoagă.

Observăm și în acest caz că pentru valorile $\sigma = 0$ și $\sigma = \pi$ corespunzătoare extremităților pereților P_2 și P_1 se anulează atît numărătorul cît și numitorul ultimului termen (paranteza care înmulțește pe $M_0^2 U^2$) al expresiei vitezei (2.21), în virtutea valorii constantei C_2 din (2.16).

Făcînd calculul, se găsește, în aceste puncte, $V^2 = U^2$.

Expresia vitezei pe obstacol se mai poate scrie și sub o altă formă folosind procedeul de reprezentare hodografic [66] al lui Helmholtz care constă în exprimarea lui z cu ajutorul vitezei complexe sau a lui $\omega(\zeta)$.

Pentru aceasta vom elimina pe ζ între expresiile lui $f_0(\zeta)$ și $\omega(\zeta)$ date de relațiile (2.1) și (2.3), respectiv.

Notînd

$$W = e^{\frac{\pi\omega}{2\mu i}} = \left(\frac{V^{(0)}}{U} \right)^{\frac{\pi}{2\mu}} \cdot e^{-\frac{\pi\theta}{2\mu} i} \quad (2.22)$$

obținem

$$\zeta = i \frac{1-W}{1+W}, \quad \text{unde } |W| \leqslant 1 \quad (2.23)$$

și

$$f_0(\zeta) = -4a^2 \frac{W^2}{(1-W^2)^2} = -4a^2 \sum_{n=1}^{\infty} n W^{2n} = -4a^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{V^{(0)}}{U} \right)^{\frac{n\pi}{\mu}} \cdot e^{-\frac{n\pi\theta}{\mu} i}, \quad (2.24)$$

dezvoltarea în serie fiind valabilă pentru $|W| < 1$.

Apoi,

$$df_0 = -8a^2 \frac{W(1+W^2)}{(1-W^2)^3} dW \quad (2.25)$$

și

$$dz = \frac{e^{i\omega}}{U} df_0 = -\frac{8a^2}{U} W^{1-\frac{2\mu}{\pi}} \cdot \frac{1+W^2}{(1-W^2)^3} dW. \quad (2.26)$$

Integralele care intervin în relația (2.21) se calculează ținînd seamă de următoarele expresii deduse din (2.23) pentru $\zeta = e^{i\sigma}$ și $\theta = \mu$:

$$\cos\sigma = -2\,\frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{2\mu}}}{1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}};\quad \sin\sigma = \frac{1-\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}}{1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}} \tag{2.27}$$

și

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\pi}{\mu}\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{2\mu}-1}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}}\,\mathrm{d}\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right). \tag{2.28}$$

Se obține astfel

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} e^{\tau}\cdot\sin\sigma\cos\sigma\,\mathrm{d}\sigma = -2\,\frac{\pi}{\mu}\int_0^{V^{(0)}}\frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}\cdot\left(1-\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}}{\left[1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\mu}{\pi}}\right]^3}\,\mathrm{d}\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right) =$$

$$= -2\left\{\frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}+1}}{\left[1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}\right]^2} - \frac{\mu}{\pi}\,\frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}+1}}{1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}(n+1)+1}}{\frac{\pi}{\mu}(n+1)+1}\right\} \tag{2.29}$$

precum și

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} e^{-\tau}\cos\sigma\,\mathrm{d}\sigma = -2\,\frac{\pi}{\mu}\int_0^{V^{(0)}}\frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{2\mu}-2}}{\left[1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}\right]^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right) =$$

$$= -2\left\{\frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}-1}}{1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}(n+1)-1}}{\frac{\pi}{\mu}(n+1)-1}\right\}. \tag{2.30}$$

Prin urmare, avînd în vedere calculele efectuate expresia vitezei pe obstacol (2.21) se mai poate scrie

$$V^2 = V^{(0)^2} + \frac{M_0^2}{2} V^{(0)^2}\left[\frac{V^{(0)^2}}{U^2} - 1\right] +$$

$$+ M_0^2 U^2 \left\{ \frac{\mu}{2\pi} \frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^3 \left[1 + \left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}\right]}{1 - \left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}} \left[\frac{V^{(0)}}{U} - \frac{\mu}{\pi}\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)\left(1 + \left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}\right) + \right.\right.$$

$$+ \frac{\mu}{\pi}\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{-\frac{\pi}{\mu}} \cdot \left(1 + \left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}(n+1)+1}}{\frac{\pi}{\mu}(n+1)+1} \Bigg] -$$

$$- \frac{2\mu^2}{\pi^2 a^2} C_2 \frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{3-\frac{\pi}{\mu}} \left[1 + \left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}\right]^3}{1 - \left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}} \cdot \left[\frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}-1}}{1 + \left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}} + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}(n+1)-1}}{\frac{\pi}{\mu}(n+1)-1} \right] - \frac{2\mu}{\pi a^2} C_2 \left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^2 \frac{1 + \left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}}{1 - \left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}} \right\} \quad (2.31)$$

5. *Calculul presiunii asupra obstacolului.* Rezultanta forțelor hidrodinamice care se exercită asupra obstacolului se calculează cu ajutorul formulei (1.69):

$$R_x - iR_y = -i \int_{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2} (p - p_\infty)\, d\bar{z}$$

care devine, în virtutea relației (1.74)

$$R_x - iR_y = -\frac{i\rho_0}{2} \int_{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2} (U^2 - V^2)\, d\bar{z} - \frac{i\rho_0}{8} \frac{M_0^2}{U^2} \int_{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2} (V^4 - U^4)\, d\bar{z}. \quad (2.32)$$

Introducînd în această expresie viteza (2.21), ținînd seamă și de rezultatele din (2.29) și (2.30) și de faptul că pe peretele $\bar{\omega}_1$:

$$d\bar{z} = -\frac{2a^2}{U} e^{-\tau} \cdot e^{-i\mu} \sin\sigma \cos\sigma\, d\sigma, \quad (2.33)$$

rezultă că

$$\left[R_x - iR_y\right]_{\varpi_1} = -\frac{i\rho_0}{2}\int_{\varpi_1}(U^2 - V^{(0)^2})\,\mathrm{d}\bar{z} -$$

$$- i\rho_0 a^2 \mathrm{e}^{-i\mu} U M_0^2 \left\{ \frac{\pi}{2\mu}\int_0^U \left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}+2} \frac{1-\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}}{\left[1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}\right]^3}\,\mathrm{d}\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right) - \right.$$

$$- \frac{\pi}{\mu}\int_0^U \left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}} \cdot \frac{1-\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}}{\left[1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}\right]^3}\,\mathrm{d}\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right) +$$

$$+ \frac{\pi}{2\mu}\int_0^U \left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}-2} \frac{1-\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}}{\left[1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}\right]^3}\,\mathrm{d}\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right) +$$

$$+ \int_0^U \left\{ \frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}+2}}{\left[1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}\right]^2} - \frac{\mu}{\pi}\cdot\frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}+2}}{1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\mu}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}(n+1)+2}}{\frac{\pi}{\mu}(n+1)+1} \right\} \mathrm{d}\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right) - \right.$$

$$- 4\frac{C_2}{a^2}\frac{\mu}{\pi}\int_0^U \left[\frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}}{1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}(n+1)}}{\frac{\pi}{\mu}(n+1)-1} \right] \mathrm{d}\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right) -$$

$$\left. - 4\frac{C_2}{a^2}\int_0^U \frac{\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}}{\left[1+\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}\right]^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{V^{(0)}}{U}\right) \right\}. \qquad (2.34)$$

Pentru efectuarea calculelor folosim notația

$$\frac{V^{(0)}}{U} = x\,.$$

Așadar, făcînd substituția

$$x^{\frac{\pi}{\mu}} = t$$

avem

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{\pi}{\mu}+2}(1-x^{\frac{\pi}{\mu}})}{(1+x^{\frac{\pi}{\mu}})^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\mu}{\pi}\left[\int_0^1 \frac{t^{\frac{3\mu}{\pi}}}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{\frac{3\mu}{\pi}+1}}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t\right] =$$

$$= \frac{\mu}{\pi}\left[\beta_3\left(1+\frac{3\mu}{\pi}\right) - \beta_3\left(2+\frac{3\mu}{\pi}\right)\right].$$

În mod analog deducem

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{\pi}{\mu}}(1-x^{\frac{\pi}{\mu}})}{(1+x^{\frac{\pi}{\mu}})^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\mu}\left[\beta_3\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right) - \beta_3\left(2+\frac{\mu}{\pi}\right)\right],$$

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{\pi}{\mu}-2}(1-x^{\frac{\pi}{\mu}})}{(1+x^{\frac{\pi}{\mu}})^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\mu}{\pi}\left[\beta_3\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right) - \beta_3\left(2-\frac{\mu}{\pi}\right)\right],$$

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{\pi}{\mu}+2}}{(1+x^{\frac{\pi}{\mu}})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mu}{\pi}\,\beta_2\left(1+\frac{3\mu}{\pi}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{\pi}{\mu}+2}}{1+x^{\frac{\pi}{\mu}}}\,\mathrm{d}x = \frac{\mu}{\pi}\,\beta\left(1+\frac{3\mu}{\pi}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{\pi}{\mu}}}{1+x^{\frac{\pi}{\mu}}}\,\mathrm{d}x = \frac{\mu}{\pi}\,\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{\pi}{\mu}}}{(1+x^{\frac{\pi}{\mu}})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mu}{\pi}\,\beta_2\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right),$$

funcțiile $\beta(x)$, $\beta_2(x)$, $\beta_3(x)$ fiind cele introduse prin relațiile (2.11) și (2.12).

Totodată,

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{\frac{\pi}{\mu}(n+1)+2}}{\frac{\pi}{\mu}(n+1)+1}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\left|\frac{\pi}{\mu}(n+1)+1\right|\left[\frac{\pi}{\mu}(n+1)+3\right]} =$$

$$= \frac{\mu}{2\pi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+\left(1+\frac{3\mu}{\pi}\right)}\right\} =$$

$$= \frac{\mu}{2\pi}\left[\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right) - \beta\left(1+\frac{3\mu}{\pi}\right)\right]$$

și

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{\frac{\pi}{\mu}(n+1)}}{\frac{\pi}{\mu}(n+1)-1}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\left[\frac{\pi}{\mu}(n+1)-1\right]\left[\frac{\pi}{\mu}(n+1)+1\right]} =$$

$$= \frac{\mu}{2\pi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)}\right\} =$$

$$= \frac{\mu}{2\pi}\left[\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right) - \beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)\right].$$

În dezvoltările de mai sus am ținut seamă că

$$\beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+x}.$$

În virtutea rezultatelor obținute expresia (2.35) devine

$$[R_x - iR_y]_{\overline{\omega}_1} = -\frac{i\rho_0}{2}\int_{\overline{\omega}_1}(U^2 - V^{(0)^2})\,d\bar{z} -$$

$$- i\rho_0 a^2 U e^{-i\mu} M_0^2\left\{\frac{1}{2}\left[\beta_3\left(1+\frac{3\mu}{\pi}\right) - \beta_3\left(2+\frac{3\mu}{\pi}\right)\right] -\right.$$

$$-\left[\beta_3\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right) - \beta_3\left(2+\frac{\mu}{\pi}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\beta_3\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right) - \beta_3\left(2-\frac{\mu}{\pi}\right) +\right.$$

$$+\frac{\mu}{\pi}\beta_2\left(1+\frac{3\mu}{\pi}\right) - \frac{\mu^2}{\pi^2}\beta\left(1+\frac{3\mu}{\pi}\right) + \frac{\mu^2}{2\pi^2}\left[\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right) - \beta\left(1+\frac{3\mu}{\pi}\right)\right] -$$

$$-\frac{4C_2}{a^2}\frac{\mu^2}{\pi^2}\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)-\frac{2C_2}{a^2}\frac{\mu^2}{\pi^2}\left[\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)-\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)\right]-$$

$$-4\frac{C_2}{a^2}\frac{\mu}{\pi}\beta_2\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)\Bigg\}. \tag{2.35}$$

Dar, avînd în vedere că din relația (2.12) putem deduce

$$\beta(1+x)=\frac{1}{x}-\beta(x),$$

rezultă

$$\beta_3\left(1+\frac{3\mu}{\pi}\right)-\beta_3\left(2+\frac{3\mu}{\pi}\right)=\frac{1}{4}-\frac{3\mu}{2\pi}+\frac{9\mu^2}{\pi^2}\beta\left(1+\frac{3\mu}{\pi}\right),$$

$$\beta_3\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)-\beta_3\left(2+\frac{\mu}{\pi}\right)=\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2\pi}+\frac{\mu^2}{\pi^2}\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right),$$

$$\beta_3\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)-\beta_3\left(2-\frac{\mu}{\pi}\right)=\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2\pi}+\frac{\mu^2}{\pi^2}\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right),$$

$$\beta_2\left(1+\frac{3\mu}{\pi}\right)=\frac{1}{2}-\frac{3\mu}{\pi}\beta\left(1+\frac{3\mu}{\pi}\right),$$

$$\beta_2\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\pi}\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right).$$

Deci, făcînd calculele, relația (2.35) ne conduce la

$$[R_x-iR_y]_{\bar{\omega}_1}=-\frac{i\rho_0}{2}\int_{\bar{\omega}_1}(U^2-V^{(0)^2})\,d\bar{z}-$$

$$-\rho_0 i a^2 e^{-i\mu} U M_0^2\left\{\frac{\mu}{2\pi}\left(1-\frac{4C_2}{a^2}\right)\left[1+\frac{\mu}{\pi}\left(\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)-\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)\right)\right]\right\}. \tag{2.36}$$

Primul termen din această expresie reprezintă rezultanta forțelor hidrodinamice asupra peretelui $\bar{\omega}_1$ în mișcarea incompresibilă.

În baza relațiilor (2.27), (2.28), (2.33) și a integralelor efectuate putem scrie acest termen sub forma

$$[R_x^{(0)}-iR_y^{(0)}]_{\bar{\omega}_1}=-\frac{i\rho_0}{2}\int_{\bar{\omega}_1}(U^2-V^{(0)^2})\,d\bar{z}=$$

$$=2i\rho_0 a^2 U e^{-i\mu}\frac{\mu}{\pi}\left\{1+\frac{\mu}{\pi}\left[\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)-\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)\right]\right\}. \tag{2.37}$$

Însă, ținînd seamă că [70]

$$\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)-\beta\left(1+\frac{\mu}{\pi}\right)=\pi\left[\frac{1}{\sin\mu}-\frac{1}{\mu}\right], \tag{2.38}$$

din (2.37) rezultă [71], [72]

$$[R_x^{(0)} - iR_y^{(0)}]_{\bar{\omega}_1} = 2i\rho_0 a^2 U e^{-i\mu} \frac{\mu^2}{\pi \sin \mu}. \qquad (2.37')$$

Substituind, acum, în (2.36) valorile găsite (2.38) și (2.37') precum și constanta C_2 dată de (2.16), obținem următoarea expresie a rezultantei forțelor hidrodinamice asupra peretelui $\bar{\omega}_1$ în mișcarea compresibilă :

$$[R_x - iR_y]_{\bar{\omega}_1} =$$

$$= 2i\rho_0 a^2 U e^{-i\mu} \frac{\mu^2}{\pi \sin \mu} \left\{ 1 - M_0^2 \frac{\mu^2}{\pi \sin \mu \left[1 + \frac{2\mu}{\pi} + \frac{4\mu^2}{\pi^2} \beta \left(1 - \frac{\mu}{\pi} \right) \right]} \right\}. \qquad (2.39)$$

De aici deducem

$$(R_x)_{\bar{\omega}_1} = 2\rho_0 a^2 U \frac{\mu^2}{\pi} \left\{ 1 - M_0^2 \frac{\mu^2}{\pi \sin \mu \left[1 + \frac{2\mu}{\pi} + \frac{4\mu^2}{\pi^2} \beta \left(1 - \frac{\mu}{\pi} \right) \right]} \right\},$$

$$(R_y)_{\bar{\omega}_1} = -2\rho_0 a^2 U \frac{\mu^2}{\pi} \operatorname{cotg} \mu \left\{ 1 - M_0^2 \frac{\mu^2}{\pi \sin \mu \left[1 + \frac{2\mu}{\pi} + \frac{4\mu^2}{\pi^2} \beta \left(1 - \frac{\mu}{\pi} \right) \right]} \right\}. \qquad (2.40)$$

Totodată, din formula (2.39) se constată că vectorul $\bar{R}$ este normal la peretele $\bar{\omega}_1$ așa cum era de așteptat și are mărimea

$$R = 2\rho_0 a^2 U \frac{\mu^2}{\pi \sin \mu} \left\{ 1 - M_0^2 \frac{\mu^2}{\pi \sin \mu \left[1 + \frac{2\mu}{\pi} + \frac{4\mu^2}{\pi^2} \beta \left(1 - \frac{\mu}{\pi} \right) \right]} \right\}. \qquad (2.41)$$

De asemenea, vectorul $\bar{R}$ corespunzător peretelui $\bar{\omega}_2$ va avea, datorită simetriei, componentele $(R_x)_{\bar{\omega}_1}$ și $-(R_y)_{\bar{\omega}_1}$ exprimate tot prin relațiile (2.40).

În definitiv obținem următoarea formulă pentru rezultanta forțelor hidrodinamice care se exercită asupra obstacolului în mișcarea compresibilă [73] :

$$R_x = 4\rho_0 a^2 U \frac{\mu^2}{\pi} \left\{ 1 - M_0^2 \frac{\mu^2}{\pi \sin \mu \left[1 + \frac{2\mu}{\pi} + \frac{4\mu^2}{\pi^2} \beta \left(1 - \frac{\mu}{\pi} \right) \right]} \right\}. \qquad (2.42)$$

Datorită simetriei,

$$R_y = 0.$$

Expresia rezultantei (2.42) se mai poate scrie și sub forma

$$R_x = 2\rho_\infty LU^2 \frac{\mu^2}{\pi \sin \mu\left[1+\frac{2\mu}{\pi}+\frac{4\mu^2}{\pi^2}\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)\right]} \times$$

$$\times\left\{1+M_0^2\frac{\pi \sin \mu\left[1+\frac{2\mu}{\pi}+\frac{4\mu^2}{\pi^2}\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)\right]-2\mu^2}{2\pi \sin \mu\left[1+\frac{2\mu}{\pi}+\frac{4\mu^2}{\pi^2}\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)\right]}\right\} \tag{2.43}$$

în virtutea relației (1.80) care exprimă pe ρ_0 în funcție de ρ_∞ și de valoarea lui a^2 [64]:

$$a^2 = \frac{UL}{2 \sin \mu\left[1+\frac{2\mu}{\pi}+\frac{4\mu^2}{\pi^2}\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)\right]}, \quad L = P_1P_2. \tag{2.44}$$

În (2.43) se pune în evidență expresia coeficientului de rezistență

$$k = \frac{2\mu^2}{\pi \sin \mu\left[1+\frac{2\mu}{\pi}+\frac{4\mu^2}{\pi^2}\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)\right]} \times$$

$$\times\left\{1+M_0^2\frac{\pi \sin \mu\left[1+\frac{2\mu}{\pi}+\frac{4\mu^2}{\pi^2}\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)\right]-2\mu^2}{2\pi \sin \mu\left[1+\frac{2\mu}{\pi}+\frac{4\mu^2}{\pi^2}\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)\right]}\right\} \tag{2.45}$$

valoare care coincide cu aceea care se poate deduce din formula lui Demtchenko [4] relativă la relația între coeficienții de presiune în mișcările asociate care apar în utilizarea metodei de aproximare hodografice.

Într-adevăr, notînd cu $c_p^{(0)}$ și c_p coeficienții de presiune corespunzători, respectiv, mișcării incompresibile și mișcării compresibile, relația dată de B. Demtchenko se scrie

$$c_p = c_p^{(0)}\left[1+\left(\frac{1}{2}-\frac{c_p^{(0)}}{4}\right)M_0^2\right] \tag{2.46}$$

mărginindu-ne la aproximația admisă.

Dar

$$c_p^{(0)} = \frac{4\mu^2}{\pi \sin \mu\left[1+\frac{2\mu}{\pi}+\frac{4\mu^2}{\pi^2}\beta\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)\right]}$$

deci, făcînd calculele, se obține

$$c_p = \frac{4\mu^2}{\pi \sin \mu \left[1 + \frac{2\mu}{\pi} + \frac{4\mu^2}{\pi^2}\,\beta\left(1 - \frac{\mu}{\pi}\right)\right]} \times$$

$$\times \left\{1 + M_0^2 \frac{\pi \sin \mu \left[1 + \frac{2\mu}{\pi} + \frac{4\mu^2}{\pi^2}\,\beta\left(1 - \frac{\mu}{\pi}\right)\right] - 2\mu^2}{2\pi \sin \mu \left[1 + \frac{2\mu}{\pi} + \frac{4\mu^2}{\pi^2}\,\beta\left(1 - \frac{\mu}{\pi}\right)\right]}\right\} = 2k \quad (2.47)$$

așa cum anunțasem.

Pentru $\mu = \frac{\pi}{2}$ relațiile(2.42), (2.43) și (2.45) conduc la formulele (1.79), (1.81) și (1.82) găsite în primul capitol.

CAPITOLUL III

PROBLEMA HELMHOLTZ PENTRU PLACA ÎNCLINATĂ FAȚĂ DE DIRECȚIA CURENTULUI LA INFINIT CU UN UNGHI OARECARE

1. În acest capitol vom face o altă generalizare a considerațiilor făcute în primul capitol, referindu-ne la problema plăcii înclinate cu un unghi oarecare față de direcția curentului la infinit. Intersecția plăcii cu planul xOy este un segment de dreaptă P_1P_2 avînd o normală care face unghiul δ cu viteza curentului la infinit, $\left(-\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}\right)$, conform figurii 5. De la extremitățile P_1 și P_2 se detașează liniile libere λ_1 și λ_2.

Pentru a trece la semicercul lui Levi-Cività din planul ζ (fig. 6) folosim funcția [66]:

$$f_0 = a^2 \left[\cos \sigma_0 - \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right]^2, \quad (3.1)$$

unde σ_0, $(0 < \sigma_0 < \pi)$, fixează poziția, în planul ζ, a punctului de bifurcare a curentului O și este determinat de relația

$$\sigma_0 = \delta + \frac{\pi}{2} \quad (3.2)$$

dedusă din condiția de orientare a curentului [66]. Corespondența frontierelor din planele z și ζ este pusă în evidență pe figurile 5 și 6.

Funcția lui Levi-Civită $\omega(\zeta) = \theta + i\tau$ este definită în acest caz prin următoarele condiții:

$$\theta = \delta + \frac{\pi}{2} \quad \text{pe} \quad \zeta = e^{i\sigma}; \quad \sigma_0 < \sigma \leqslant 2\pi - \sigma_0$$

$$\theta = \delta - \frac{\pi}{2} \quad \text{pe} \quad \zeta = e^{i\sigma}; \quad 2\pi - \sigma_0 < \sigma \leqslant 2\pi \tag{3.3}$$

$$\tau = 0 \qquad \text{pe} \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1, \qquad \eta = 0$$

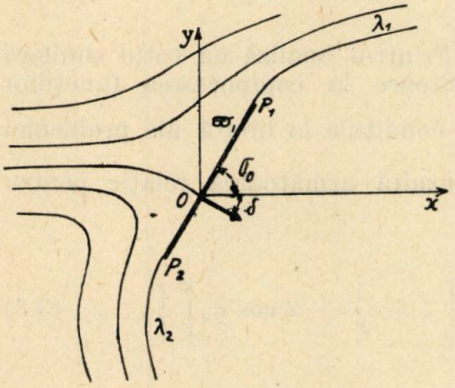


Fig. 5

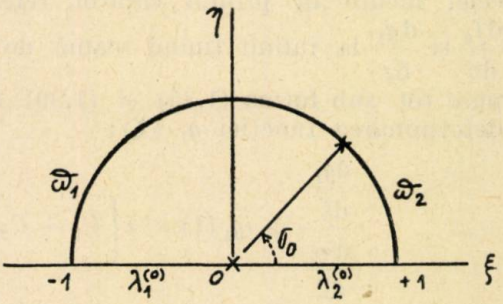


Fig. 6

din care se obține expresia [66]:

$$\omega(\zeta) = \sigma_0 + \delta - \frac{3\pi}{2} + i \lg \frac{\zeta - e^{i\sigma_0}}{\zeta - e^{-i\sigma_0}} \tag{3.4}$$

determinația aleasă pentru logaritm fiind aceea care se reduce la $(2\sigma_0 - 2\pi)i$ pentru $\zeta = 0$.

2. *Condițiile la limită.* Condițiile la limită generale (1.14′) și (1.24) vor căpăta, și în acest caz, forma (1.33) și (1.34) deoarece, păstrînd notațiile din capitolele precedente,

$$\psi_0 = q^{(0)} = 0, \quad \psi = q = 0, \quad \text{deci} \quad q^{(1)} = 0$$

atît pe pereții ϖ_1 și ϖ_2 cît și pe liniile libere în mișcarea incompresibilă precum și în mișcarea compresibilă. Totodată, $V^2 = U^2$ pe liniile libere.

Observăm că și de data aceasta

$$\int_0^z \left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz = U \int_{\sigma_0}^{\zeta} e^{-i\omega}\, df_0 =$$

$$= -\frac{a^2}{2} Ui \int_{\sigma_0}^{\zeta} e^{-i(\sigma_0+\delta)} \frac{\zeta - e^{i\sigma_0}}{\zeta - e^{-i\sigma_0}} \left[\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right]\left[1 - \frac{1}{\zeta^2}\right] d\zeta$$

este convergentă pentru $\zeta = e^{i\sigma_0}$, iar

$$\mathcal{I}m\left[\frac{df_0}{dz}\overline{\int_0^z\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz}\right] = 0 \text{ pe } \varpi_1 \text{ și } \varpi_2,$$

după cum se poate constata din relația

$$\mathcal{I}m\left[\frac{df_0}{dz}\overline{\int_0^z\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz}\right]_{z_1} = \mathcal{I}m\left\{U e^{-i\left[\left(\delta+\frac{\pi}{2}\right)+i\tau\right]}\int_0^{\varphi_0} U e^{-i\left[\left(\delta+\frac{\pi}{2}\right)-i\tau\right]} d\varphi_0\right\} = 0,$$

z_1 fiind un punct de pe peretele ϖ_1; o relație analoagă este valabilă și pentru punctele peretelui ϖ_2.

3. *Determinarea funcției* $g_1(\zeta)$. Printr-o analiză cu totul similară celei făcute în primul capitol, referitoare la comportarea funcțiilor $\frac{df_0}{dz}$ și $\frac{dg_1}{dz}$ la infinit ținînd seamă de condițiile la limită ale problemei puse tot sub forma (1.35) și (1.36) rezultă următoarea relație pentru determinarea funcției $g_1(\zeta)$;

$$\frac{\frac{dg_1}{d\zeta}}{\frac{d\omega}{d\zeta}} + ig_1(\zeta) = i\left\{C_1 + C_2\left[\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right]^2\right\}, \tag{3.5}$$

C_1 și C_2 fiind constante reale.

Această relație a fost dedusă scăzînd din funcția

$$\frac{\frac{dg_1}{d\zeta}}{\frac{d\omega}{d\zeta}} + ig_1(\zeta)$$

care este analitică, regulată în semicerc, continuă pe contur, în afara punctului $\zeta = 0$, funcția $iC_2\left|\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right|^2$ care este de asemenea regulată în semicerc, cu partea reală nulă pe contur și care se comportă în punctul $\zeta = 0$ la fel cu funcția din membrul întîi al relației (3.5), în afara unei singularități logaritmice.

Rezultă, astfel, că determinarea funcției $g_1(\zeta)$ revine la integrarea ecuației diferențiale (3.5) care conduce, în virtutea expresiei (3.4) a lui $\omega(\zeta)$, la

$$g_1(\zeta) = C_1 + C_3 e^{-i\omega(\zeta)} - 2i\sin\sigma_0 C_2 e^{-i\omega}\int_{e^{i\sigma_0}}^{\zeta} e^{i\omega}\left[\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right]\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{3.6}$$

C_3 fiind o constantă de integrare.

4. *Determinarea constantelor.* În primul rînd funcția $g_1(\zeta)$ dată de relația (3.6) trebuie să verifice condițiile la limită (1.33) și (1.34).

Condiția (1.34) se verifică de la sine.

Condiția (1.33), $B_1 = 0$ pe semicircumferință, ne conduce la următoarele considerații:

Dacă notăm $C_3 = \alpha_3 + i\beta_3$,

$$\mathcal{I}m[g_1(\zeta)]_{\zeta=e^{i\sigma}} = -\mathcal{I}m\left[i(\alpha_3+i\beta_3)\,e^{-i\delta}\frac{\sin\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}}\right] = 0, \tag{3.7}$$

ceilalți termeni din expresia lui $g_1(\zeta)$ fiind reali pe cerc.

Deducem așadar,

$$\alpha_3 \cos\delta + \beta_3 \sin\delta = 0$$

și deci expresia constantei C_3 sub forma

$$C_3 = \frac{\alpha_3}{\sin\delta}\,e^{i\left(\delta-\frac{\pi}{2}\right)} = -i\frac{\alpha_3}{\sin\delta}\,e^{i\delta}, \tag{3.8}$$

α_3 fiind o constantă reală pe care o vom determina, împreună cu celelalte constante care mai intervin în problemă, din condițiile generale de desprindere ale liniilor libere de pereții $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$ în punctele P_1 și P_2, date de relațiile (1.45) și (1.46).

Datorită nesimetriei mișcării față de direcția generală a curentului la infinit, fiecare din aceste relații conduc la cîte două condiții pe care le luăm sub forma

$$\varphi_1(P_1) = 0 \tag{3.9}$$

$$\varphi_1(P_2) = p^{(1)} \tag{3.10}$$

și

$$\mathcal{I}m\left\{\frac{\dfrac{dg_1}{d\zeta}}{\dfrac{d\omega}{d\zeta}} + i\,[g_1(\zeta) - f_0(\zeta)]\right\}_{P_1} = 0, \tag{3.11}$$

$$\mathcal{I}m\left\{\frac{\dfrac{dg_1}{d\zeta}}{\dfrac{d\omega}{d\zeta}} + i\,[g_1(\zeta) - f_0(\zeta) - 4p^{(1)}]\right\}_{P_2} = 0, \tag{3.12}$$

$p^{(1)}$ fiind, de asemenea, un parametru real care trebuie determinat.

În virtutea relațiilor (1.10), (3.1), (3.3) și (3.8), condițiile (3.9) și (3.10) devin

$$\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{4}e^{\tau}\int_{\sigma_0}^{\pi}e^{\tau}\,\overline{df_0}+\frac{1}{4}\left[C_1-\frac{\alpha_3}{\sin\delta}e^{\tau}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+4\sin\sigma_0\cdot C_2\cdot e^{\tau}\int_{\sigma_0}^{\pi}e^{-\tau}(\cos\sigma-\cos\sigma_0)\,d\sigma-4a^2\cos^4\frac{\sigma_0}{2}\right]\right\}_{P_1}=0 \qquad (3.13)$$

și

$$\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{4}e^{\tau}\int_{\sigma_0}^{0}e^{\tau}\,\overline{df_0}+\frac{1}{4}\left[C_1+\frac{\alpha_3}{\sin\delta}e^{\tau}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+4\sin\sigma_0\cdot C_2\cdot e^{\tau}\int_{\sigma_0}^{0}e^{-\tau}(\cos\sigma-\cos\sigma_0)\,d\sigma-4a^2\sin^4\frac{\sigma_0}{2}\right]\right\}_{P}=p^{(1)} \qquad (3.14)$$

ținînd seama că

$$[f_0(\zeta)]_{\zeta=-1}=4a^2\cos^4\frac{\sigma_0}{2}\ \text{și}\ [f_0(\zeta)]_{\zeta=1}=4a^2\sin^4\frac{\sigma_0}{2}. \qquad (3.15)$$

Pentru a duce calculele mai departe determinăm expresia lui τ luînd $\mathcal{I}m\,[\omega(\zeta)]$ pe cerc, din relația (3.4).

Obținem astfel

$$\tau=\lg\left|\frac{\sin\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}}\right|. \qquad (3.16)$$

Prin urmare, avînd în vedere și expresia lui df_0, dedusă din (3.1), pentru $\zeta=e^{i\sigma}$:

$$df_0=-2a^2(\cos\sigma-\cos\sigma_0)\sin\sigma d\sigma, \qquad (3.17)$$

calculul integralelor din relațiile (3.13) și (3.14) se va face după cum urmează :

$$\int_{\sigma_0}^{\pi}e^{\tau}\,\overline{df_0}=-2a^2\int_{\sigma_0}^{\pi}\left|\frac{\sin\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}}\right|(\cos\sigma-\cos\sigma_0)\sin\sigma d\sigma=$$

$$=4a^2\int_{\sigma_0}^{\pi}\sin^2\frac{\sigma-\sigma_0}{2}\sin\sigma d\sigma=2a^2\left[1+\cos\sigma_0-\frac{1}{2}(\pi-\sigma_0)\sin\sigma_0\right], \qquad (3.18)$$

$$\int_{\sigma_0}^{0}e^{\tau}\,\overline{df_0}=-4a^2\int_{\sigma_0}^{0}\sin^2\frac{\sigma-\sigma_0}{2}\sin\sigma d\sigma=2a^2\left(1-\cos\sigma_0-\frac{\sigma_0}{2}\sin\sigma_0\right), \qquad (3.19)$$

$$\int_{\sigma_0}^{\pi} e^{-\tau}(\cos\sigma-\cos\sigma_0)\,d\sigma=-2\int_{\sigma_0}^{\pi}\sin^2\frac{\sigma+\sigma_0}{2}\,d\sigma=$$

$$=-\pi+\sigma_0-\sin\sigma_0-\sin 2\sigma_0, \tag{3.20}$$

$$\int_{\sigma_0}^{0} e^{-\tau}(\cos\sigma-\cos\sigma_0)\,d\sigma=2\int_{\sigma_0}^{0}\sin^2\frac{\sigma+\sigma_0}{2}\,d\sigma=$$

$$=-\sigma_0-\sin\sigma_0+\sin 2\sigma_0. \tag{3.21}$$

Prin înlocuirea acestor rezultate în relațiile (3.13) și (3.14), acestea devin

$$C_1-4C_2\sin\sigma_0[\sin\sigma_0+\sin 2\sigma_0+\pi-\sigma_0]-\frac{\alpha_3}{\sin\delta}+$$

$$+2a^2\left[1+\cos\sigma_0-\frac{\pi-\sigma_0}{2}\sin\sigma_0\right]=4a^2\cos^4\frac{\sigma_0}{2} \tag{3.13'}$$

și

$$C_1+4C_2\sin\sigma_0[\sin\sigma_0-\sin 2\sigma_0+\sigma_0]+\frac{\alpha_3}{\sin\delta}+$$

$$+2a^2\left[1-\cos\sigma_0-\frac{\sigma_0}{2}\sin\sigma_0\right]=4a^2\sin^4\frac{\sigma_0}{2}+4p^{(1)}. \tag{3.14'}$$

Totodată relațiile (3.11) și (3.12) se pot scrie sub forma

$$C_1+16\,C_2\cos^4\frac{\sigma_0}{2}=4a^2\cos^4\frac{\sigma_0}{2}, \tag{3.22}$$

$$C_1+16\,C_2\sin^4\frac{\sigma_0}{2}=4a^2\sin^4\frac{\sigma_0}{2}+4p^{(1)} \tag{3.23}$$

având în vedere ecuația diferențială (3.5) precum și valorile lui φ în punctele P_1 și P_2 din (3.15).

Avem, astfel patru relații (3.13'), (3.14'), (3.22) și (3.23) din care putem determina cele patru constante reale C_1, C_2, α_3 și $p^{(1)}$ care au intervenit în studiul acestei probleme.

Rezolvînd acest sistem de ecuații, deducem:

$$C_1=4a^2\cos^4\frac{\sigma_0}{2}\left[1-\frac{4-\pi\sin\sigma_0}{4+\pi\sin\sigma_0}\right], \tag{3.24}$$

$$C_2=a^2\frac{4-\pi\sin\sigma_0}{4\,(4+\pi\sin\sigma_0)}, \tag{3.25}$$

$$\alpha_3=\sin\delta\left\{-16\,C_2\cos^4\frac{\sigma_0}{2}-4\,C_2\sin\sigma_0\left[\sin\sigma_0+\sin 2\,\sigma_0+\pi-\sigma_0\right]+\right.$$

$$\left.+2a^2\left[1+\cos\sigma_0-\frac{1}{2}(\pi-\sigma)\sin\sigma_0\right]\right\}, \tag{3.26}$$

(C_2 avînd expresia (3.25))

$$p^{(1)} = C_1 + 16\, C_2 \sin^4 \frac{\sigma_0}{2} - 4a^2 \sin^4 \frac{\sigma_0}{2}$$

sau

$$p^{(1)} = a^2 \frac{\pi \sin \sigma_0 \cos \sigma_0}{4\,(4 + \pi \sin \sigma_0)} \tag{3.27}$$

Găsirea acestor constante conduce la cunoașterea completă a funcției

$$f(z, \bar{z}) = f_0(z) + M^2 f_1(z, \bar{z}).$$

În particular, din relațiile de mai sus, se regăsesc valorile constantelor obținute, în primul capitol, făcînd

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$$

Observăm că $p^{(1)}$ devine zero, pentru $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$, așa cum considerasem, prin ipoteză, în cazul plăcii normale pe direcția curentului la infinit, datorită simetriei mișcării.

De asemenea și constanta α_3 devine zero pentru acest caz particular, rezultat care coincide cu cel găsit și în capitolul întîi al acestei lucrări.

5. *Distribuția vitezelor pe obstacol.* Expresia vitezei pe placă o determinăm și de data aceasta, din formula (1.57), explicitînd termenii pe care îi conține și avînd în vedere că obstacolul corespunde semicircumferinței din planul ζ.

Avem, așadar,

$$\frac{df_0}{dz} = U e^{-i\omega} = -Uie^{-i\delta} \frac{\sin \frac{\sigma - \sigma_0}{2}}{\sin \frac{\sigma + \sigma_0}{2}}$$

și

$$\overline{\frac{df_0}{dz}} = Uie^{i\delta} \frac{\sin \frac{\sigma - \sigma_0}{2}}{\sin \frac{\sigma + \sigma_0}{2}}, \tag{3.28}$$

$e^{i\omega}$ avînd, pentru $\zeta = e^{i\sigma}$, următoarea expresie care se deduce din (3.4):

$$e^{i\omega} = ie^{i(\sigma_0 + \delta)} \frac{\zeta - e^{-i\sigma_0}}{\zeta - e^{i\sigma_0}} = ie^{i\delta} \frac{\sin \frac{\sigma + \sigma_0}{2}}{\sin \frac{\sigma - \sigma_0}{2}}. \tag{3.29}$$

De asemenea,

$$\frac{d^2 f_0}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left[U e^{-i\omega}\right] = -Ui e^{-i\omega} \frac{d\omega}{d\zeta} \frac{d\zeta}{df_0} \frac{df_0}{dz}$$

sau, făcînd calculele, în virtutea relațiilor (3.1), (3.4) și (3.28) obținem

$$\frac{d^2 f_0}{dz^2} = -\frac{U^2}{8a^2} e^{-2i\delta} \frac{\sin \sigma_0}{\sin \sigma \cdot \sin^4 \frac{\sigma+\sigma_0}{2}} \tag{3.30}$$

deoarece, pe cerc,

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = -\frac{\sin \sigma_0 e^{i\sigma}}{\cos \sigma - \cos \sigma_0} \quad \text{și} \quad \frac{d\zeta}{df_0} = \frac{e^{i\sigma}}{2ia^2 (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \sin \sigma}. \tag{3.31}$$

Apoi, ținînd seama de (3.28) și (3.31), rezultă

$$\frac{dg}{dz} = \frac{dg}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{df_0} \cdot \frac{df_0}{dz} = \frac{U}{4a^2} e^{-i\delta} \frac{e^{i\sigma}}{\sin \sigma \cdot \sin^2 \frac{\sigma+\sigma_0}{2}} \cdot \frac{dg}{d\zeta}. \tag{3.32}$$

Dar, conform relațiilor (1.17) și (3.31),

$$\frac{dg}{d\zeta} = \frac{dg_1}{d\zeta} - \frac{df_0}{d\zeta} = \frac{dg_1}{d\zeta} + 4ia^2 \sin \frac{\sigma+\sigma_0}{2} \sin \frac{\sigma-\sigma_0}{2} \sin \sigma \cdot e^{-i\sigma}. \tag{3.33}$$

Pe de altă parte, din expresia (3.6) a lui $g_1(\zeta)$ în care C_3 are valoarea dată de (3.8) deducem

$$\frac{dg_1}{d\zeta} = -\frac{\alpha_3}{\sin \delta} e^{i\delta} \cdot e^{-i\omega} \frac{d\omega}{d\zeta} - 4iC_2 \sin \sigma_0 (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \cdot e^{-i\sigma} -$$

$$- 4iC_2 \sin \sigma_0 \cdot e^{-i\omega} \frac{d\omega}{d\zeta} \int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{i\omega(\zeta)} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \, d\sigma.$$

Înlocuind pe $e^{-i\omega}$ și $\frac{d\omega}{d\zeta}$ cu expresiile (3.29) și (3.31), respectiv, relația precedentă devine

$$\frac{dg_1}{d\zeta} = \frac{i\alpha_3}{2 \sin \delta} \cdot \frac{e^{-i\delta} \cdot \sin \sigma}{\sin^2 \frac{\sigma+\sigma_0}{2}} + 8iC_2 \cdot e^{-i\sigma} \sin \sigma_0 \sin \frac{\sigma+\sigma_0}{2} \sin \frac{\sigma-\sigma_0}{2} +$$

$$+ 4iC_2 \sin^2 \sigma_0 \frac{e^{i\sigma}}{\sin \frac{\sigma+\sigma_0}{2}} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sin^2 \frac{\sigma+\sigma_0}{2} d\sigma. \tag{3.34}$$

Prin urmare, din (3.32), (3.33) și (3.34) se obține, efectuînd și integrala care apare în expresia lui $\frac{dg_1}{d\zeta}$,

$$\frac{dg}{dz} = \frac{iU\alpha_3 \sin\sigma_0}{8a^2 \sin\delta} e^{-i\delta} \frac{1}{\sin\sigma \cdot \sin^4 \frac{\sigma+\sigma_0}{2}} + \frac{2UiC_2 \sin\sigma_0}{a^2} e^{-i\delta} \frac{\sin\frac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin\sigma \cdot \sin\frac{\sigma+\sigma_0}{2}} +$$

$$+ \frac{UiC_2 \sin^2\sigma_0}{2a^2 \sin\sigma \cdot \sin^4 \frac{\sigma+\sigma_0}{2}} [\sigma - \sigma_0 - \sin(\sigma+\sigma_0) + \sin 2\sigma_0] +$$

$$+ Uie^{-i\delta} \frac{\sin\frac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin\frac{\sigma+\sigma_0}{2}}, \tag{3.35}$$

În definitiv, în virtutea calculelor efectuate, prin explicitarea termenilor din formula (1.57), găsim următoarea valoare a vitezei pe placă :

$$V^2 = V^{(0)^2} + \frac{M_0^2}{2} V^{(0)^2} \left[\frac{V^{(0)^2}}{U^2} - 1\right] +$$

$$+ \frac{M_0^2 U^2}{4} \left\{ \frac{\sin\sigma_0 \cdot \sin\frac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin\sigma \cdot \sin^5 \frac{\sigma+\sigma_0}{2}} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sin^2 \frac{\sigma-\sigma_0}{2} \sin\sigma d\sigma - \right.$$

$$- \frac{\alpha_3 \sin\sigma_0 \cdot \sin\frac{\sigma-\sigma_0}{2}}{4a^2 \sin\sigma \cdot \sin\delta \cdot \sin^5 \frac{\sigma+\sigma_0}{2}} - \frac{4C_2}{a^2} \frac{\sin\sigma_0 \sin^2\frac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin\sigma \cdot \sin^2\frac{\sigma+\sigma_0}{2}} -$$

$$\left. - \frac{C_2}{a^2} \frac{\sin^2\sigma_0 \sin\frac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin\sigma \cdot \sin^5 \frac{\sigma+\sigma_0}{2}} [\sigma - \sigma_0 - \sin(\sigma+\sigma_0) + \sin 2\sigma_0] \right\}. \tag{3.36}$$

Dar, ținînd seama că

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \sin^2 \frac{\sigma-\sigma_0}{2} \sin\sigma d\sigma = \frac{1}{4} \left\{ 4 \sin\frac{\sigma+\sigma_0}{2} \sin\frac{\sigma-\sigma_0}{2} - \right.$$

$$\left. - [\sin\sigma \cdot \sin(\sigma-\sigma_0) + (\sigma-\sigma_0) \sin\sigma_0] \right\} \tag{3.37}$$

expresia vitezei (3.36) devine

$$V^2 = V^{(0)^2} + \frac{M_0^2}{2} V^{(0)^2}\left[\frac{V^{(0)^2}}{U^2} - 1\right] +$$

$$+ \frac{M_0^2 U^2}{4}\left\{\frac{\sin\sigma_0 \cdot \sin\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{4\sin\sigma\cdot\sin^5\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}}\left[4\sin\frac{\sigma+\sigma_0}{2}\sin\frac{\sigma-\sigma_0}{2} - \sin\sigma\sin(\sigma-\sigma_0) - \right.\right.$$

$$\left. - (\sigma-\sigma_0)\sin\sigma_0\right] - \frac{\alpha_3 \sin\sigma_0\cdot\sin\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{4a^2\sin\delta\sin\sigma\cdot\sin^5\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}} - \frac{4C_2}{a^2}\frac{\sin\sigma_0\sin^2\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin\sigma\sin^2\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}} -$$

$$\left. - \frac{C_2}{a^2}\frac{\sin^2\sigma_0\sin\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin\sigma\cdot\sin^5\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}}[\sigma - \sigma_0 - \sin(\sigma+\sigma_0) + \sin 2\sigma_0]\right\}. \qquad (3.38)$$

Se verifică ușor că pentru valorile $\sigma = 0$ și $\sigma = \pi$ care corespund extremităților P_2 și P_1 atît numărătorul cît și numitorul parantezei care se înmulțește cu $\dfrac{M_0^2U^2}{4}$ se anulează pentru valorile constantelor C_2 și α_3 determinate de relațiile (3.25) și (3.26), iar valoarea vitezei V^2 devine egală, în aceste puncte, cu U^2.

De asemenea pentru $\sigma = \sigma_0$ viteza V se anulează, o dată cu $V^{(0)}$. Acest punct corespunde originei O și reprezintă punctul de bifurcare al curentului, atît pentru fluidul incompresibil cît și pentru cel compresibil.

Deci poziția lui O va fi dată de raportul $\dfrac{OP_1}{OP_2}$ și nu va depinde decît de σ_0, adică de orientarea plăcii, lungimile OP_1 și OP_2 avînd următoarele expresii [66]:

$$OP_1 = \frac{2a^2}{U}\left(1 + \cos\sigma_0 + \frac{\pi-\sigma_0}{2}\sin\sigma_0 + \cos\sigma_0\sin^2\sigma_0\right),$$

$$OP_2 = \frac{2a^2}{2}\left[1 - \cos\sigma_0 + \frac{\sigma_0}{2}\sin\sigma_0 - \cos\sigma_0\sin^2\sigma_0\right].$$

6. *Rezultanta forțelor hidrodinamice asupra obstacolului.* Pentru a găsi rezultanta forțelor hidrodinamice care se exercită asupra plăcii ne referim la formula (1.69):

$$R_x - iR_y = -i\int_{\bar{\omega}} (p - p_\infty)\,d\bar{z}$$

în care înlocuim expresia $p - p_\infty$ cu valoarea sa (1.74), obținută în primul capitol.

Prin urmare,

$$R_x - iR_y = -\frac{i\rho_0}{2}\int_{\bar{\mathfrak{G}}}(U^2-V^2)\,\mathrm{d}\bar{z} - \frac{i\rho_0}{8}\frac{M_0^2}{U^2}\int_{\bar{\mathfrak{G}}}(V^4-U^4)\,\mathrm{d}\bar{z}. \tag{3.39}$$

Introducînd, în această relație, expresia vitezei (3.38) și ținînd seama că pe obstacol

$$\mathrm{d}\bar{z} = \frac{1}{U}\mathrm{e}^{-i\bar{\omega}}\,\overline{\mathrm{d}f_0} = -\frac{4a^2}{U}i\mathrm{e}^{-i\delta}\sin^2\frac{\sigma+\sigma_0}{2}\sin\sigma\,\mathrm{d}\sigma$$

și că $V^{(0)^2}$ are expresia

$$V^{(0)^2} = U^2\,\mathrm{e}^{2\tau} = U^2\frac{\sin^2\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin^2\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}},$$

din (3.39) obținem

$$R_x - iR_y = -\frac{i\rho_0}{2}\int_{\bar{\mathfrak{G}}}(U^2-V^{(0)^2})\,\mathrm{d}\bar{z} + \frac{1}{2}\rho_0 a^2 U M_0^2\,\mathrm{e}^{-i\delta}\int_{\bar{\mathfrak{G}}}\frac{\sin^4\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin^2\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}}\sin\sigma\mathrm{d}\sigma -$$

$$-\rho_0 U a^2 M_0^2\,\mathrm{e}^{-i\delta}\int_{\bar{\mathfrak{G}}}\sin^2\frac{\sigma-\sigma_0}{2}\sin\sigma\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}\rho_0 U a^2 M_0^2\,\mathrm{e}^{-i\delta}\int_{\bar{\mathfrak{G}}}\sin^2\frac{\sigma+\sigma_0}{2}\sin\sigma\mathrm{d}\sigma +$$

$$+\frac{1}{2}\rho_0 U a^2\,\mathrm{e}^{-i\delta}\sin\sigma_0 M_0^2\int_{\bar{\mathfrak{G}}}\frac{\sin^2\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin^2\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}}\mathrm{d}\sigma -$$

$$-\frac{1}{4}\rho_0 U a^2\,\mathrm{e}^{-i\delta}\sin\sigma_0 M_0^2\int_{\bar{\mathfrak{G}}}\frac{\sin^2\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}\cos\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}\sin\sigma}{\sin^3\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}}\mathrm{d}\sigma -$$

$$-\frac{1}{8}\rho_0 U\sin^2\sigma_0\cdot\mathrm{e}^{-i\delta}M_0^2(a^2+4C_2)\int_{\bar{\mathfrak{G}}}\frac{(\sigma-\sigma_0)\sin\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin^3\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}}\mathrm{d}\sigma -$$

$$-\frac{1}{8}\rho_0 U \sin\sigma_0 \, e^{-i\delta} M_0^2 \left(\frac{\alpha_3}{\sin\delta} + 4C_2 \sin\sigma_0 \sin 2\sigma_0\right) \int_{\bar{\sigma}} \frac{\sin\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin^3\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}} d\sigma -$$

$$-2\rho_0 U e^{-i\delta} M_0^2 C_2 \sin\sigma_0 \int_{\bar{\sigma}} \sin^2\frac{\sigma-\sigma_0}{2} d\sigma +$$

$$+\rho_0 U e^{-i\delta} M_0^2 C_2 \sin^2\sigma_0 \int_{\bar{\sigma}} \frac{\sin\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}\cos\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}}{\sin^2\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}} d\sigma. \qquad (3.40)$$

Prima integrală din această relație reprezintă rezultanta acțiunii hidrodinamice a unui fluid incompresibil asupra aceleiași plăci și are valoarea cunoscută [66]:

$$-\frac{i\rho_0}{2}\int_{\bar{\sigma}} (U^2 - V^{(0)2})\, d\bar{z} = \rho_0 U a^2 e^{-i\delta} \pi \sin\sigma_0. \qquad (3.41)$$

Celelalte integrale ne dau, făcînd calculul, următoarele rezultate:

$$I_1 = \int_0^\pi \sin^2\frac{\sigma-\sigma_0}{2} \sin\sigma d\sigma = \frac{1}{4}(4 - \pi\sin\sigma_0),$$

$$I_2 = \int_0^\pi \sin^2\frac{\sigma+\sigma_0}{2} \sin\sigma d\sigma = \frac{1}{4}(4 + \pi\sin\sigma_0),$$

$$I_3 = \int_0^\pi \sin^2\frac{\sigma-\sigma_0}{2} d\sigma = \frac{\pi}{2} - \sin\sigma_0,$$

$$I_4 = \int_0^\pi \frac{\sin^2\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin^2\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}} d\sigma = \pi\cos 2\sigma_0 + 4\sin\sigma_0 - 2\sin 2\sigma_0 \lg\operatorname{ctg}\frac{\sigma_0}{2},$$

$$I_5 = \int_0^\pi \frac{\sin^2\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin^3\dfrac{\sigma+\sigma_0}{2}} d\sigma = 0,$$

$$I_6 = \int_0^\pi \frac{(\sigma-\sigma_0)\sin\dfrac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin^3\dfrac{(\sigma+\sigma_0)}{2}} d\sigma = 2\pi\sin\sigma_0 + 4\cos\sigma_0 \lg\operatorname{ctg}\frac{\sigma_0}{2} - 4,$$

$$I_7 = \int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{\sigma-\sigma_0}{2}\cos\frac{\sigma+\sigma_0}{2}}{\sin^2\frac{\sigma+\sigma_0}{2}}\,d\sigma = 2\cos\sigma_0 \lg\operatorname{ctg}\frac{\sigma_0}{2} + \pi\sin\sigma_0 - 4,$$

$$I_8 = \int_0^{\pi} \frac{\sin^4\frac{\sigma-\sigma_0}{2}}{\sin^2\frac{\sigma+\sigma_0}{2}}\sin\sigma d\sigma = 12\sin^4\sigma_0\cos\sigma_0\lg\operatorname{ctg}\frac{\sigma_0}{2} -$$

$$-12\sin^4\sigma + 4\sin^2\sigma_0 + 1 + \pi\sin\sigma_0\left(6\sin^4\sigma_0 - 3\sin^2\sigma_0 - \frac{3}{4}\right),$$

$$I_9 = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\frac{\sigma-\sigma_0}{2}\cos\frac{\sigma-\sigma_0}{2}\sin\sigma}{\sin^3\frac{\sigma+\sigma_0}{2}}\,d\sigma = \pi(1-11\sin^2\sigma_0+12\sin^4\sigma_0) +$$

$$+2\sin\sigma_0\cos\sigma_0\lg\operatorname{ctg}\frac{\sigma_0}{2}(12\sin^2\sigma_0 - 5) + 6\sin\sigma_0(3 - 4\sin^2\sigma_0).$$

Înlocuind în expresia (3.40) toate aceste rezultate, se obține

$$R_x - iR_y = \rho_0 U a^2 \pi e^{-i\delta}\sin\sigma_0 -$$

$$-\frac{1}{2}\rho_0 M_0^2 U a^2 e^{-i\delta}\left[12\sin^4\sigma_0\cos\sigma_0\lg\operatorname{ctg}\frac{\sigma_0}{2} - 12\sin^4\sigma_0 + \right.$$

$$\left. + 4\sin^2\sigma_0 + 1 + \pi\sin\sigma_0\left(6\sin^4\sigma_0 - 3\sin^2\sigma_0 - \frac{3}{4}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{4}\rho_0 M_0^2 U a^2 e^{-i\delta}(4 - \pi\sin\sigma_0) + \frac{1}{8}\rho_0 M_0^2 U a^2 e^{-i\delta}(4 + \pi\sin\sigma_0) -$$

$$-\frac{1}{2}\rho_0 M_0^2 U a^2 e^{-i\delta}\sin\sigma_0\left[4\sin\sigma_0 + \pi\cos 2\sigma_0 - 2\sin 2\sigma_0\lg\operatorname{ctg}\frac{\sigma_0}{2}\right] +$$

$$+\frac{1}{4}\rho_0 M_0^2 a^2 e^{-i\delta}\sin\sigma_0 \cdot U\left[2\sin\sigma_0\cos\sigma_0\lg\operatorname{ctg}\frac{\sigma_0}{2}(12\sin^2\sigma_0 - 5) + \right.$$

$$\left. + \pi(1 - 11\sin^2\sigma_0 + 12\sin^4\sigma_0) + 6\sin\sigma_0(3 - 4\sin^2\sigma_0)\right] +$$

$$+\frac{1}{8}\rho_0 M_0^2 U a^2 e^{-i\delta}\sin^2\sigma_0\left(1 + \frac{4C_2}{a^2}\right)\left[2\pi\sin\sigma_0 - 4 + \right.$$

$$+ 4 \cos \sigma_0 \lg \operatorname{ctg} \frac{\sigma_0}{2}\Big] + 2 \rho_0 U M_0^2 C_2 \sin \sigma_0 \, e^{-i\delta} \left(\frac{\pi}{2} - \sin \sigma_0\right) -$$

$$- \rho_0 M_0^2 U C_2 e^{-i\delta} \cdot \sin^2 \sigma_0 \left[2 \cos \sigma_0 \lg \operatorname{ctg} \frac{\sigma_0}{2} + \pi \sin \sigma_0 - 4\right]$$

sau, făcînd calculele și ținînd seama de valoarea constantei C_2 din (3.25),

$$R_x - iR_y = \rho_0 U a^2 e^{-i\delta} \pi \sin \sigma_0 \left[1 - M_0^2 \frac{\pi \sin \sigma_0}{2(4 + \pi \sin \sigma_0)}\right]. \qquad (3.42)$$

Introducînd în această relație expresiile

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2} + \delta \quad \text{și} \quad a^2 = \frac{lU}{4 + \pi \cos \delta}, \; [66]$$

l fiind lungimea obstacolului P_1P_2, se găsește, în definitiv, următoarea formulă prin care se exprimă rezultanta acțiunilor hidrodinamice pe placă.

$$R_x - iR_y = \rho_0 l U^2 e^{-i\delta} \frac{\pi \cos \delta}{4 + \pi \cos \delta} \left[1 - M_0^2 \frac{\pi \cos \delta}{2(4 + \pi \cos \delta)}\right]. \qquad (3.43)$$

Rezultă prin urmare

$$R_x = \rho_0 l U^2 \frac{\pi \cos^2 \delta}{4 + \pi \cos \delta}\left[1 - \frac{\pi \cos \delta}{2(4 + \pi \cos \delta)} M_0^2\right],$$

$$R_y = \rho_0 l U^2 \frac{\pi \cos \delta \cdot \sin \delta}{4 + \pi \cos \delta}\left[1 - \frac{\pi \cos \delta}{2(4 + \pi \cos \delta)} M_0^2\right]. \qquad (3.44)$$

Din relațiile (3.44) se constată, așa cum era de așteptat, că vectorul $\overline{R}$ este normal la obstacol și are mărimea

$$R = \frac{\pi \cos \delta}{4 + \pi \cos \delta} \rho_0 l U^2 \left[1 - \frac{\pi \cos \delta}{2(4 + \pi \cdot \cos \delta)} M_0^2\right]. \qquad (3.45)$$

Referindu-ne, acum, la valoarea lui ρ_0, (1.81), din primul capitol, putem scrie expresia (3.43) sub forma

$$R_x - iR_y = \rho_\infty l U^2 \; e^{-i\delta} \frac{\pi \cos \delta}{4 + \pi \cdot \cos \delta}\left[1 + \frac{2}{4 + \pi \cos \delta} M_0^2\right], \qquad (3.43')$$

coeficientul de rezistență k fiind definit de:

$$k = \frac{\pi \cos \delta}{4 + \pi \cdot \cos \delta}\left[1 + \frac{2}{4 + \pi \cos \delta} M_0^2\right] \qquad (3.46)$$

valoare care coincide cu cea dată de Ciaplîghin [1] și C. Iacob [66] prin utilizarea metodei de aproximație hodografice.

Din cercetările făcute asupra problemelor considerate rezultă că metoda de aproximație folosită permite studiul mișcărilor compresibile subsonice în planul fizic (planul mișcării) și conduce la calcule care se pot efectua pînă la capăt, contribuind astfel la scoaterea în evidență, cu mai multă ușurință, a fenomenului de compresibilitate.

De asemenea, după cum se poate constata din cele ce preced, această metodă este susceptibilă de a fi aplicată și la alte cazuri de mișcări compresibile. Acestora le vor fi consacrate lucrări ulterioare.

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОПРАВОК НА СЖИМАЕМОСТЬ ПРИ ПЛОСКИХ ДОЗВУКОВЫХ ОБТЕКАНИЯХ

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена прямым приближенным методам при исследовании стационарного безвихревого плоского дозвукового обтекания заданных препятствий.

Во введении приводится краткий исторический очерк исследований, проведенных в этой области.

Глава I посвящена исследованию прямого приближенного метода, названного автором методом Имай-Ламла-Якоба.

Показывается, что этот метод, являющийся видоизменением метода Янзена-Рэлея, сводится к использованию комплексных переменных $z=x+iy$; $\bar{z}=x-iy$ и комплексных потенциалов $f=\varphi+i\psi$ и $\overline{f}=\varphi-i\psi$. Если при вычислениях сохранить члены с M^2 (где M— число Маха в невозмущенном потоке), то поправка на сжимаемость к которой приводит этот метод выражается при помощи комлексного потенциала $f_0(z)$ несжимаемого движения относительно тех же твердых стенок и при помощи аналитической функции $g(z)$, определяемой граничными условиями для сжимаемого потока.

Этот метод приспособляется для исследования задач Гельмгольца в неограниченной жидкости.

Автор сводит краевую задачу смешанного типа, возникающую в этих случаях, учитывая особенность функции на бесконечности, к интегрированию линейного дифференциального уравнения первого порядка.

В качестве первого случая изучается задача Гельмгольца в неограниченной жидкости для пластинки нормальной к направлению потока на бесконечности. Появляющиеся при этом три постоянные, определяются затем условиями отрыва свободных линий тока от стенки, а также и тем, что получаемое решение удовлетворяет граничным условиям.

После определения функции $g(z)$ получается распределение скоростей на препятствии и вычисляется равнодействующая гидро-

динамических сил приложенных к пластинке, причем приводится также и формула для коэффициента сопротивления.

Интерес задачи состоит в том, что тот же вопрос исследовался точно С. А. Чаплыгиным при помощи годографического метода, но в предположении потока конечной ширины.

Для нахождения результатов соответствующих неограниченной жидкости Чаплыгин использовал предельный переход в приближенном выражении. Примененный автором метод дает возможность провести это исследование непосредственно для неограниченной жидкости. Полученное для коэффициента сопротивления значение совпадает со значением, приводимым Чаплыгиным.

В главе II используемый автором метод распространяется на случай симметричного двухгранного угла. Использование функций Стирлинга дает возможность определить также и в этом случае все постоянные входящие в решение задачи. Далее находится распределение скоростей на стенке, а также и формула, дающая равнодействующую гидродинамических сил приложенных к пластинке.

В главе III рассматривается случай пластинки наклонной к направлению потока. В этом случае, благодаря несимметричности конфигурации, кроме трех постоянных аналогичных тел, которые фигурировали в предыдущих главах, появляется еще один действительный параметр $p^{(1)}$, равный разности значений потенциалов скорости двух ассоциированных движений (сжимаемого и несжимаемого) на одном из концов пластинки, тогда когда эти потенциалы приравниваются на втором конце.

После определения всех четырех постоянных вычисляются распределение скоростей на пластинке и выражение равнодействующей гидродинамических сил, приложенных к препятствию.

RECHERCHES SUR LA DÉTERMINATION DES CORRECTIONS DE COMPRESSIBILITÉ POUR DES MOUVEMENTS PLANS EN RÉGIME SUBSONIQUE

RÉSUMÉ

Le travail est consacré aux méthodes directes d'approximation dans l'étude du mouvement subsonique plan, permanent, irrotationnel, autour d'obstacles donnés.

L'introduction comprend un court historique des recherches effectuées dans ce domaine.

Le chapitre I est consacré à l'étude de la méthode d'approximation directe dénommée par l'auteur méthode d'«Imaï-Lamla-Jacob».

On montre que cette méthode, qui est une variante de la méthode de Janzen-Rayleigh, revient à utiliser les variables complexes $z = x +$

$+ iy$; $\bar{z} = x - iy$, et les potentiels complexes $f = \varphi + i\psi$ et $\bar{f} = \varphi - i\psi$. Conservant dans le développement des calculs les termes en M^2 (M étant le nombre de Mach en courant non perturbé), la correction de compressibilité à laquelle conduit cette méthode s'exprime à l'aide du potentiel complexe $f_0(z)$ — du mouvement incompressible relatif aux mêmes parois solides — et d'une fonction analytique $g(z)$ que l'on détermine par les conditions aux limites relatives au mouvement compressible.

Cette méthode a été adaptée par l'auteur à l'étude de certains problèmes de Helmholtz dans un fluide non limité.

Il réduit la solution du problème aux limites, du type mixte — qui apparaît dans ces cas, en tenant compte du comportement singulier de la solution à l'infini — à l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre un.

Le premier cas étudié est celui du problème de Helmholtz, en fluide non limité, relatif à la plaque perpendiculaire à la direction du courant à l'infini. Les trois constantes qui apparaissent sont ensuite déterminées par les conditions de détachement des lignes libres, de la paroi, ainsi que par la condition que la solution obtenue vérifie, effectivement, les conditions aux limites.

La fonction $g(z)$ étant déterminée ainsi, on obtient la distribution des vitesses sur l'obstacle et on calcule la résultante des forces hydrodynamiques qui agissent sur la plaque. On donne aussi la formule du coefficient de résistance.

L'intérêt du problème réside dans le fait que cette question a été étudiée d'une manière exacte par S. A. Tchaplyguine en utilisant la méthode hodographique, mais dans l'hypothèse d'un courant de largeur finie.

Pour trouver les résultats correspondant au fluide non limité, Tchaplyguine a procédé au passage à la limite sur une expression approximative.

La méthode utilisée par l'auteur permet de faire directement cette étude dans un fluide non limité. La valeur du coefficient de résistance trouvée par lui coïncide avec celle donnée par Tchaplyguine.

Au chapitre II, il étend sa méthode au cas du dièdre symétrique. Dans ce cas encore, l'utilisation des fonctions de Stirling permet de déterminer toutes les constantes qui interviennent dans la solution du problème. Il trouve ensuite la distribution des vitesses sur la paroi ainsi que la formule qui donne la résultante des forces hydrodynamiques sur l'obstacle.

Au IIIe chapitre, on considère le cas d'une plaque oblique par rapport à la direction du courant. Dans ce cas, par suite de l'asymétrie de la configuration, outre les trois constantes, analogues à celles des chapitres précédents, il apparaît encore un paramètre réel p[1] qui représente la différence entre les valeurs des potentiels des vitesses des deux mouvements associés (compressible et non compressible) à l'une des extrémités de la plaque, lorsque ces potentiels sont considérés ayant des valeurs égales à l'autre extrémité.

Après la détermination des quatre constantes, on obtient la distribution des vitesses sur la plaque et l'expression de la résultante des forces hydrodynamiques agissant sur l'obstacle.

BIBLIOGRAFIE

1. С. А. Чаплыгин, Собрание сочинений, т. II, Москва, 1948.
2. D. Riabouchinsky, Comptes rendus, Paris, **194**, 1215 (1932).
3. B. Demtchenko, Comptes rendus, Paris, **194**, 1218 și 1720, (1932).
4. — Publications Math. de l'Univ. de Belgrade, **2**, 85—105 (1933).
5. C. Jacob, Comptes rendus, Paris, **197**, 125 (1933).
6. — Mathematica, Cluj, **8**, 205—211 (1934).
7. — Bulletin scient. de l'Ecole Polytechnique de Timișoara, **7**, 47 — 59 și 224—244 (1937).
8. — Comptes rendus, Paris, **205**, 1365—1367 (1937).
9. P. Molenbroek, Archiv der Math. und Physik, **2**, **(9)**, 157—195 (1890).
10. C. Jacob, Disquisitiones Math. et Physicae, **I**, 369—390 (1941).
11. C. Ferrari, Aerotecnica, **18**, 400—411 (1938).
12. F. Ringleb, Deutsche Mathematik, **5**, 377—384 (1940).
13. Н. А. Слезкин, Прикладная Мат. и Мех., **16(2)**, 227—230 (1952).
14. S. Popp, Revista Universității „C. I. Parhon" și a Politehnicii din București, **2**, 32—37 (1953).
15. — Revista Universității „C. I. Parhon" și a Polithenicii din București, **8**, 59—65 (1955).
16. В. С. Татаренчик, Прикладная Мат. и Мех., **8**, 401—412 (1944).
17. H. Krafft, Q. Dibble, Journal of the Aeronautical Sciences, **2**, 283 —298 (1944).
18. Ф. И. Франкл, Известия Акад. Наук СССР, **9**, 121 — 123 (1945); там же, стр. 387—422.
19. H. S. Tsien, Y. H. Huo, Tehnical Notes N.A.C.A., **995** (1946).
20. Th. Theodorsen, Technical Notes N.A.C.A., **1028** (1946); **1029** (1946).
21. S. D. Daymond, Quarterly of Mathematics, Oxford, **17**, 129—130 (1946).
22. M. I. Lighthill, Proceedings of the Royal Soc. A, **191**, 323—341, 341—351, 352—369 (1947).
23. T. M. Cherry, Proceedings of the Royal Soc. A., **192**, 45—79 (1947).
24. — Quarterly of Applied Mathematics, **9**, 92 (1951).
25. H. Seifert, Math. Annalen, **120**, 75—126 (1947).
26. D. Riabouchinsky, Publications scientifiques du Ministère de l'Air, Paris, **108**, 12—15 (1938).
27. Н. А. Слезкин, ДАН СССР, **2**, 512—515 (1935); **3**, 419—421 (1936).
28. A. Busemann, Zeitschrift für angew. Math. und Mech., **17**, 73—79 (1937).
29. B. Demtchenko, Publications scientifiques du Ministère de l'Air, Paris, **144** (1939).
30. C. Jacob, Portugaliae Mathematicae, Lisboa, **I** (3), 209—257 (1934).
31. H. T. Tsien, Journal of the Aeronautical Sciences, **7**, 399—407 (1939).
32. Th. von Kármán, Journal of the Aeronautical Sciences, **8**, 337—355 (1941).
33. Ko Tamada, Proceedings of the Phys. Math. Soc. of Japan, **22**, 208—219 (1940).
34. I. Imai, Proceedings of the Phys. Math. of Japan, **23**, 180—192, (1941).
35. J. Pérès, Comptes rendus, Paris, **219**, 501 (1944).
36. Chin-Shih-Ken, Comptes rendus, Paris, **219**, 501 (1944).
37. C. Jacob, Comptes rendus, Paris, **223**, 714 (1946).
38. Л. И. Седов, *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.* Москва, 1950.
39. А. И. Бунимович, Ученые записки, Механика, выпуск 152, **III** (1951).
40. Г. А. Домбровский, ДАН СССР, **103**, *1*, 31—34 (1955).
41. — ДАН СССР, **103**, *5*, 777—779 (1955).
42. — ДАН СССР, **103**, *6*, 985—987 (1955).
43. — ДАН СССР, **107**, *6*, 799—802 (1956).
44. I. Filimon, Comptes rendus, Paris, **244**, 2133 (1957).
45. — Bull. Math. de la Soc. Math. et Phys. de la R.P.R. **I (49)**, *3*, 269 (1957).
46. — Studii și cercetări matematice, **VIII**, *3—4*, 467—504 (1957).
47. O. Janzen, Physicalische Zeitschrift, **14**, 639 (1913).
48. Lord Rayleigh, Philosophical Magazine, **32**, 1 (1916).
49. H. Lamb, Reports and Memoranda, *1156* (1928).

50. E. PISTOLESI, *Actele Congresului Volta*. Roma, 1935, p. 296—302.
51. I. IMAI, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, **20**, 636 (1938); ibid. **23**, 180 (1941).
52. E. LAMLA, Luftfahrtforschung, **17**, 329—331 (1940).
53. Z. HASIMOTO, Proc. Phys.-Math. Soc., Japan, **25**, 563—574 (1943).
54. S. POPP, Comunicările Acad. R.P.R. **IX** *3*, 223—228 (1959).
55. L. POGGI, L'Aerotechnica, **12**, 1579 (1932); ibid., **14**, 532 (1934).
56. C. KAPLAN, National Advisory Comitee for Aeronautics Technical Raporrt, **621** (1938).
57. E. LAMLA, Luftfahrtforschung, **19**, 358—362 (1942).
58. C. JACOB, Disquisitiones Mathematicae et Physicae, **6**, 193—223 (1947).
59. — Comptes rendus, Paris, **222**, 1427 (1946).
60. — IXe Congrès international de Mécanique appliquée. Extrait des Actes, **1**, 464—475 (1957).
61. H. GLAUERT, Proceedings of the Royal Society, A, **118**, 113 (1928).
62. L. PRANDTL, Journal of Aeronaut. Research Institute, Tokyo Imperial University, **65**, 14 (1930).
63. I. IMAI, T. AIHARA, Aeronautical Research Institute, Tokyo, **194** (1940).
64. U. CISOTTI, *Idromecanica piana*. Milano, vol. II, 1922.
65. S. POPP, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, **IV**, *3*, 555—562 (1952).
66. C. JACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Éd. de L'Acad. R.P.R., Bucarest; Gauthier — Villars, Paris, 1959.
67. S. POPP, Comunicările Acad. R.P.R., **IX**, *6*, 537—540 (1959).
68. H. VILLAT, Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse (1915).
69. T. LEVI-CIVITÀ, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **23** (1907).
70. И. М. РЫЖИК и И. С. ГРАДШТЕЙН, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Москва-Ленинград, 1951.
71. N. E. JUCOVSKI, *Lucrări ştiinţifice alese*. Acad. R.P.R. 1952.
72. D. BOBYLEFF, Journal de la Soc. Russe de Physique et Chimie, **13**, 63 (1881).
73. S. POPP, Comptes rendus, Paris, **249**, 619 (1959).

ASUPRA FUNCȚIILOR ARMONICE ȘI OMOGENE CU APLICAȚII ÎN TEORIA SUPRAFEȚELOR

DE

ARNO KAHANE

§ 1. Într-o altă lucrare [1] am introdus funcțiile $P_n(t)$ și $Q_n(t)$:

$$P_n(t) = 1 - \frac{n(n-1)}{1.2}t^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}t^4 - \dots$$

$$Q_n(t) = nt - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}t^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}t^5 - \dots$$

Funcțiile $P_n(t)$ și $Q_n(t)$ (care sînt polinoame întregi, dacă n este un întreg pozitiv, și funcții raționale, dacă n este un întreg negativ) satisfac relația de recurență

$$P_n(t) - 2\ P_{n-1}(t) + (1+t^2)\ P_{n-2}\ (t) \equiv 0$$

și ecuația diferențială

$$(1+t^2)\frac{d^2f}{dt^2} - 2(n-1)\,t\frac{df}{dt} + n(n-1)f = 0. \qquad \text{(I)}$$

Am arătat că orice funcție de două variabile, $F\ (x,\ y)$, armonică omogenă, este de forma

$$F(x, y) = x^n\left[A \cdot P_n\left(\frac{y}{x}\right) + B \cdot Q_n\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

unde A și B sînt niște constante arbitrare, iar $P_n(t)$ și $Q_n(t)$ sînt funcțiile definite mai sus.

Am arătat de asemenea că o funcție monogenă de variabilă complexă

$$\varphi(z) = P\ (x,\ y) + iQ(x, y), \qquad (z = x + iy),$$

în care $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sînt funcții omogene de gradul n, nu poate fi decît de forma

$$\varphi(z) = Cz^n,$$

unde C este o constantă complexă arbitrară.

Am arătat de asemenea că, notînd cu V unghiul pe care tangenta la o curbă plană îl face cu raza vectoare a punctului de contact, singurele transformări punctuale, în care — pentru orice curbă — tg V este un invariant, sînt transformările conforme

$$Z = Az^n$$

și că, într-o transformare prin polare reciproce a oricărei curbe, în raport cu o hiperbolă echilateră avînd centrul în origine, unghiul V este conservat.

Reținem că funcțiile de *două variabile*, care sînt armonice omogene de gradul n (întreg și pozitiv) sînt *polinoame întregi*, anume polinoamele

$$x^n P_n\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{și} \quad x^n Q_n\left(\frac{y}{x}\right)$$

sau combinațiile liniare ale acestora.

În cele ce urmează, mă ocup de funcțiile armonice omogene de trei variabile și de aplicațiile geometrice ale funcțiilor omogene.

§ 2. Fie

$$F = F(x, y, z)$$

o funcție armonică omogenă; cu alte cuvinte avem

$$F = x^n f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \quad \text{și} \quad \Delta F = 0,$$

unde ΔF este laplacianul funcției F.

Notînd

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{și} \quad \frac{z}{x} = v,$$

ecuația $\Delta F = 0$ devine

$$(1+u^2) f_{uu} + 2uv f_{uv} + (1+v^2) f_{vv} - 2(n-1)(uf_u + vf_v) + n(n-1)f = 0. \quad (1)$$

Vom nota membrul întîi al acestei ecuații cu

$$E_n(f),$$

așa că ecuația (1) se scrie:

$$E_n(f) = 0. \quad (1)$$

Ecuația (1) admite următoarele soluții particulare:

1° $f_1 = A_1 \cdot P_n(u) + B_1 \cdot Q_n(u)$;

2° $f_2 = A_2 \cdot P_n(v) + B_2 \cdot Q_n(v)$;

3° $f_3 = u^n \left[A_3 \cdot P_n\left(\frac{v}{u}\right) + B_3 \cdot Q_n\left(\frac{v}{u}\right) \right]$;

Avînd în vedere că funcția

$$4^\circ \quad F(x, y, z) = xy^{n-1}\left[A \cdot P_{n-1}\left(\frac{z}{y}\right) + B \cdot Q_{n-1}\left(\frac{z}{y}\right)\right]$$

este armonică omogenă de gradul n, rezultă că funcția

$$f_4 = u^{n-1}\left[A_4 \cdot P_{n-1}\left(\frac{v}{u}\right) + B_4 \cdot Q_{n-1}\left(\frac{v}{u}\right)\right]$$

verifică ecuația (1). Dealtminteri, se vede imediat că ecuațiile

$$E_n(f) = 0 \quad \text{și} \quad E_{n-1}(f) = 0$$

au comune soluțiile particulare $f(u, v)$ care sînt omogene de gradul $n-1$, iar o funcție *omogenă* $f(u, v)$ care verifică ecuația (1) nu poate fi decît armonică și de gradul n sau $n-1$;

5° $f_5 = C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + C_4 f_4$

etc.

În vederea celor ce urmează, facem următoarele observații:

Pentru $n = 1$, ecuația (1) devine:

$$E_1(f) = (1 + u^2) f_{uu} + 2uvf_{uv} + (1 + v^2) f_{vv} = 0. \qquad (1')$$

Această ecuație, care joacă un rol deosebit de important în teoria suprafețelor, poate fi integrată prin metodele cunoscute; se pot obține ecuațiile caracteristicilor în termeni finiți, după care se poate aplica metoda lui Laplace.

Ca soluție particulară avem funcția

$$f = a \cdot \operatorname{arctg} \frac{v}{u} + b \cdot u + c \cdot v,$$

unde a, b, c sînt niște constante arbitrare, așa că o funcție armonică omogenă de gradul întîi este

$$F = x \cdot f = a \cdot x \operatorname{arctg} \frac{z}{y} + by + cz.$$

După cum se vede, în cazul a *trei variabile*, pentru n întreg și pozitiv, funcțiile armonice omogene nu mai sînt *obligatoriu* polinoame întregi, ca în cazul a două variabile.

De exemplu, funcțiile

$$F_1 = C_1 x + C_2 y + C_3 z$$

$$F_2 = C_1 x \cdot \operatorname{arctg} \frac{z}{y} + C_2 y \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{z} + C_3 z \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

sînt, amîndouă, armonice omogene de gradul întîi.

Observație. Funcția armonică omogenă

$$F = z \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x \cdot (v \cdot \operatorname{arctg} u)$$

ne dă pentru ecuația (1′) soluția particulară

$$f = v \cdot \operatorname{arctg} u.$$

Pentru $n = -1$, ecuația (1) devine

$$E_{-1}(f) = (1 + u^2)\, f_{uu} + 2uvf_{uv} + (1 + v^2)\, f_{vv} + 4(uf_u + vf_v) + 2f = 0. \quad (1'')$$

Cunoscuta funcție armonică omogenă de gradul -1:

$$F = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ne dă, pentru ecuația (1″), ecuația particulară

$$f = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}.$$

Pe de altă parte, se vede imediat că dacă $f(u, v)$ *este o soluție a ecuației*

$$E_n(f) = 0,$$

atunci f_u *și* f_v *sînt soluții ale ecuației*

$$E_{n-1}(f) = 0.$$

Deoarece funcțiile

$$f = \operatorname{arctg} \frac{v}{u} \quad \text{și} \quad f = v \cdot \operatorname{arctg} u$$

sînt soluții ale ecuației

$$E_1(f) = 0. \quad (1')$$

rezultă că, derivînd aceste funcții de două ori în raport cu u, vom obține soluții ale ecuației

$$E_{-1}(f) = 0. \quad (1'')$$

Obținem astfel pentru ecuația (1″) soluțiile particulare

$$f = \frac{uv}{(u^2 + v^2)^2} \quad \text{și} \quad f = \frac{uv}{(1 + u^2)^2}$$

care ne conduc la funcția armonică omogenă de gradul -1:

$$F = xyz\left[\frac{A}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{B}{(y^2 + z^2)^2} + \frac{C}{(z^2 + x^2)^2}\right],$$

unde A, B, C sînt niște constante.

Fiind dată o funcție $F(x, y, z)$, *armonică omogenă* de gradul n, este evident că derivînd succesiv pe $f(u, v)$, fie în raport cu u, fie în raport cu v, putem obține funcții armonice omogene de grad inferior lui n. Vrem să arătăm însă cum putem deduce funcții armonice omogene de grad superior.

TEOREMA I. *$F(x, y, z)$ fiind o funcție armonică omogenă de gradul n, funcția*

$$\Phi = r^{-(2n+1)} \cdot F(x, y, z),$$

unde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

este armonică omogenă de gradul $-(n+1)$.

Într-adevăr, avem:

$$\Phi_x = -(2n+1)\, r^{-(2n+3)} \cdot x \cdot F + r^{-(2n+1)} \cdot F_x,$$

$$\Phi_{xx} = -(2n+1)\, r^{-(2n+3)} F + (2n+1)(2n+3)\, r^{-(2n+5)} \cdot x^2 F - 2(2n+1)\, r^{-(2n+3)} \cdot x \cdot F_x + r^{-(2n+1)} \cdot F_{xx}$$

așa că

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = -3(2n+1)\, r^{-(2n+3)} \cdot F + (2n+1)(2n+3)\, r^{-(2n+5)} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot F - 2(2n+1)\, r^{-(2n+3)} \cdot (xF_x + yF_y + zF_z) + r^{-(2n+1)} \cdot (F_{xx} + F_{yy} + F_{zz}).$$

Ținînd seamă că:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$
$$xF_x + yF_y + zF_z = nF,$$
$$F_{xx} + F_{yy} + F_{zz} = 0,$$

avem

$$\Delta\Phi = [-3(2n+1) + (2n+1)(2n+3) - 2n(2n+1)] \cdot r^{-(2n+3)} \cdot F$$

și deci

$$\Delta\Phi = 0,$$

ceea ce era de demonstrat.

Consecințe:

a) Pentru $n < -\frac{1}{2}$, gradul lui Φ va fi mai mare decît gradul lui F.

b) Funcția $F(x, y, z)$ fiind armonică omogenă de gradul -1, funcția

$$\Phi = r^3 \,(AF_x + BF_y + CF_z),$$

unde A, B, C sînt niște constante, va fi armonică omogenă de gradul 1. Avem

$$F = \frac{1}{x} \cdot f(u, v), \qquad \left(u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{z}{x}\right),$$

unde $f(u, v)$ este o soluție a ecuației

$$E_{-1}(f) = 0 \tag{1''}$$

Deducem :

$$F_x = -\frac{1}{x^2} \cdot f - \frac{y}{x^3} f_u - \frac{z}{x^3} f_v,$$

$$F_y = \frac{1}{x^2} f_u, \qquad F_z = \frac{1}{x^2} f_v$$

și deci

$$\Phi = x \cdot (1 + u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} \cdot [(B - Au) f_u + (C - Av) f_v - Af].$$

Rezultă, prin urmare, că dacă $f(u, v)$ este o soluție a ecuației

$$E_{-1}(f) = 0. \tag{1''}$$

funcția

$$(1 + u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} [Bf_u + Cf_v - A(uf_u + vf_v + f)]$$

este o soluție a ecuației

$$E_1(f) = 0. \tag{1'}$$

Astfel, soluția particulară

$$\frac{uv}{(u^2 + v^2)^2} \cdot$$

a ecuației (1''), ne conduce la soluția particulară

$$(1 + u^2 + v)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{B(v^3 - 3u^2v) + C(u^3 - 3uv^2) + Auv(u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2)^3}$$

a ecuației (1').

Pentru $B = 1$, $C = 1$, $A = 3$, găsim pentru ecuația (1'), soluția particulară

$$f = (1 + u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} \frac{u^3 + v^3}{(u^2 + v^2)^3} \cdot$$

Pentru $B = 1$, $C = 1$, $A = 6$, găsim soluția

$$f = (1 + u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{u + v}{u^2 + v^2}\right)^3.$$

Pentru $B = 0$, $C = 0$, $A = 1$, găsim soluția

$$f = (1 + u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{uv}{(u^2 + v^2)^2} \cdot$$

Cu aceste soluții, obținem următoarele funcții armonice omogene de gradul întîi :

$$F = x\,(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{y^3 + z^3}{(y^2 + z^2)^3},$$

$$F = x\,(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{y + z}{y^2 + z^2}\right)^3,$$

$$F = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{yz}{(y^2 + z^2)^2},$$

precum și cele deduse prin permutări circulare și combinațiile liniare ale acestora.

După cum vom vedea, funcțiile armonice de gradul întîi prezintă un interes deosebit pentru teoria suprafețelor.

Pentru $n = 0$, ecuația (1) devine

$$E_0(f) = (1 + u^2)\, f_{uu} + 2\, uv\, f_{uv} + (1 + v^2)\, f_{vv} + 2\, uf_u + 2\, vf_v = 0. \quad (1''')$$

După cele arătate la punctul 4°, această ecuație admite soluția particulară

$$f = u^{-1}\left[A \cdot P_{-1}\left(\frac{v}{u}\right) + B \cdot Q_{-1}\left(\frac{v}{u}\right)\right],$$

sau, ținînd seamă [1] că

$$P_{-1}(t) = \frac{1}{1 + t^2}, \qquad Q_{-1}(t) = \frac{-t}{1 + t^2},$$

$$f = \frac{Au + Bv}{u^2 + v^2}.$$

Prin urmare, o funcție armonică omogenă de gradul zero, în trei variabile, este

$$F = x\,\frac{Ay + Bz}{y^2 + z^2}$$

și de asemenea

$$F = x\,\frac{C_1 y + C_2 z}{y^2 + z^2} + y\,\frac{C_3 z + C_4 x}{z^2 + x^2} + z\,\frac{C_5 x + C_6 y}{x^2 + y^2}.$$

Pentru $n = 2$, ecuația (1) devine

$$E_2(f) = (1 + u^2)\, f_{uu} + 2\, uv\, f_{uv} + (1 + v^2)\, f_{vv} - 2\,(uf_u + vf_v - f) = 0 \quad (1^{IV})$$

astfel că orice soluție a ecuației (1^{IV}) ne conduce la o funcție armonică omogenă de gradul doi și reciproc, orice funcție armonică omogenă de gradul doi, ne dă o soluție a ecuației (1^{IV}). De exemplu, funcția armonică omogenă de gradul doi :

$$F = ax^2 + by^2 - (a + b)z^2$$

ne dă pentru ecuația (1^{IV}) soluția particulară

$$f = a + bu^2 - (a + b)v^2,$$

după cum se poate lesne verifica. Invers, să căutăm pentru ecuația (1^{IV}) o soluție de forma

$$f = f(u^2 + v^2).$$

Punînd

$$t = u^2 + v^2,$$

obținem ecuația diferențială

$$2t(t + 1)\ f''(t) + (2 - t)\ f'(t) + f = 0. \tag{2}$$

Această ecuație admite soluția particulară

$$f_1 = t - 2,$$

așa că soluția generală a ecuației (2) este

$$f = C_1 \cdot (t-2) + C_2 \cdot (t - 2) \cdot \int \frac{e^{\int \frac{t-2}{2t(t+1)}\,dt}}{(t - 2)^2}\,dt$$

adică

$$f = C_1 \cdot (t - 2) + C_2 \cdot (t - 2) \cdot \int \frac{(t + 1)^{\frac{3}{2}}}{t(t-2)^2}\,dt.$$

Efectuînd cvadratura, obținem

$$f = C_1 \cdot (t - 2) + C_2 \cdot (t - 2) \left[-\frac{3\sqrt{t + 1}}{2(t - 2)} + \frac{1}{4} L \frac{\sqrt{t + 1} - 1}{\sqrt{t + 1} + 1} \right].$$

Prin urmare, ecuația (1^{IV}) admite soluțiile particulare

$$f_1 = u^2 + v^2 - 2,$$

$$f_2 = -6\sqrt{u^2 + v^2 + 1} + (u^2 + v^2 - 2)\ L \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + 1} - 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1} + 1}.$$

Cu ajutorul lui f_1 găsim funcția armonică omogenă de gradul doi:

$$F_1 = y^2 + z^2 - 2x^2$$

care este un polinom algebric de gradul doi, iar cu ajutorul lui f_2 găsim funcția armonică omogenă de gradul doi

$$F_2 = -6\,x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + (y^2 + z^2 - 2\,x^2) \cdot L \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + x},$$

care este o funcție transcendentă.

§ 3. Fiind dată suprafața

$$(\Sigma) \qquad z = f(x, y)$$

se știe că expresia *curburii totale*, într-un punct $M(x, y, z)$ al suprafeței, este

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} \tag{3}$$

iar *curbura medie* este

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1 + q^2)\ r - 2\,pqs + (1 + p^2)\ t}{(p^2 + q^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Distanța de la origine la planul tangent în M la suprafață fiind

$$\pm d = \frac{px + qy - z}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

avem

$$\frac{K}{d^4} = \frac{rt - s^2}{(px + qy - z)^4} \tag{5}$$

și

$$\frac{H}{d^3} = \frac{(1+q^2)r - 2\,pqs + (1+p^2)t}{(px + qy - z)}. \tag{6}$$

Unghiul V, pe care îl face planul tangent în M la suprafață cu raza vectoare OM, este dat de formula

$$\sin V = \frac{px + qy - z}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{7}$$

Vom numi suprafețe (Ω) toate suprafețele reprezentate printr-o ecuație de forma

$$z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

cu alte cuvinte cînd z este o *funcție omogenă* de un grad oarecare.

Cînd $n = 1$, suprafața (Ω) este un con cu vîrful în origine.

Este evident că paraboloizii

$$2z = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \quad \text{sau} \quad z = \frac{xy}{a}$$

sînt suprafețe (Ω).

Dacă z este o *funcție armonică omogenă* în x și y, vom avea conform celor arătate la § 1 :

$$z = x^n \left[A \cdot P_n\left(\frac{y}{x}\right) + B \cdot Q_n\left(\frac{y}{x}\right)\right].$$

Aceste suprafețe le vom numi suprafețe (AΩ). Astfel de suprafețe sînt, de exemplu, paraboloizii hiperbolici echilateri

$$2z = a\,(x^2 - y^2) + 2bxy$$

sau suprafețele de gradul trei

$$3z = a(x^3 - 3xy^2) + b(3x^2y - y^3).$$

Observație. Pentru n *întreg și pozitiv*, z este un *polinom întreg în* x *și* y, așa că suprafețele (AΩ) sînt algebrice de gradul n (cînd n este pozitiv și întreg).

Am văzut, [1][1]), că soluția generală a ecuației (I) se poate scrie

$$f = A \cdot P_n + B \cdot P_n \cdot \int \frac{(1 + t^2)^{n-1}}{P_n^2}\,dt;$$

cînd $n = 0$ obținem

$$f = A + B \cdot \operatorname{arctg} t,$$

așa că o funcție armonică omogenă de gradul zero, în două variabile, este

$$\varphi = a \cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Prin urmare, helicoidul

$$z = a \cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \tag{8}$$

este de asemenea o suprafață (AΩ).

§ 4. Fiind dată o suprafață oarecare

$$(\Sigma) \qquad z = f(x,\ y)$$

să considerăm suprafața $(\overline{\Sigma})$, transformata prin polare reciproce a suprafeței (Σ) în raport cu paraboloidul hiperbolic echilater:

$$2z = a(x^2 - y^2) + 2bxy.$$

Planul tagent în M, la suprafața (Σ), este

$$p\,(X - x) + q\ (Y - y) = Z - z;$$

fie $\overline{M}\ (u,\ v,\ w)$ polul acestui plan în raport cu paraboloidul și deci punctul generator al suprafeței $\overline{\Sigma}$, transformata prin polare reciproce a suprafeței Σ.

Planul polar al punctului $\overline{M}\ (u,\ v,\ w)$, în raport cu paraboloidul hiperbolic, fiind

$$Z + w = a(uX - vY) + b\ (vX + uY),$$

1) p. 415.

rezultă că

$$\frac{au+bv}{p}=\frac{bu-av}{q}=1=\frac{w}{px+qy-z}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} au+bv&=p,\\ bu-av&=q,\\ w&=px+qy-z,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

de unde

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{ap+bq}{a^2+b^2},\\ v&=\frac{bp-aq}{a^2+b^2},\\ w&=px+qy-z.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Vom nota cu $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\bar{t}$ derivatele parțiale ale lui w, în raport cu u și v.

Avem

$$\left\{\begin{aligned} xr+ys&=\bar{p}\,\frac{ar+bs}{a^2+b^2}+\bar{q}\,\frac{br-as}{a^2+b^2},\\ xs+yt&=\bar{p}\,\frac{as+bt}{a^2+b^2}+\bar{q}\cdot\frac{bs-at}{a^2+b^2}.\end{aligned}\right.$$

Deducem, în ipoteza că $rt-s^2\neq 0$, cu alte cuvinte că suprafața (Σ) nu este desfășurabilă pe un plan,

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}&=ax+by,\\ \bar{q}&=bx-ay.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Din ultimele formule rezultă

$$\left\{\begin{aligned} \bar{r}\cdot\frac{ar+bs}{a^2+b^2}+\bar{s}\cdot\frac{br-as}{a^2+b^2}&=a\\ \bar{r}\cdot\frac{as+bt}{a^2+b^2}+\bar{s}\cdot\frac{bs-at}{a^2+b^2}&=b\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \bar{s}\cdot\frac{ar+bs}{a^2+b^2}+\bar{t}\cdot\frac{br-as}{a^2+b^2}&=b,\\ \bar{s}\cdot\frac{as+bt}{a^2+b^2}+\bar{t}\cdot\frac{bs-at}{a^2+b^2}&=-a.\end{aligned}\right.$$

Aceste relații ne dau:

$$\left.\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{a^2 t - 2\,abs + b^2 r}{rt - s^2} \\ \bar{s} &= \frac{(a^2 - b^2)s + ab(t - r)}{rt - s^2} \\ \bar{t} &= \frac{a^2 r + 2\,abs + b^2 t}{rt - s^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Se deduce imediat că, invers, avem formulele:

$$x = \frac{a\bar{p} + b\bar{q}}{a^2 + b^2}, y = \frac{b\bar{p} - a\bar{q}}{a^2 + b^2}, z = \bar{p}u + \bar{q}v - w, \tag{13}$$

$$r = \frac{a^2 \bar{t} - 2\,ab\bar{s} + b^2 \bar{r}}{\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2},$$

$$s = \frac{(a^2 - b^2)\,\bar{s} + ab\,(\bar{t} - \bar{r})}{\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2}$$

$$t = \frac{a^2 \bar{r} + 2\,ab\bar{s} + b^2 \bar{t}}{\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2}$$

și că avem relația importantă

$$\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2}{rt - s^2}\,. \tag{14}$$

Deducem de asemenea că:

$$\bar{r} + \bar{t} = \frac{(a^2 + b^2)\,(r + t)}{rt - s^2},$$

$$r + t = \frac{(a^2 + b^2)\,(\bar{r} + \bar{t})}{\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2}$$

de unde rezultă că *dacă z este o funcție armonică în x și y, atunci w este o funcție armonică în u și v.*

Dacă suprafața (Σ) este o suprafață (Ω), avem

$$px + qy = nz$$

și deci

$$\frac{K}{d^4} = \frac{rt - s^2}{(n - 1)^4 z^4};$$

în același timp

$$w = px + q\,y - z = (n - 1)z.$$

Deoarece

$$\bar{p}u + \bar{q}v = z + w = \frac{w}{n-1} + w = \frac{n}{n-1} w.$$

rezultă că w este o funcție omogenă de gradul $\frac{n}{n-1}$ în u și v, adică $\bar{\Sigma}$ este tot o suprafață (Ω).

Cînd $n = 1$ și deci suparfața Σ este un con, avem $rt - s^2 = 0$ și formulele stabilite nu mai sînt valabile; însă în acest caz avem

$$w = px + qy - z = 0.$$

Dacă z este o funcție omogenă de gradul $n = 0$ sau $n = 2$ în x și y, atunci w este o funcție omogenă de același grad în u și v. În sfîrșit, dacă Σ este o suprafață $(A\Omega)$, atunci $\bar{\Sigma}$ este de asemenea o suprafață $(A\Omega)$.

Σ fiind o suprafață (Ω), pentru $\bar{\Sigma}$ avem

$$\frac{K}{\bar{d}^4} = \frac{\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2}{(\bar{p}u + \bar{q}v - w)^4} = \frac{(\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2)\ (n-1)^4}{w^4},$$

de unde

$$\frac{K}{d^4} \cdot \frac{\bar{K}}{\bar{d}^4} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{(n-1)^4 z^8} = \frac{(n-1)^4 (a^2 + b^2)^2}{w^8}$$

și

$$\left(\frac{K}{d^4} z^4\right) \cdot \left(\frac{\bar{K}}{\bar{d}^4} w^4\right) = (a^2 + b^2)^2.$$

Prin urmare, în cazul suprafețelor (Ω), dacă suprafața Σ este o suprafață Țițeica [2] (pentru care invariantul centro-afin $\frac{K}{d^4}$ este constant), atunci pentru suprafața $\bar{\Sigma}$, transformata prin polare reciproce a suprafeței Σ în raport cu paraboloidul hiperbolic echilater

$$2z = a(x^2 - y^2) + 2\ bxy,$$

$\frac{\bar{K}}{\bar{d}^4}$ variază în raport invers cu puterea a opta a cotei punctului și reciproc.

Dacă, pentru suprafața Σ, raportul $\frac{K}{d^4}$ variază în raport invers cu puterea a patra a cotei punctului, atunci suprafața $\bar{\Sigma}$ se bucură de aceeași proprietate.

§ 5. *Suprafețele (Ω) care sînt suprafețe Țițeica.* Am văzut că în cazul unei suprafețe (Ω) avem

$$\frac{K}{d^4} = \frac{rt - s^2}{(n-1)^4 z^4}. \tag{15}$$

Fie

$$z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ecuația unei suprafețe (Ω); notînd cu $\varphi'(\lambda)$ derivata funcției $\varphi(\lambda)$, avem

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x} = n x^{n-1} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-2} y \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right), \\ q &= \frac{\partial z}{\partial y} = x^{n-1} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= n(n-1) x^{n-2} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - 2(n-1) x^{n-3} y \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-4} y^2 \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) \\ s &= (n-1) x^{n-2} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-3} y \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right), \\ t &= x^{n-2} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Prin urmare

$$rt - s^2 = (n-1) \cdot x^{2n-4} \cdot [n \varphi\varphi'' - (n-1)\varphi'^2] \tag{18}$$

și deci

$$\frac{K}{d^4} = \frac{n\varphi\varphi'' - (n-1)\varphi'^2}{(n-1)^3 x^{2n+4} \cdot \varphi^4}.$$

În cazul unei suprafețe Țițeica, trebuie să avem

$$\frac{K}{d^4} = C \text{ (const.)},$$

adică

$$\frac{n \cdot \varphi \cdot \varphi'' - (n-1)\varphi'^2}{\varphi^4} = (n-1)^3 \cdot C \cdot x^{2n+4}.$$

Deoarece $n \neq 1$, iar în membrul întîi avem o funcție de $\frac{y}{x}$, pe cînd în membrul al doilea avem o funcție de x, rezultă că, în mod necesar,

$$n = -2$$

și φ trebuie să verifice ecuația diferențială

$$2\varphi\varphi'' - 3\varphi'^2 - 27 \cdot C \cdot \varphi^4 = 0. \tag{19}$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$\varphi = \frac{1}{\alpha \cdot \lambda^2 + \sqrt{27\,C + 4\alpha\beta} \cdot \lambda + \beta}, \qquad \left(\lambda = \frac{y}{x}\right),$$

unde α și β sînt două constante arbitrare.

Putem exprima același lucru spunînd că soluția generală a ecuației (19) este

$$\varphi = \frac{1}{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2},$$

unde constantele α, β, γ satisfac relația

$$4(\beta^2 - \alpha\gamma) = 27 \cdot C.$$

Prin urmare, singurele suprafețe (Ω) care sînt și suprafețe Țițeica, sînt suprafețele

$$z = \frac{1}{\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2}$$

pentru care

$$\frac{K}{d^4} = C = \frac{4(\beta^2 - \alpha\gamma)}{27}.$$

Curbura totală a acestor suprafețe este negativă sau pozitivă după cum discriminantul

$$\alpha\gamma - \beta^2$$

este pozitiv sau negativ.

Se deduce imediat că nu există nici o suprafață ($A\Omega$), *reală*, care să fie suprafață Țițeica.

§ 6. *Suprafețele* (Ω) *pentru care* $\frac{K}{d^4} = \frac{C}{z^4}$. Ținînd seamă de formula (15), va trebui să avem

$$rt - s^2 = (n-1)^4 \cdot C.$$

Dar am văzut în paragraful precedent că

$$rt - s^2 = (n-1) \cdot x^{2n-4} \cdot [n \cdot \varphi \cdot \varphi'' - (n-1) \cdot \varphi'^2];$$

prin urmare trebuie ca

$$n \cdot \varphi \cdot \varphi'' - (n-1) \cdot \varphi'^2 = \frac{(n-1)^3 \cdot C}{x^{2n-4}}.$$

Deoarece $n \neq 1$ și în membrul întîi avem o funcție de $\frac{y}{x}$, pe cînd în membrul al doilea avem o funcție de x, rezultă că, în mod necesar,

$$n = 2,$$

iar φ verifică ecuația diferențială

$$2\varphi\varphi'' - \varphi'^2 = C. \qquad (20)$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$\varphi = \alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2, \qquad \left(\lambda = \frac{y}{x}\right),$$

unde constantele α, β, γ sînt legate prin relația

$$4(\gamma\alpha - \beta^2) = C.$$

Prin urmare, singurele suprafețe (Ω), pentru care $\frac{K}{d^4}$ variază în raport invers cu puterea a patra a cotei z, sînt paraboloizii

$$z = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

pentru care

$$\frac{K}{d^4} = \frac{4(\gamma\alpha - \beta^2)}{z^4}.$$

Conform celor arătate la § 4, transformata prin dualitate $\overline{\Sigma}$ fiind tot o suprafață (Ω) de gradul doi, rezultă că paraboloizii se transformă în paraboloizi de aceeași natură, deoarece :

$$\overline{rt} - \overline{s}^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2}{rt - s^2}$$

și deci curbura totală își păstrează semnul.

§ 7. Fiind dată o suprafață oarecare

$$(\Sigma) \qquad z = f(x, y)$$

să considerăm acum suprafața ($\overline{\Sigma}$), transformata prin polare reciproce a suprafeței (Σ), în raport cu hiperboloidul de rotație cu o pînză

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1. \tag{21}$$

Planul tangent în M la suprafața (Σ) este

$$p(X - x) + q(Y - y) = Z - z;$$

fie $\overline{M}(u, v, w)$ polul acestui plan în raport cu hiperboloidul (21). Planul polar al punctului $\overline{M}(u, v, w)$, punct care generează suprafața $\overline{\Sigma}$, este

$$uX + vY - wZ = 1.$$

Rezultă că

$$\frac{u}{p} = \frac{v}{q} = w = \frac{1}{px + qy - z},$$

de unde

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{p}{px+qy-z} = pw, \\ v &= \frac{q}{px+qy-z} = qw, \\ w &= \frac{1}{px+qy-z}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Notînd cu $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\bar{t}$ derivatele parțiale ale lui w în raport cu u și v, avem

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \bar{p}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{q}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \bar{p}\frac{\partial u}{\partial y} + \bar{q}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right.$$

sau, în virtutea relațiilor (22),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \bar{p}\left(rw + p\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \bar{q}\left(sw + q\frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \bar{p}\left(sw + p\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \bar{q}\left(tw + q\frac{\partial w}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

Așa că:

$$\bar{p} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & sw + q\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & tw + q\frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} rw + p\frac{\partial w}{\partial x} & sw + q\frac{\partial w}{\partial x} \\ sw + p\frac{\partial w}{\partial y} & tw + q\frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}},$$

$$\bar{p} = \frac{w\left(t\frac{\partial w}{\partial x} - s\frac{\partial w}{\partial y}\right)}{w^2(rt - s^2) + pw\left(t\frac{\partial w}{\partial x} - s\frac{\partial w}{\partial y}\right) + qw\left(r\frac{\partial w}{\partial y} - s\frac{\partial w}{\partial x}\right)}.$$

Însă

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -(xr + ys)w^2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -(xs + yt)w^2,$$

de unde

$$t\frac{\partial w}{\partial x} - s\frac{\partial w}{\partial y} = -xw^2(rt - s^2),$$

$$r\frac{\partial w}{\partial y} - s\frac{\partial w}{\partial x} = -yw^2(rt - s^2).$$

Prin urmare, putem scrie

$$\bar{p} = \frac{-xw^3(rt - s^2)}{w^2(rt - s^2) - xpw^3(rt - s^2) - yqw^3(rt - s^2)}.$$

Presupunînd că

$$rt - s^2 \neq 0,$$

avem

$$\bar{p} = \frac{-x}{\frac{1}{w} - xp - yq} = \frac{x}{z}.$$

În mod analog găsim

$$\bar{q} = \frac{y}{z}$$

rezultat evident dealtminteri, deoarece polaritatea fiind involutivă putem schimba (x, y, z, p, q) cu $(u, v, w, \bar{p}, \bar{q})$.
Prin urmare, avem formulele :

$$u = \frac{p}{px + qy - z}; \quad v = \frac{q}{px + qy - z}; \quad w = \frac{1}{px + qy - z}$$

$$\bar{p} = \frac{x}{z} \qquad \bar{q} = \frac{y}{z}$$

și reciproc

$$x = \frac{\bar{p}}{\bar{p}u + \bar{q}v - w}; \quad y = \frac{\bar{q}}{\bar{p}u + \bar{q}v - w}; \quad z = \frac{1}{\bar{p}u + \bar{q}v - w},$$

$$p = \frac{u}{w}, \qquad q = \frac{v}{w}.$$

Notînd cu V unghiul pe care îl face planul tangent în M la suprafața Σ, cu raza vectoare OM, avem

$$\sin V = \frac{px + qy - z}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{p\frac{x}{z} + q\frac{y}{z} - 1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\sqrt{\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1}}.$$

Notînd cu $\overline{V}$ unghiul pe care îl face planul tangent în $\overline{M}$ la suprafața $\overline{\Sigma}$, cu raza vectoare $\overline{OM}$, avem

$$\sin \overline{V} = \frac{\bar{p}\frac{u}{w} + \bar{q}\frac{v}{w} - 1}{\sqrt{\bar{p}^2+\bar{q}^2+1}\ \sqrt{\left(\frac{u}{w}\right)^2+\left(\frac{v}{w}\right)^2+1}} =$$

$$= \frac{\frac{x}{z}\cdot p + \frac{y}{z}\cdot q - 1}{\sqrt{\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2+1}\ \sqrt{p^2+q^2+1}} = \sin V.$$

Avem prin urmare teorema :

În transformarea prin polare reciproce a oricărei suprafețe în raport cu hiperboloidul

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

unghiul pe care îl face planul tangent la suprafață cu raza vectoare a punctului de contact se păstrează.

Să presupunem acum că suprafața (Σ) este o suprafață (Ω) de gradul n, cu alte cuvinte

$$(\Sigma) \quad z = x^n \cdot f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (n \neq 1).$$

Avem

$$px + qy = nz$$

și deci

$$px + qy - z = (n-1)z$$

așa că, în transformarea prin dualitate în raport cu hiperboloidul (21), putem scrie :

$$u = \frac{p}{(n-1)\,z}; \quad v = \frac{q}{(n-1)\,z}; \quad w = \frac{1}{(n-1)\,z};$$

$$\bar{p} = \frac{x}{z}; \qquad \bar{q} = \frac{y}{z}.$$

Deducem că

$$\bar{p}u + \bar{q}v = \frac{x}{z}\cdot\frac{p}{(n-1)\,z} + \frac{y}{z}\cdot\frac{q}{(n-1)\,z} = \frac{nz}{(n-1)\,z^2} = \frac{n}{(n-1)\,z} = nw$$

și deci suprafața $(\overline{\Sigma})$ este de asemenea o suprafață (Ω) de același grad n.

§ 8. *Asupra transformărilor punctuale care păstrează unghiul V.* Am arătat [1] că, în cazul unei curbe plane, *singurele* transformări punctuale care păstrează unghiul pe care tangenta la curbă îl face cu raza vectoare a punctului de contact, sînt transformările conforme

$$Z = C \cdot z^n,$$

unde C este o constantă complexă arbitrară. Avem

$$z^n = (x + iy)^n = u(x, y) + iv(x, y),$$

unde

$$u = x^n P_n\left(\frac{y}{x}\right) \text{ și } v = x^n \cdot Q_n\left(\frac{y}{x}\right),$$

$P_n(t)$ și $Q_n(t)$ fiind funcțiile arătate în § 1.

Prin urmare, am avut de luat în considerație numai transformările punctuale

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x, y) = x^n \cdot P_n\left(\frac{y}{x}\right) \\ v &= v(x, y) = x^n \cdot Q_n\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

deoarece constanta complexă C nu face decît să introducă în plus o omotetie și o rotație.

Funcțiile u și v satisfac următoarele relații :

$$u^2 + v^2 = \rho^{2n}, \qquad (\rho^2 = x^2 + y^2), \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} xu_x + yu_y &= nu, \\ xv_x + yv_y &= nv, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 &= n^2 \cdot \rho^{2n-2}, \\ v_x^2 + v_y^2 &= n^2 \cdot \rho^{2n-2}, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$u_x v_x + u_y v_y = 0. \tag{27}$$

Aceasta ne face să bănuim că, în cazul unei suprafețe, transformările punctuale :

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x, y, z), \\ v &= v(x, y, z), \\ w &= w(x, y, z), \end{aligned}\right. \qquad \left(\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} \neq 0\right), \tag{28}$$

în care u, v, w satisfac relațiile :

$$u^2 + v^2 + w^2 = r^{2n}, \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2) \tag{24'}$$

$$\left.\begin{aligned} xu_x + yu_y + zu_z &= nu, \\ xv_x + yv_y + zv_z &= nv, \\ xw_x + yw_y + zw_z &= nw, \end{aligned}\right\} \tag{25'}$$

$$\left.\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 &= n^2 \cdot r^{2n-2}, \\ v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 &= n^2 \cdot r^{2n-2}, \\ w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 &= n^2 \cdot r^{2n-2}, \end{aligned}\right\} \tag{26'}$$

$$\left.\begin{aligned} u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z &= 0, \\ v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z &= 0, \\ w_x u_x + w_y u_y + w_z u_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{27'}$$

păstrează și ele unghiul V pe care îl face planul tangent la suprafață cu raza vectoare a punctului de contact.

Este evident că aceste relații sînt compatibile, cel puțin pentru anumite valori ale lui n.

Lăsînd de o parte cazul :

$$\left\{\begin{aligned} u &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ v &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ w &= a_3 x + b_3 y + c_3 z, \end{aligned}\right.$$

unde (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) sînt cosinusurile directoare a trei direcții ortogonale, în care toate relațiile (24'), (25'), (26'), (27') sînt satisfăcute pentru $n = 1$, n-avem decît să considerăm formulele de transformare prin inversiune

$$u = \frac{x}{r^2}, \qquad v = \frac{y}{r^2}, \qquad w = \frac{z}{r^2}$$

care de asemenea satisfac toate relațiile pentru $n = -1$.

Într-adevăr,

$$u^2 + v^2 + w^2 = r^{-2}. \tag{24''}$$

Funcțiile u, v, w fiind omogene de gradul -1, relațiile (25') sînt evident satisfăcute pentru $n = -1$.

Apoi

$$u_x = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}, \quad u_y = -\frac{2xy}{r^4}, \quad u_z = \frac{-2xz}{r^4}$$

așa că

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \frac{1}{r^4} - \frac{4x^2}{r^6} + \frac{4x^2(x^2+y^2+z^2)}{r^8} = \frac{1}{r^4} = (-1)^2 \cdot r^{-4}, \tag{26''}$$

și la fel pentru v și w.

În sfîrșit

$$v_x = \frac{-2xy}{r^4}, \qquad v_y = \frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4}, \qquad v_z = \frac{-2yz}{r^4},$$

de unde

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = -\frac{2xy}{r^6} + \frac{4x^3 y}{r^8} - \frac{2xy}{r^6} + \frac{4xy^3}{r^8} + \frac{4xyz^2}{r^8} = -\frac{4xy}{r^6} + \frac{4xy(x^2+y^2+z^2)}{r^8} = 0. \tag{27''}$$

Dealtminteri, relațiile (26') nu sînt independente de celelalte relații; într-adevăr, din relația (24'), deducem:

$$\begin{cases} u \cdot u_x + v \cdot v_x + w \cdot w_x = n \cdot x \cdot r^{2n-2}, \\ u \cdot u_y + v \cdot v_y + w \cdot w_y = n \cdot y \cdot r^{2n-2}, \\ u \cdot u_z + v \cdot v_z + w \cdot w_z = n \cdot z \cdot r^{2n-2}. \end{cases}$$

Înmulțim aceste relații respectiv cu u_x, u_y, u_z și adunăm; ținînd seamă de relațiile (25') și (27'), obținem

$$u(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = n \cdot r^{2n-2} \cdot nu$$

sau

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = n^2 \cdot r^{2n-2}.$$

În mod analog deducem celelalte două relații (26'), așa că relațiile (26') sînt o consecință a relațiilor (24'), (25'), (27').

Să arătăm acum că, fiind dată suprafața

$$(\Sigma) \qquad z = z(x, y),$$

transformarea punctuală (28) — în care u, v, w satisfac relațiile (24'), (25'), (26'), (27') — conservă unghiul V.

Fie

$$(\overline{\Sigma}) \qquad w = w(u, v)$$

ecuația suprafeței transformate. Notînd cu $\overline{p}$ și $\overline{q}$ derivatele parțiale ale lui w în raport cu u și v, avem

$$w_x + pw_z = \overline{p}(u_x + pu_z) + \overline{q}(v_x + pv_z)$$
$$w_y + qw_z = \overline{p}(u_y + qu_z) + \overline{q}(v_y + qv_z)$$

la care adăugăm relația evidentă

$$w_z - w_z = \overline{p}(u_z - u_z) + \overline{q}(v_z - v_z).$$

Aceste trei relații se pot scrie astfel:

$$\left.\begin{aligned} p(\overline{p}u_z + \overline{q}v_z - w_z) &= -(\overline{p}u_x + \overline{q}v_x - w_x), \\ q(\overline{p}u_z + \overline{q}v_z - w_z) &= -(\overline{p}u_y + \overline{q}v_y - w_y), \\ -(\overline{p}u_z + \overline{q}v_z - w_z) &= -(\overline{p}u_z + \overline{q}v_z - w_z). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Înmulțim ambii membri ai acestor trei relații respectiv cu x, y, z și adunăm; ținînd seama de relațiile (25′), obținem

$$(px + qy - z)(\bar{p}u_z + \bar{q}v_z - w_z) = -n(\bar{p}u + \bar{q}v - w), \qquad (30)$$

de unde

$$\bar{p}u + \bar{q}v - w = \frac{(px + qy - z)(\bar{p}u_z + \bar{q}v_z - w_z)}{-n}.$$

În sfîrșit, dacă ridicăm la pătrat ambii membri ai relațiilor (29) și adunăm, ținînd seama de relațiile (26′) și (27′), obținem

$$(p^2 + q^2 + 1)(\bar{p}u_z + \bar{q}v_z - w_z)^2 = (\bar{p}^2 + \bar{q}^2 + 1) \cdot n^2 r^{2n-2},$$

de unde

$$\sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2 + 1} = \pm \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot (\bar{p}u_z + \bar{q}v_z - w_z)}{n r^{n-1}}.$$

Fie $\overline{M}(u, v, w)$ punctul de pe $\overline{\Sigma}$ corespunzător punctului $M(x, y, z)$ de pe Σ, și $\overline{V}$ unghiul pe care îl face planul tangent în $\overline{M}$ la $\overline{\Sigma}$ cu raza vectoare $O\overline{M}$. Avem

$$\sin \overline{V} = \frac{|\bar{p}u + \bar{q}v - w|}{\sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2 + 1} \cdot \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{(px + qy - z)(\bar{p}u_z + \bar{q}v_z - w_z)}{-n}}{\dfrac{\pm\sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot (\bar{p}u_z + \bar{q}v_z - w_z)}{n \cdot r^{n-1}} \cdot r^n} =$$

$$= \frac{|px + qy - z|}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin V.$$

§ 9. *Determinarea funcțiilor* u, v, w. Vrem să arătăm că omotetia și inversiunea, compuse cu cea mai generală transformare ortogonală a variabilelor, sînt singurele transformări care satisfac sistemul dat.

Să considerăm sistemul mai puțin restrictiv:

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = \alpha^2(r), \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2),$$

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = w_x u_x + w_y u_y + w_z u_z = 0.$$

Pentru aceste transformări avem de asemenea:

$$u_x^2 + v_x^2 + w_x^2 = u_y^2 + v_y^2 + w_y^2 = u_z^2 + v_z^2 + w_z^2 = \alpha^2(r)$$

$$u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y = u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z = u_z u_x + v_z v_x + w_z w_x = 0$$

deoarece matricea

$$\left\| \begin{matrix} \frac{1}{\alpha} u_x & \frac{1}{\alpha} u_y & \frac{1}{\alpha} u_z \\ \frac{1}{\alpha} v_x & \frac{1}{\alpha} v_y & \frac{1}{\alpha} v_z \\ \frac{1}{\alpha} w_x & \frac{1}{\alpha} w_y & \frac{1}{\alpha} w_z \end{matrix} \right\|$$

este ortogonală. Prin urmare, avem

$$du^2 + dv^2 + dw^2 = \alpha^2(r) \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{31}$$

ceea ce ne arată că metrica

$$ds^2 = \alpha^2(r) \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

are curbura nulă. Rezultă (a se vedea [3][1])):

$$\alpha'^2 r + 2\alpha\alpha' = 0, \quad \left(\alpha' = \frac{d\alpha}{dr}\right)$$

și deci

$$\alpha = \text{const. sau } \alpha = \frac{C}{r^2}, \quad (C = \text{const.}).$$

Ținînd seama de [3][2]), pentru

$$\alpha = \frac{C}{r^2},$$

obținem soluția particulară

$$u = \frac{Cx}{r^2}, \quad v = \frac{Cy}{r^2}, \quad w = \frac{Cz}{r^2},$$

iar în cazul $\alpha = \text{const.}$, transformarea

$$(x, y, z) \to (u, v, w)$$

este o omotetie, care pot fi compuse cu cea mai generală transformare ortogonală a variabilelor x, y, z sau u, v, w.

§ 10. *Funcțiile armonice omogene și suprafețele* minima.
Fie Σ o suprafață *minima*, pentru care avem

$$(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 0. \tag{32}$$

Pentru suprafața $\overline{\Sigma}$, transformata prin polare reciproce a suprafeței Σ, în raport cu paraboloidul hiperbolic echilater

$$2z = x^2 - y^2,$$

[1]) p. 357, formula (8).
[2]) p. 357, formula (10).

vom avea, conform formulelor (9) și (13),

$$p = u, \quad q = -v$$

$$r = \frac{\bar{t}}{\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2}, \quad s = \frac{\bar{s}}{\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2}, \quad t = \frac{\bar{r}}{\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2},$$

încît ecuația (32) devine

$$(1 + u^2)\,\bar{r} + 2uv\bar{s} + (1 + v^2)\,\bar{t} = 0, \tag{33}$$

adică tocmai ecuația (1′) cu ajutorul căreia determinăm funcțiile armonice omogene de gradul întîi.

Prin urmare : *fiecărei funcții armonice omogene de gradul întîi, îi corespunde o suprafață* minima *și reciproc, orice suprafață* minima *ne determină o funcție armonică omogenă de gradul întîi.*

Astfel, se știe că suprafața

$$z = L\cos x - L\cos y$$

este o suprafață minima.

Transformata prin polare reciproce a acestei suprafețe în raport cu paraboloidul hiperbolic echilater

$$2z = x^2 - y^2$$

este

$$w = -u\cdot\operatorname{arctg} u + v\cdot\operatorname{arctg} v + \frac{1}{2}L\frac{1+u^2}{1+v^2}.$$

Rezultă că funcția

$$F(x, y, z) = -y\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + z\cdot\operatorname{arctg}\frac{z}{x} + \frac{x}{2}L\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}$$

este armonică omogenă de gradul întîi, după cum se poate lesne verifica.

Se știe de asemenea [4] că Legendre a arătat că pentru suprafețele minima, x, y, z, considerate ca funcții de p și q, satisfac ecuația

$$(1+p^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2} + 2pq\frac{\partial^2\theta}{\partial p\,\partial q} + (1+q^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial q^2} + 2p\frac{\partial\theta}{\partial p} + 2q\frac{\partial\theta}{\partial q} = 0. \tag{34}$$

Or, această ecuație nu diferă de ecuația (1‴), cu ajutorul căreia determinăm funcțiile armonice de gradul zero.

Prin urmare, trei funcții armonice de gradul zero ne determină o suprafață minima. Astfel, am văzut, la § 2, că ecuația

$$E_0(f) = 0 \tag{1‴}$$

admite soluțiile particulare :

$$f_1 = \frac{c_1u + c_2v}{u^2 + v^2}, \quad f_2 = u\frac{c_3v + c_4}{1 + v^2}, \quad f_4 = v\frac{c_5 + c_6u}{1 + u^2}.$$

Prin urmare, suprafața

$$x = \frac{c_1 u + c_2 v}{u^2 + v^2}, \quad y = u\frac{c_3 v + c_4}{1 + v^2}, \quad z = v\frac{c_5 + c_6 u}{1 + u^2}$$

este o suprafață minima.

Am văzut, de asemenea la § 2, că funcțiile

$$F_1 = \frac{Axyz}{(x^2 + y^2)^2}, \quad F_2 = \frac{Bxyz}{(y^2 + z^2)^2}, \quad F_3 = \frac{Cxyz}{(z^2 + x^2)^2}$$

sînt armonice de gradul -1. Rezultă, conform teoremei I, că funcțiile

$$rF_1, \; rF_2, \; rF_3$$

sînt armonice de gradul zero. Prin urmare, suprafața

$$x = A\frac{uv\sqrt{1 + u^2 + v^2}}{(1 + u^2)^2},$$

$$y = B\frac{uv\sqrt{1 + u^2 + v^2}}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$z = C\frac{uv\sqrt{1 + u^2 + v^2}}{(1 + v^2)^2}$$

este de asemenea o suprafață minima.

Este evident că, cunoscînd o funcție armonică omogenă de gradul n (întreg) > 1, prin derivări succesive putem obține funcții armonice omogene de gradul întîi și în consecință suprafețele minima corespunzătoare, iar pentru n (întreg) < -2, teorema I ne permite să deducem funcții armonice de grad mai mare decît 1.

În sfîrșit, să considerăm o soluție oarecare $f(u, v)$ a ecuației

$$E_{-1}(f) \equiv (1 + u^2) f_{uu} + 2uvf_{uv} + (1 + v^2) f_{vv} + 4uf_u + 4vf_v + 2f = 0. \quad (35)$$

Sistemul

$$\left.\begin{aligned} \theta_u &= -uvf_u - (1 + v^2) f_v - vf \\ \theta_v &= (1 + u^2) f_u + uvf_v + uf \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

este integrabil în virtutea relației (35) și θ astfel determinat, verifică ecuația

$$E_0(f) = (1 + u^2)\theta_{uu} + 2uv\theta_{uv} + (1 + v^2)\theta_{vv} + 2u\theta_u + 2v\theta_v = 0 \quad (37)$$

ceea ce de asemenea ne permite să trecem de la funcțiile armonice omogene de gradul -1 la cele de gradul zero.

ОБ ОДНОРОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

РЕЗЮМЕ

§ 1. В одной из своих работ [1] автор изучил функции $P_n(t)$ и $Q_n(t)$ из § 1, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (I) и показал, что любая однородная гармоническая функция $F(x, y)$ представима в виде

$$x^n\left[A\cdot P_n\left(\frac{y}{x}\right)+B\cdot Q_n\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

где A и B — произвольные постоянные (т.е. является многочленом при целом и положительном n), и занимался геометрическими приложениями преобразований

$$u=x^n\cdot P_n\left(\frac{y}{x}\right),\quad v=x^n\cdot Q_n\left(\frac{y}{x}\right).$$

§ 2. Показывается, что определение гармонических функций $F(x, y, z)$, однородных степени n, сводится к интегрированию уравнения

$$E_n(f)=0, \tag{1}$$

которое изучается в этом параграфе. Доказывается, что если задана гармоническая функция $F(x, y, z)$, однородная степени n, то функция

$$\Phi=r^{-(2n+1)}\cdot F(x, y\cdot z),\quad (r^2=x^2+y^2+z^2)$$

является гармонической, однородной степени $-(n+1)$.

Однородные гармонические функции в особенности те, степень которых равна 1 или 0, представляют особый интерес в теории поверхностей.

§§ 3 и **4.** В этих двух параграфах рассматриваются поверхности (Ω) и (АΩ) т.е. поверхности

$$z=x^n\cdot f\left(\frac{y}{x}\right),\quad z=x^n\left[A\cdot P_n\left(\frac{y}{x}\right)+B\cdot Q_n\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

и исследуются их преобразования при помощи взаимных поляр относительно равнобокого гиперболического параболоида

$$2z=a(x^2-y^2)+2bxy.$$

§§ 5 и **6.** Исследуются поверхности (Ω), являющиеся поверхностями Цицейки и поверхности (Ω), для которых $\frac{K}{d^4}$ (где K полная кривизна и d расстояние от начала координат до касательной плос-

кости) изменяется обратно пропорционально аппликате точки, это свойство сохраняется при вышеуказанном преобразовании.

§ 7. Показывается, что при преобразовании любой поверхности при помощи взаимных поляр относительно гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$,, угол V между касательной плоскостью к поверхности и радиус-вектором точки касания сохраняется, а поверхности (Ω) остаются поверхностями (Ω) той же степени.

§§ 8 и **9.** Изучаются точечные преобразования сохраняющие угол V и показывается, что единственные преобразования $(x, y, z)\,(u, v, w)$, удовлетворяющие системе

$$\begin{aligned} &u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = \alpha^2(r) \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2) \\ &u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = w_x u_x + w_y u_y + w_z u_z = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

это преобразование подобия и инверсия, вместе с наиболее общим ортогональным преобразованием переменных.

§ 10. Показывается, как однородные гармональные функции приводят к *минимальным* поверхностям. В частности, каждой гармонической функции, однородной степени 1 соответствует *минимальная* поверхность и обратно, а три гармонические функции, однородные нулевой степени также определяют минимальную поверхность; возможен переход от гармонических функций однородной степени -1 к таким же функциям нулевой степени.

SUR LES FONCTIONS HARMONIQUES ET HOMOGÈNES ET LEURS APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

RÉSUMÉ

§ 1. Dans un autre ouvrage [1], l'auteur a étudié les fonctions $P_n(t)$ et $Q_n(t)$ du paragr. 1, qui satisfont à l'équation différentielle (I); il a montré que toute fonction $F(x, y)$ harmonique homogène est de la forme

$$x^n\left[A \cdot P_n\left(\frac{y}{x}\right) + B \cdot Q_n\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

où A et B sont des constantes arbitraires, donc un polynôme pour n entier positif, et il s'est occupé des applications géométriques des transformations

$$u = x^n \cdot P_n\left(\frac{y}{x}\right), \quad v = x^n \cdot Q_n\left(\frac{y}{x}\right).$$

§ 2. On montre que la recherche des fonctions $F(x, y, z)$, harmoniques homogènes, de degré n, revient à l'intégration de l'équation (1), $E_n(f) = 0$, dont l'étude fait l'objet de ce paragraphe. On démontre que, étant donnée une fonction $F(x, y, z)$ harmonique homogène de degré n, la fonction

$$\Phi = r^{-(2n+1)} \cdot F(x, y, z), \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$$

est harmonique homogène de degré $-(n+1)$.

Les fonctions harmoniques homogènes présentent un intérêt particulier dans la théorie des surfaces, surtout celles de degré 1 et 0.

§§ 3 et **4.** Dans ces deux paragraphes on considère les surfaces (Ω) et (A Ω), c'est-à-dire les surfaces

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad z = x^n \left[A \cdot P_n\left(\frac{y}{x}\right) + B \cdot Q_n\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

et on étudie leurs transformées par polaires réciproques par rapport au paraboloïde hyperbolique équilatère

$$2z = a(x^2 - y^2) + 2bxy.$$

§§ 5 et **6.** On étudie les surfaces (Ω), qui sont des surfaces «Tzitzéica», et les surfaces (Ω) pour lesquelles $\frac{K}{d^4}$ (K étant la courbure totale et d la distance de l'origine au plan tangent) varie en raison inverse de la quatrième puissance de la cote du point, propriété qui se conserve dans la transformation indiquée plus haut.

§ 7. On montre que dans la transformation par polaires réciproques d'une surface quelconque, par rapport au hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, l'angle V — que fait le plan tangent à la surface avec le rayon vecteur du point de contact — est conservé, et les surfaces (Ω) restent des surfaces (Ω) du même degré.

§§ 8 et **9.** On étudie les transformations ponctuelles qui conservent l'angle V et l'on montre que les seules transformations, $(x, y, z) \to (u, v, w)$, qui satisfont au système

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = \alpha^2(r), \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2),$$

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = w_x u_x + w_y u_y + w_z u_z = 0,$$

sont l'homothétie et l'inversion, composées avec la plus générale transformation orthogonale des variables.

§ 10. On montre comment les fonctions harmoniques homogènes conduisent aux surfaces *minima*.

En particulier, à chaque fonction harmonique homogène du premier degré correspond une surface *minima* et réciproquement, tandis que

trois fonctions harmoniques homogènes de degré zéro déterminent également une surface *minima* ; on peut passer des fonctions harmoniques homogènes de degré — 1 à celles de degré zéro.

BIBLIOGRAFIE

1. ARNO KAHANE, *Asupra transformărilor în care unghiul pe care îl face tangenta la o curbă plană cu raza vectoare a punctului de contact, este un invariant.* Studii şi cercetări matematice, **X**, *2* (1959).
2. — *Elemente din teoria congruenţelor de drepte.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956, p. 108.
3. C. TELEMAN, *Transformările care lasă invariant grupul ortogonal sau grupul simplectic.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, **VII**, *2* (1955).
4. G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Gauthier-Villars, Paris, 1914, vol. I, p. 325.

ASUPRA UNEI DENSITĂȚI VECTORIALE ASOCIATE UNEI TRANSFORMĂRI PUNCTUALE DE SPEȚĂ TREI

DE

G. G. VRĂNCEANU

Fiind dată o transformare punctuală între două plane proiective, G. Vrănceanu a arătat [1] că acesteia i se poate asocia un tensor Π^i_{jk} pentru care $\Pi^i_{ik} = 0$ și că transformarea este de speță trei dacă tensorul $\Pi_{jk} = \Pi^i_{js}\,\Pi^s_{ki}$ este egal cu zero.

În alte lucrări [2], [3] am considerat unele probleme în legătură cu transformările de speță trei.

Punînd

$$\Pi^2_{11} = -\frac{p^2}{q},\quad \Pi^1_{22} = \frac{q^2}{p},\quad \Pi^2_{21} = -\Pi^1_{11} = -p, \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = q,$$

am determinat ecuațiile cu derivate parțiale la care trebuie să satisfacă p și q pentru ca $\prod_{jk}$ să definească o transformare de speță trei.

În această lucrare vom presupune, ceea ce este posibil, că avem

$$\Pi^2_{11} = m^3, \Pi^1_{22} = -n^3, \Pi^2_{21} = -\Pi^1_{11} = m^2 n, \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = m n^2 \qquad (1)$$

și vom arăta că m și n sînt componentele unui vector densitate covariant față de o transformare proiectivă de coordonate m și n transformîndu-se după formulele

$$m = \frac{1}{\sqrt[3]{D}}\left(m'\frac{\partial x'}{\partial x} + n'\frac{\partial y'}{\partial x}\right), n = \frac{1}{\sqrt[3]{D}}\left(m'\frac{\partial x'}{\partial y} + n'\frac{\partial y'}{\partial y}\right), \qquad (2)$$

unde D este determinantul funcțional

$$\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x} \qquad (2')$$

și vom considera de asemenea formele canonice la care se pot reduce m și n precum și formele canonice ale transformărilor punctuale corespunzătoare.

I

Să presupunem că avem o transformare de coordonate

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2), \qquad (i = 1,2) \quad (3)$$

și un tensor Π^i_{jk} care se transformă după formulele

$$\Pi'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} = \Pi^s_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^s}. \quad (4)$$

Să considerăm cazul cînd $i = j = 1$, $k = 2$ și $i = j = 2$, $k = 1$. Avem

$$\Pi'^1_{11} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial y} + \Pi'^1_{12}\left(\frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial y}\right) + \Pi'^1_{22} \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y} = \Pi^1_{12} \frac{\partial x'}{\partial x} + \Pi^2_{12} \frac{\partial x'}{\partial y}$$

$$\Pi'^2_{11} \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial x'}{\partial x} + \Pi'^2_{12}\left(\frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial x}\right) + \Pi'^2_{12} \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y} = \Pi^1_{12} \frac{\partial y'}{\partial x} + \Pi^2_{12} \frac{\partial y'}{\partial y}. \quad (5)$$

Ținînd seama de formulele (1), obținem sistemul

$$m n^2 D = \left(m' \frac{\partial x'}{\partial y} + n' \frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 \left(m' \frac{\partial x'}{\partial x} + n' \frac{\partial y'}{\partial x}\right),$$

$$m^2 n D = \left(m' \frac{\partial x'}{\partial x} + n' \frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 \left(m' \frac{\partial x'}{\partial y} + n' \frac{\partial y'}{\partial y}\right),$$

care, rezolvat în raport cu m și n, ne dă formulele (2).

Rezultă că unei transformări punctuale de speță trei i se poate asocia un vector densitate covariant deci o formă Pfaff

$$m\,\mathrm{d}x + n\,\mathrm{d}y \quad (6)$$

care la o transformare proiectivă de variabile se transformă după formula

$$m'\,\mathrm{d}x' + n'\,\mathrm{d}y' = \sqrt[3]{D}\,(m\,\mathrm{d}x + n\,\mathrm{d}y).$$

Egalînd cu zero forma (6) se obțin curbele caracteristice ale transformării. Presupunînd că transformarea punctuală între planul proectiv $P_2(x, y)$ și P'_2 este definită de formulele

$$v_i = v_i(x, y), \qquad (i = 1, 2, 3),$$

unde v_1, v_2, v_3 sînt coordonatele omogene în planul P'_2, atunci v_i sînt trei soluții independente ale sistemului [3]

$$\begin{aligned} &v_{x^2} - m^2 n\, v_x + m^3 v_y + v\,[(m^2 n)_x - m^3_y] = 0\,, \\ &v_{xy} - mn^2 v_x + m^2 n\, v_y + v[(mn^2)_x - (m^2 n)_y] = 0\,, \\ &v_{y^2} - n^3 v_x + mn^2 v_y + v\,[n^3_x - (mn^2)_y] = 0\,. \end{aligned} \quad (7)$$

Condițiile de integrabilitate ale acestui sistem ne dau

$$\begin{aligned} 2(m^2n)_{xy} &= m^3_{y^2} + (mn^2)_{x^2}, \\ 2(mn^2)_{xy} &= m^3_{x^2} + (m^2n)_{y^2}. \end{aligned} \tag{7'}$$

Rezultă prin urmare următoarea teoremă:

Fiind dată o transformare punctuală de speță trei, i se poate asocia o formă Pfaff (6), unde m și n satisfac la sistemul de ecuații cu derivate parțiale (7') și invers.

II

Să presupunem acum că m,n sînt dezvoltate în serie în jurul unui punct fix, de exemplu originea axelor de coordonate, deci că avem

$$\begin{aligned} m &= m_{00} + m_{10}x + m_{01}y + \frac{1}{2}(m_{20}x^2 + 2m_{11}xy + m_{02}y^2) + \dots \\ n &= n_{00} + n_{10}x + n_{01}y + \frac{1}{2}(n_{20}x^2 + 2n_{11}xy + n_{02}y^2) + \dots \end{aligned} \tag{8}$$

unde termenii nescriși sînt de ordinul al treilea.

Fie acum

$$x' = \frac{\alpha x + \beta y}{1 + px + qy}, \qquad y' = \frac{\gamma x + \delta y}{1 + px + qy} \tag{9}$$

o transformare proiectivă ce lasă originea neschimbată.

Să vedem cum se transformă m, n printr-o asemenea transformare. Dacă punem

$$\begin{aligned} m' &= m'_{00} + m'_{10}x' + m'_{01}y' + \frac{1}{2}(m'_{20}x'^2 + 2m'_{11}x'y' + m'_{02}y'^2) + \dots, \\ n' &= n'_{00} + n'_{10}x' + n'_{01}y' + \frac{1}{2}(n'_{20}x'^2 + 2n'_{11}x'y' + n'_{02}y'^2) + \dots \end{aligned} \tag{10}$$

Avem atunci, ținînd seamă de formulele (7) dezvoltate în serie,

$$\begin{aligned} m' &= m'_{00} + m'_{10}(\alpha x + \beta y) + m'_{01}(\gamma x + \delta y) + \frac{m'_{20}}{2}(\alpha x + \beta y)^2 + \\ &+ \frac{m'_{02}}{2}(\gamma x + \delta y)^2 + m'_{11}(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) - \\ &- (px + qy)[m'_{10}(\alpha x + \beta y) + m'_{01}(\gamma x + \delta y)] + \dots \\ n' &= n'_{00} + n'_{10}(\alpha x + \beta y) + n'_{01}(\gamma x + \delta y) + \frac{n'_{20}}{2}(\alpha x + \beta y)^2 + \\ &+ \frac{n'_{02}}{2}(\gamma x + \delta y)^2 + n'_{11}(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) - \\ &- (px + qy)[n'_{10}(\alpha x + \beta y) + n'_{01}(\gamma x + \delta y)] + \dots \end{aligned} \tag{11}$$

Pe de altă parte avem

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{(\alpha q-\beta p)y+\alpha}{(1+px+qy)^2},\qquad \frac{\partial x}{\partial y}=\frac{(\beta p-\alpha q)x+\beta}{(1+px+qy)^2},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x}=\frac{(\gamma q-\delta p)y+\gamma}{(1+px+qy)^2},\qquad \frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{(\delta p-\gamma q)x+\delta}{(1+px+qy)^2}.$$

Ținînd seama de formulele (2) obținem

$$\begin{aligned} m&=\frac{1}{\sqrt[3]{D}}\left[m'\frac{(\alpha q-\beta p)y+\alpha}{(1+px+qy)^2}+n'\frac{(\gamma q-\delta p)y+\gamma}{(1+px+qy)^2}\right],\\ n&=\frac{1}{\sqrt[3]{D}}\left[m'\frac{(\beta p-\alpha q)x+\beta}{(1+px+qy)^2}+n'\frac{(\delta p-\gamma q)x+\delta}{(1+px+qy)^2}\right], \end{aligned}\tag{12}$$

iar D este dat de

$$D=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(1+px+qy)^2}.\tag{13}$$

Rezultă atunci pentru m și n valorile

$$\begin{aligned} m&=\frac{m'[(\alpha q-\beta p)y+\alpha]+n'[(\gamma q-\delta p)y+\gamma]}{\sqrt[3]{\alpha\delta-\beta\gamma}(1+px+qy)},\\ n&=\frac{m'[(\beta p-\alpha q)x+\beta]+n'[(\delta p-\gamma q)x+\delta]}{\sqrt[3]{\alpha\delta-\beta\gamma}(1+px+qy)}. \end{aligned}\tag{14}$$

Rezolvînd în raport cu m' și n' rezultă

$$\begin{aligned} m'&=\frac{(\delta p-\gamma q)(mx+ny)+m\delta-n\gamma}{\sqrt[3]{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}},\\ n'&=\frac{(\alpha q-\beta p)(mx+ny)+n\alpha-m\beta}{\sqrt[3]{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}}. \end{aligned}\tag{15}$$

Ținînd seamă de valorile lui m' și n' date de (11) și egalînd termenii liberi se obțin relațiile

$$m'_{00}=\frac{m_{00}\delta-n_{00}\gamma}{\sqrt[3]{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}},\qquad n'_{00}=\frac{n_{00}\alpha-m_{00}\beta}{\sqrt[3]{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}}.\tag{16}$$

De asemenea termenii de gradul întîi în x și y ne dau

$$\begin{aligned} m'_{10}\alpha+m'_{01}\gamma&=\frac{m_{00}(\delta p-\gamma q)+m_{10}\delta-n_{10}\gamma}{\sqrt[3]{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}},\\ m'_{10}\beta+m'_{01}\delta&=\frac{n_{00}(\delta p-\gamma q)+m_{01}\delta-n_{01}\gamma}{\sqrt[3]{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}},\\ n'_{10}\alpha+n'_{01}\gamma&=\frac{m_{00}(\alpha q-\beta p)+n_{10}\alpha-m_{10}\beta}{\sqrt[3]{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}},\\ n'_{10}\beta+n'_{01}\delta&=\frac{n_{00}(\alpha q-\beta p)+n_{01}\alpha-m_{01}\beta}{\sqrt[3]{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}}. \end{aligned}\tag{17}$$

Să presupunem că m_{00} și n_{00} nu sînt zero în același timp. Putem să reducem pe m'_{00} la unu și n'_{00} la zero. Presupunînd că avem de la început

$$m_{00} = 1, \quad n_{00} = 0,$$

atunci transformările proiective (9) care păstrează aceste valori satisfac condițiile

$$\beta = 0, \quad \delta = \alpha^2. \tag{18}$$

Formulele (17) se scriu sub forma

$$\begin{aligned} m'_{01} &= \frac{m_{01}}{\alpha^2} - \frac{n_{01}\gamma}{\alpha^4}, \\ m'_{10} &= \frac{\alpha^2(p + m_{10}) - \gamma(q + m_{01} - n_{10})}{\alpha^3} + \frac{n_{01}\gamma^2}{\alpha^5}, \\ \alpha n'_{10} &+ \gamma n'_{01} = \alpha(q + n_{10}), \\ n'_{01} &= \frac{n_{01}}{\alpha}. \end{aligned} \tag{19}$$

Să considerăm în primul rînd cazul cînd n_{01} este diferit de zero. În acest caz putem presupune n_{01} egal cu unu și deci α egal cu unu. Primele ecuații (19) devin

$$\begin{aligned} m'_{01} &= m_{01} - \gamma, \\ m'_{10} &= p + m_{10} - \gamma(q + m_{01} - n_{10}) + \gamma^2, \\ n'_{10} &= q - \gamma. \end{aligned} \tag{20}$$

Aceste ecuații ne arată că putem face să avem

$$m_{01} = m_{10} = n_{10} = 0$$

și transformările (9) care păstrează aceste cantități se reduc la transformarea identică

$$x' = x, \quad y' = y.$$

Rezultă pentru m, n formele canonice

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{1}{2}(m_{20}x^2 + 2m_{11}xy + m_{02}y^2) + \dots \\ n &= y + \frac{1}{2}(n_{20}x^2 + 2n_{11}xy + n_{02}y^2) + \dots \end{aligned} \tag{21}$$

Forma canonică (21) este compatibilă cu sistemul de ecuații cu derivate parțiale (7) deoarece acest sistem este verificat dacă luăm $m = 1, n = y$.

Să considerăm acum cazul cînd n_{01} este egal cu zero. Primele formule (19), ținînd seamă de (18), se scriu

$$m'_{01} = \frac{m_{01}}{\alpha^2},$$

$$m'_{10} = \frac{\alpha^2(p + m_{10}) - \gamma(q + m_{01} - n_{10})}{\alpha^3}, \tag{22}$$

$$n'_{10} = q + n_{10}.$$

Vom considera mai întîi m_{01} diferit de zero. Putem presupune m_{01} egal cu unu deci α egal cu unu. În acest caz ultimele ecuații (22) ne arată că putem presupune

$$n_{10} = m_{10} = 0, \quad q = 0, \quad p = \gamma.$$

Grupul se reduce la

$$x' = \frac{x}{1 + px}, \qquad y' = \frac{px + y}{1 + px} \tag{22'}$$

în timp ce m, n sînt dați de formulele (8):

$$m = 1 + y + \frac{1}{2}(m_{20}x^2 + 2m_{11}xy + m_{02}y^2) + \dots$$

$$n = \frac{1}{2}(n_{20}x^2 + 2n_{11}xy + n_{02}y^2) + \dots$$

Termenii constanți din ecuațiile (7) ne dau

$$\begin{aligned} n_{02} &= 0, \\ 3m_{02} &= 2n_{11} - 6. \end{aligned} \tag{22''}$$

Rezultă că putem scrie

$$\begin{aligned} m &= 1 + y + \frac{1}{2}\left(m_{20}x^2 + 2m_{11}xy + \frac{2n_{11} - 6}{3}y^2\right) + \dots \\ n &= \frac{1}{2}(n_{20}x^2 + 2n_{11}xy) + \dots \end{aligned} \tag{23}$$

Să vedem ce devin m și n prin transformarea (22'). Formulele (15) ne arată că avem

$$m' = (mx + ny)\,p + m, \; n' = n.$$

Deci ținînd seamă de a doua formulă (23) avem

$$n'_{20}x^2 + 2n'_{11}(px^2 + xy) = n_{20}x^2 + 2n_{11}xy.$$

Prin urmare rezultă

$$\begin{aligned} n'_{11} &= n_{11}, \\ n'_{20} &= n_{20} - 2p\,n_{11}. \end{aligned} \tag{24}$$

În mod analog, prima formulă (23) ne dă

$$1 + (px + y)(1 - px) + \frac{1}{2}\left[m'_{20}x^2 + 2m'_{11}(px^2 + xy) + \right.$$
$$\left. + \frac{2n_{11} - 6}{3}(px + y)^2\right] + \ldots = 1 + y + \frac{1}{2}\left[m_{20}x^2 + 2m_{11}xy + \right.$$
$$\left. + \frac{2n_{11} - 6}{3}y^2\right] + px + pxy - \frac{p}{2}[n_{20}x^2 + 2n_{11}xy].$$

Egalînd coeficientul lui xy obținem

$$m'_{11} = m_{11} + 4p - \frac{5}{3}pn_{11}.$$

Eliminînd n_{11} între a doua formulă (24) și cea precedentă obținem

$$m'_{11} - \frac{5}{6}n'_{20} = m_{11} - \frac{5}{6}n_{20} + 4p.$$

Putem alege p astfel încît primul membru să fie nul, deci putem presupune de la început

$$n_{20} = \frac{6}{5}m_{11}.$$

Deci m și n se scriu sub forma canonică

$$\begin{aligned} m &= 1 + y + \frac{1}{2}\left(m_{20}x^2 + 2m_{11}xy + \frac{2n_{11} - 6}{3}y^2\right) + \ldots \\ n &= \frac{3}{5}m_{11}x^2 + n_{11}xy + \ldots \end{aligned} \tag{25}$$

și transformările de variabile ce păstrează această formă se reduc la transformarea identică.

III

Să considerăm acum problema de a găsi formele canonice ale transformărilor punctuale corespunzătoare celor două forme canonice date de formulele (21) și (25).

Vom presupune că soluția v a sistemului (7) este de forma

$$v = \alpha + \beta x + \gamma y + \frac{1}{2}(\lambda x^2 + 2\mu xy + \nu y^2) +$$

$$+ \frac{1}{6}(a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \dots$$

Dacă m, n sînt dați de formulele (21), atunci sistemul (7) unde considerăm explicit termenii numai pînă la ordinul doi se scrie sub forma

$$\begin{aligned} \lambda + \gamma + (a_{30} + \mu)\, x + (a_{21} - \beta + \nu)\, y &= 0, \\ \mu - \alpha + (a_{21} - \beta)\, x + a_{12} y &= 0, \\ \beta^2 + a_{12} x + (a_{03} - 2\alpha)\, y &= 0. \end{aligned}$$

Egalînd termenii constanți rezultă

$$\nu = 0, \quad \lambda = -\gamma, \quad \mu = \alpha.$$

Dacă egalăm termenii de primul ordin în x și y obținem

$$a_{30} = -\alpha, \quad a_{21} = \beta, \quad a_{12} = 0, \quad a_{03} = 2\alpha.$$

Deci v se scrie sub forma

$$v = \alpha + \beta x + \gamma y + \frac{1}{2}(2\alpha xy - \gamma x^2) + \frac{1}{6}(2\alpha y^3 + 3\beta x^2 y - \alpha x^3) + \dots$$

sau

$$v = \alpha\left(1 + xy - \frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{6}\right) + \beta\left(x + \frac{x^2 y}{2}\right) + \gamma\left(y - \frac{x^2}{2}\right)$$

neglijînd termenii de ordinul al patrulea.

Avem deci ca soluții independente în coordonate omogene

$$v^1 = x + \frac{x^2 y}{2} + \dots$$

$$v^2 = y - \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$v^3 = 1 + xy - \frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{6} + \dots$$

Putem deci lua drept coordonate neomogene

$$X = \frac{v^1}{v^3} \qquad Y = \frac{v^2}{v^3}$$

și prin urmare avem

$$X = \left(x + \frac{x^2 y}{2} + \ldots\right)\left(1 - xy + \frac{x^3}{6} - \frac{y^3}{6} + \ldots\right) = x - \frac{x^2 y}{2} + \ldots$$
$$Y = \left(y - \frac{x^2}{2} + \ldots\right)\left(1 - xy + \frac{x^3}{3} + \ldots\right) = y - \frac{x^2}{2} - xy^2 + \ldots \tag{26}$$

abstracție făcînd de termeni de gradul al patrulea, care coincid cu forma canonică dată de Murachini și Villa [4] în cazul general al transformărilor punctuale de speță trei.

Dacă m,n sînt dați de formulele (25), obținem condițiile

$$\begin{aligned}
&\lambda + \gamma - 3\alpha = 0, \\
&a_{30} + \mu - \frac{9}{5} m_{11} - 3\beta = 0, \\
&a_{21} + \nu - b_{11}\alpha = 0, \\
&\mu = 0, \quad \gamma = 0, \quad a_{12} = 0, \\
&a_{21} = \alpha n_{11}, \quad a_{03} = 0.
\end{aligned}$$

Deci v se scrie sub forma

$$v = \alpha + \beta x + \gamma y + \frac{1}{2}(3\alpha - \gamma)x^2 + \frac{1}{6}\left[\left(\frac{9}{5} m_{11}\alpha + 3\beta\right) x^3 + 3\alpha n_{11} x^2 y\right]$$

neglijînd termenii de ordinul al patrulea.

Avem deci ca soluții independente în coordonate omogene

$$v^1 = x + \frac{1}{2} x^3,$$

$$v^2 = y - \frac{1}{2} x^2,$$

$$v^3 = 1 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{10} m_{11} x^3 + \frac{1}{2} n_{11} x^2 y.$$

Putem lua drept coordonate neomogene pe

$$X = \frac{v^1}{v^3}, \qquad Y = \frac{v^2}{v^3}$$

adică

$$X = \left(x + \frac{1}{2} x^3\right)\left(1 - \frac{3}{2} x^2\right) = x - x^3 + \ldots$$
$$Y = \left(y - \frac{1}{2} x^2\right)\left(1 - \frac{3}{2} x^2\right) = y - \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x^2 y + \ldots \tag{27}$$

abstracție făcînd de termeni de gradul al patrulea care coincid de asemenea cu forma canonică dată de M u r a c h i n i și V i l l a.

Aceleași forme au fost găsite de G. V r ă n c e a n u [5] plecînd de la studiul general al transformărilor punctuale plane cu ajutorul tensorilor Π^{i}_{jk} și Π_{jk}.

Rezultă deci următoarea teoremă :

Dacă m, n conțin termeni de primul ordin, transformarea punctuală corespunzătoare se reduce la una din formele canonice (26), (27).

ОБ ОДНОЙ ВЕКТОРНОЙ ПЛОТНОСТИ, СОПОСТАВЛЯЕМОЙ ТОЧЕЧНОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ТРЕТЬЕГО РОДА

РЕЗЮМЕ

Показывается, что если задано точечное преобразование третьего рода, то ему можно сопоставить векторную плотность m,n, закон преобразования которой при проективном преобразовании переменных дается формулами (2). Компоненты m, n удовлетворяют системе уравнений (7′).

Обратно, если дано решение этой системы, то мы ему можем сопоставить точечное преобразование третьего рода, характеристические кривые которого даются уравнением

$$(m\,dx + n\,dy)^3 = 0.$$

Отсюда следует, что точечное преобразование третьего рода полностью определяется пфаффовой формой (6), коэффициенты которой m,n, удовлетворяют системе (7′).

SUR UNE DENSITÉ VECTORIELLE ASSOCIÉE À UNE TRANSFORMATION PONCTUELLE D'ESPÈCE TROIS

RÉSUMÉ

On montre qu'étant donnée une transformation ponctuelle d'espèce trois, on peut associer à cette transformation un vecteur densité m, n dont la loi de transformation par rapport à une transformation projective de variables est donnée par les formules (2). Les composantes m, n satisfont à un système d'équations donné par (7′). Inversement, étant donnée une solution de ce système, on peut associer une transformation ponctuelle d'espèce trois dont les courbes caractéristiques sont données par l'équation

$$(m\,dx + n\,dy)^3 = 0.$$

Il en résulte qu'une transformation ponctuelle d'espèce trois est complètement déterminée par une forme de Pfaff (6) dont les coefficients m, n satisfont au système (7').

BIBLIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Sul tensore associato ad una corrispondenza fra spazi proiettivi*, Bol. Un. Mat. Ital., (**12**), 492 (1957).
2. G. G. VRĂNCEANU, *Determinarea spațiilor cu conexiune afină local euclidiene A_2 de speță trei.* Analele Univ. „C. I. Parhon", *15*, 47 (1957).
3. — *Asupra spațiilor cu conexiune afină local euclidiene de speță trei.* Analele Univ. „C. I. Parhon", *17*, 30 (1958).
4. M. VILLA, *Classificazione delle transformazioni puntuali di terza specie fra piani.* Publ. Inst. Math., Bologna, *88*, 162.
5. G. VRĂNCEANU, *Lecții de geometrie diferențială*, vol. III, Ed. Acad. R.P.R., București, 1960.

DETERMINAREA SPAȚIILOR A_3 CU GRUP G_5 CU VARIETĂȚI DE INTRANZITIVITATE BIDIMENSIONALE

DE

VIOREL DUMITRAȘ

Într-o lucrare anterioară [1], am determinat spațiile cu conexiune afină cu trei dimensiuni care admit un grup de mișcări cu cinci parametri și care au varietăți de intranzitivitate unidimensionale. Folosind aceeași metodă vom determina spațiile A_3 neomogene [1]) care au un grup de mișcări tot cu cinci parametri însă cu varietăți de intranzitivitate bidimensionale.

Pentru determinarea acestor grupuri pornim de la subgrupurile lor de stabilitate ale originii care într-un anumit sistem de coordonate sînt grupuri centroafine cu trei parametri ; aceste grupuri sînt date în clasificarea lui S. Lie [2]. Din această clasificare vom omite grupurile care conțin transformarea infinitezimală distinsă

$$U = x^1 p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3 \text{ [2])}$$

deoarece am arătat [3] că aceste grupuri nu pot fi grupuri de stabilitate al unui spațiu A_3 neomogen, rezultat care constituie o întărire a unei teoreme a Academicianului G. Vrănceanu [4].

Se poate arăta de asemenea, la fel ca în primele două paragrafe ale lucrării [1], că și grupurile care conțin transformări infinitezimale de forma $x^i p_j + U$, $(i \neq j)$, nu pot fi grupuri totale de stabilitate al unui spațiu A_3 neeuclidian.

În plus nu vom lua în considerare grupul căror transformări infinitezimale are operatorii

$$x^3 p_1 + x^1 p_2, \quad x^1 p_3 + x^2 p_1, \quad x^2 p_2 - x^3 p_3$$

---

[1]) Prin spațiu A_3 neomogen vom înțelege un spațiu cu conexiune afină cu trei dimensiuni cu grup intranzitiv de mișcări.

[2]) Notăm $p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$.

deoarece acest grup nu are varietăţi invariante bidimensionale. Rămîne să considerăm următoarele grupuri (date prin operatorii transformărilor lor infinitezimale):

$$
\begin{array}{lll}
\text{I.} & x^3p_2, & x^3p_1 + x^1p_2, \quad x^2p_2 - x^3p_3 + aU, \\
\text{II.} & x^3p_2, & x^1p_2, \quad x^3p_1 + x^2p_2 + aU, \\
\text{III.} & x^3p_1, & x^3p_2, \quad x^2p_2 + x^1p_1 + aU, \\
\text{IV.} & x^3p_2, & x^1p_1 + aU, \quad x^2p_2 + bU, \\
\text{V.} & x^1p_2, & x^2p_1, \quad x^1p_1 - x^2p_2, \\
\text{VI.} & x^3p_1, & x^3p_2, x^1p_2, \\
\text{VII.} & x^3p_1, & x^3p_2, x^1p_1 + cx^2p_2 + aU, \\
\text{VIII.} & x^3p_2, & x^1p_2, x^1p_1 + cx^2p_2 + aU, \\
\text{IX.} & x^3p_2, & x^1p_2, x^2p_2 + aU
\end{array}
\qquad (A)
$$

(a,b şi c fiind constante).

În cele ce urmează indicii notaţi cu litere greceşti iau valorile 4,5,6, iar indicii notaţi cu litere latine valorile 1,2,3.

CAPITOLUL I

DETERMINAREA GRUPURILOR DE STABILITATE

§ 1. SPAŢIILE A_3 CU GRUPURILE DE STABILITATE (I)

Operatorii transformărilor infinitezimale ale grupului de stabilitate se scriu

$$\text{(I)} \quad X_4 = x^3p_2, \quad X_5 = x^3p_1 + x^1p_2, \quad X_6 = x^2p_2 - x^3p_3 + aU$$

şi avem

$$(X_4X_5) = 0, \quad (X_4X_6) = 2X_4, \quad (X_5X_6) = X_5. \qquad (1)$$

Varietatea liniară bidimensională invariantă prin transformările grupului (I) este planul $x^3 = 0$. În acest plan grupul de mişcări al spaţiului A_3 corespunzător acţionează tranzitiv, prin urmare operatorii principali vor avea expresii de forma

$$X_u = p_u + a_u^s(x)\,p_s, \qquad (u = 1,2), \quad (2)$$

unde $a_u^k(x)$ sînt funcţii de variabilele x^1, x^2, x^3 care se anulează în origine.

Celelalte ecuaţii de structură ale grupului de mişcări al spaţiului se vor scrie

$$(X_1X_4) = c_{14}^{\alpha}X_\alpha, \quad (X_1X_5) = X_2 + c_{15}^{\alpha}X_\alpha, \quad (X_1X_6) = aX_1 + c_{16}^{\alpha}X_\alpha, \quad (1')$$
$$(X_2X_4) = c_{24}^{\alpha}X_\alpha, \quad (X_2X_5) = c_{25}^{\alpha}X_\alpha, \quad (X_2X_6) = (1+a)X_2 + c_{26}^{\alpha}X_\alpha,$$
$$(X_1X_2) = c_{12}^{1}X_1 + c_{12}^{2}X_2 + c_{12}^{\alpha}X_\alpha.$$

Făcînd transformarea de operatori

$$\overline{X}_1 = X_1 + c_1^\alpha X_\alpha, \quad \overline{X}_2 = X_2 + c_2^\alpha X_\alpha, \tag{3}$$

avem

$$(\overline{X}_1 X_6) = a\overline{X}_1 + (2-a)\, c_1^4 X_4 + (1-a)\, c_1^5 X_5 - a c_1^6 X_6 + c_{16}^\alpha X_\alpha,$$
$$(\overline{X}_2 X_6) = (1+a)\overline{X}_2 + (1-a)\, c_2^4 X_4 - a c_2^5 X_5 - (1+a)\, c_2^6 X_6 + c_{26}^\alpha X_\alpha$$

și dacă $a \neq 0, 1, -1, 2$ putem anula toate constantele c_{16}^α și c_{26}^α. Considerînd apoi identitățile lui Iacobi

$$(X_u X_4 X_5) = 0, \quad (X_u X_4 X_6) = 0, \quad (X_u X_5 X_6) = 0, \quad (u = 1,2)$$

rezultă că dacă mai avem în plus $a \neq -2$, atunci sînt nule și constantele c_{14}^α, c_{24}^α, c_{15}^α, c_{25}^α. Ținînd seamă de aceste condiții, identitatea $(X_1 X_2 X_4) = 0$ ne dă $c_{12}^6 = 0$, iar identitatea $(X_1 X_2 X_6) = 0$ se scrie

$$[(X_1 X_2) X_6] - (2a+1)(X_1 X_2) = 0$$

și rezultă că dacă $a \neq \frac{1}{2}$, atunci avem

$$(X_1 X_2) = 0 \tag{4}$$

deci vom putea lua

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2. \tag{5}$$

Dacă $a = -2$, atunci avem ecuațiile de structură

$$(X_1 X_4) = \rho X_6, \quad (X_1 X_5) = X_2, \quad (X_1 X_6) = -2X_1$$
$$(X_2 X_4) = -\rho X_5, \quad (X_2 X_5) = 0, \quad (X_2 X_6) = -X_2, \quad (X_1 X_2) = 0 \tag{1''}$$

și printr-o schimbare de variabile vom avea

$$X_1 = p_1, \; X_2 = p_2, \; X_5 = x^3 p_1 + x^1 p_2, \; X_6 = -(2x^1 p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3), \tag{5'}$$
$$X_4 = x^3 p_2 - \rho((x^1)^2 + x^2 x^3)\, p_1 - \rho x^1 x^2 p_2 - 3\rho\, x^2 x^3 p_3.$$

Să considerăm acum ecuațiile transformărilor infinitezimale ale mișcărilor spațiului A_3:

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \Gamma_{jk}^j}{\partial x^s}\, \xi^s + \Gamma_{sk}^i \frac{\partial \xi^s}{\partial \xi^j} + \Gamma_{js}^i \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^s \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s}. \tag{6}$$

Din aceste ecuații scrise pentru transformările X_1, X_2 și X_5, rezultă că Γ_{jk}^i sînt funcții numai de variabila x^3 satisfăcînd condițiile

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = 0,$$
$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{13}^3, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{31}^3, \quad \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 = 0,$$
$$\Gamma_{23}^2 + \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{13}^1, \quad \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{31}^1, \tag{7}$$
$$\Gamma_{13}^1 + \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{33}^3, \quad \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{33}^1.$$

Ecuațiile (6) relativ la transformarea X_5, pentru $i = 2$, $j = k = 1$, se scriu

$$\frac{d\Gamma^2_{11}}{dx^3} x^3 + 3\Gamma^2_{11} = 0$$

și rezultă că $\Gamma^2_{11} = 0$, în caz contrar Γ^2_{11} ar fi o funcție care nu este definită în origine.

Ținînd seamă de toate aceste condiții în ecuațiile (6) scrise relativ la transformarea X_4 pentru $i = j = k = 1$, rezultă $\rho = 0$, deci și în acest caz operatorii principali au expresiile (5), operatorii grupului de stabilitate păstrîndu-și forma liniară dată inițial. Se arată că aceeași concluzie este valabilă și în cazurile $a = 1$, -1 și 2.

Să considerăm celelalte două cazuri omise :

1°. $a = \frac{1}{2}$. Avem

$$X_6 = \frac{1}{2}(x^1 p_1 + 3x^2 p_2 - x^3 p_3)$$

și ecuațiile de structură (1′) se vor scrie

$$(X_1X_4) = 0, \quad (X_1X_5) = X_2, \quad (X_1X_6) = \frac{1}{2} X_1,$$
$$(X_1X_2) = \rho X_4. \quad (1''')$$
$$(X_2X_4) = 0, \quad (X_2X_5) = 0, \quad (X_2X_6) = \frac{3}{2} X_2,$$

Putem satisface la această structură luînd

$$X_1 = p_1 - \rho x^3 U, \quad X_2 = p_2. \qquad (5')$$

Făcînd ipoteza $\rho \neq 0$ și scriind ecuațiile (6) pentru toate transformările grupului, rezultă că există componente ale conexiunii care nu sînt definite în origine (vom trata un asemenea caz mai amănunțit în paragraful următor). Rămîne deci de considerat tot cazul cînd operatorii principali au expresiile (5).

2°. $a = 0$. Avem

$$X_6 = x^2 p_2 - x^3 p_3$$

și ecuațiile (1′) se vor scrie

$$(X_1X_4) = 0, \quad (X_1X_5) = X_2, \quad (X_1X_6) = 0$$
$$(X_1X_2) = \lambda X_5. \qquad (1^{IV})$$
$$(X_2X_4) = 0, \quad (X_2X_5) = 0, \quad (X_2X_6) = X_2$$

Integrînd aceste ecuații de structură obține m

$$X_1 = p_1 - \lambda x^1 U, \quad X_2 = p_2 + \lambda x^3 U. \qquad (5'')$$

Să admitem că $\lambda \neq 0$. Atunci din ecuațiile (6) scrise relativ la transformarea X_4, rezultă în primul rînd că Γ^1_{22}, Γ^3_{22}, Γ^1_{12}, Γ^1_{21} nu depind

de variabila x^2. Scriind apoi aceleași ecuații relativ la transformările X_5, X_2, X_6 și X_1, rezultă că $\Gamma^3_{22} = \Gamma^1_{22} = 0$. În mod asemănător găsim $\Gamma^1_{12} = 0$.

Să scriem acum ecuațiile (6) relativ la transformările X_4, X_6, X_5 și X_2 pentru $i = j = 1$, $k = 3$; avem

$$\frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^3} x^3 + \Gamma^1_{13} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^1} x^3 + \Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{13} = 0,$$

$$\frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^1} x^1 x^3 + \frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^3} (x^3)^2 + 2x^3 \Gamma^1_{13} + x^1(\Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{13}) = 1.$$

Dacă în ultima dintre aceste ecuații ținem seama de a doua și de a treia, obținem $\Gamma^1_{13} = \frac{1}{x^3}$ și conexiunea nu ar fi definită în origine. Prin urmare: ipoteza $\lambda \neq 0$ nu este admisibilă.

Vom presupune deci că în toate cazurile operatorii principali au expresiile (5) și scriind ecuațiile (6) mai întîi relativ la transformările X_1, X_2, X_4 și X_5, rezultă că Γ^i_{jk} nu depinde decît de variabila x^3 și avem

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{22} = 0,$$

$$\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = 0, \tag{7'}$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23}, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32}, \quad \Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{31} = \Gamma^3_{33}, \quad \Gamma^2_{13} + \Gamma^2_{31} = \Gamma^1_{33}.$$

Scriind acum ecuațiile (6) relativ la transformarea X_6 avem pentru $i = j = 1$, $k = 3$ și $i = k = 1$, $j = 3$:

$$(a-1)\left(\frac{\mathrm{d}\Gamma^1_{13}}{\mathrm{d}x^3} x^3 + \Gamma^1_{13}\right) = 0, \quad (a-1)\left(\frac{\mathrm{d}\Gamma^1_{31}}{\mathrm{d}x^3} x^3 + \Gamma^1_{31}\right) = 0$$

și prin urmare dacă $a \neq 1$ atunci $\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = 0$ (în caz contrar ar fi funcții nedefinite în origine). Ținînd seamă de condițiile (7') rezultă că, dacă $a \neq 1$, avem

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \Gamma^3_{33} = 0.$$

Scriind acum ecuațiile (6) tot relativ la transformarea X_6 însă pentru $i = 2$, $j = 1$, $k = 3$; $i = 2$, $j = 3$, $k = 1$; $i = 2$, $j = k = 3$, avem

$$(a-1)\frac{\mathrm{d}\Gamma^2_{13}}{\mathrm{d}x^3} x^3 + (a-2)\Gamma^2_{13} = 0, \quad (a-1)\frac{\mathrm{d}\Gamma^2_{31}}{\mathrm{d}x^3} x^3 + (a-2)\Gamma^2_{31} = 0,$$

$$(a-1)\frac{\mathrm{d}\Gamma^2_{33}}{\mathrm{d}x^3} x^3 + (a-3)\Gamma^2_{33} = 0.$$

Integrînd aceste ecuații și ținînd seamă și de ultima condiție (7'), avem

$$\Gamma^2_{13} = (\alpha + \beta)(x^3)^p, \quad \Gamma^2_{31} = (\alpha - \beta)(x^3)^p \quad \Gamma^2_{33} = \gamma(x^3)^{2p+1}, \tag{8}$$

unde

$$p = \frac{2-a}{a-1}.$$

Conexiunea nu este definită în origine decît dacă p este un întreg pozitiv; o condiție necesară este deci ca $1 < a < 2$. Să determinăm ecuațiile grupului de mișcări ale spațiilor A_3 avînd componentele nenule ale conexiunii date de formulele (8). Tensorul de curbură al acestor spații are toate componentele nule în afară de

$$\Gamma^2_{313} = -\Gamma^2_{331} = p(\alpha-\beta)(x^3)^{p-1}. \tag{9}$$

Din ecuațiile care ne dau invarianța tensorului de curbură:

$$\overline{\Gamma}^i_{rst}\, u^r_j\, u^s_k\, u^t_l - \Gamma^r_{ikl}\, u^i_r = 0 \ ^1) \tag{10}$$

dînd indicilor i, j, k, l pe rînd valorile 1,3,1,3; 3,3,1,3; 2,1,1,3, rezultă condițiile

$$u^1_2 = u^3_2 = u^1_3 = 0;$$

ecuațiile grupului de mișcări sînt de forma

$$\overline{x}^1 = \overline{x}^1(x^1, x^3); \quad \overline{x}^2 = \overline{x}^2(x^1, x^2, x^3); \quad \overline{x}^3 = \overline{x}^3(x^3). \tag{11}$$

Să considerăm acum ecuațiile care ne dau invarianța conexiunii:

$$\frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} = \overline{\Gamma}^i_{rs}\, u^r_j\, u^s_k - \Gamma^r_{jk}\, u^i_r; \tag{12}$$

avem pentru $i=j=k=1$; $i=j=1$, $k=3$; $i=j=k=3$; $i=2, j=k=1$; $i=j=2, k=1$; $i=j=2, k=3$; $i=j=k=2$:

$$\frac{\partial^2 \overline{x}^1}{\partial x^1 \partial x^1} = \frac{\partial^2 \overline{x}^1}{\partial x^1 \partial x^3} = \frac{\partial^2 \overline{x}^2}{\partial x^1 \partial x^1} = \frac{\partial^2 \overline{x}^2}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 \overline{x}^2}{\partial x^2 \partial x^3} = \frac{\partial^2 \overline{x}^2}{\partial x^2 \partial x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 \overline{x}^3}{(\mathrm{d}x^3)^2} = 0$$

și deci ecuațiile (11) devin

$$\overline{x}^1 = a^1_1 x^1 + \omega(x^3), \quad \overline{x}^2 = a^2_2 x^2 + \eta(x^3) x^1 + \theta(x^3), \quad \overline{x}^3 = a^3_3 x^3 + a^3. \tag{11'}$$

În ecuațiile (10) făcînd $i=2$, $j=3$, $k=1$, $l=3$, obținem

$$(a^3_3 x^3 + a^3)^{p-1} (a^3_3)^2 a^1_1 = (x^3)^{p-1} a^2_2$$

și dacă $p > 1$ rezultă

$$a^2_2 = a^1_1 (a^3_3)^{p+1}, \quad a^3 = 0. \tag{13}$$

Ținînd seamă de aceste condiții în ecuațiile (12) scrise pentru $i=1$, $j=k=3$; $i=2$, $j=1$, $k=3$; $i=2$, $j=k=3$, obținem

$$\omega''(x^3) = 2\alpha[(a^3_3)^{p+2} - a^1_1](x^3)^p, \quad \eta'(x^3) = 0,$$

$$\theta''(x^3) = 2\alpha[(a^3_3)^{p+1} a^1_3 - a^2_1](x^3)^p + \gamma[(a^3_3)^{2p+3} - a^2_2](x^3)^{2p+1}.$$

---

[1]) Notăm $\times\ u^r_j = \dfrac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^j}$.

Integrînd aceste ecuații și înlocuind valorile găsite în (11)') obținem

$$\bar{x}^1 = a_1^1 x^1 + \frac{2\alpha[(a_3^3)^{p+2} - a_1^1]}{(p+1)(p+2)}(x^3)^{p+2} + a_3^1 x^3 + a^1,$$

$$\bar{x}^2 = a_1^2 x^1 + (a_3^3)^{p+1} a_1^1 x^2 + a_3^2 x^3 + \frac{2\alpha[(a_3^3)^{p+1} a_3^1 - a_1^2]}{(p+1)(p+2)}(x^3)^{p+2} +$$

$$+ \frac{\gamma[(a_3^3)^{2p+3} - a_2^2]}{(2p+2)(2p+3)}(x^3)^{2p+3} + a^2,$$

$$\bar{x}^3 = a_3^3 x^3$$

și grupul conține după cum se vede șapte parametri.

În cazul $p = 1$ vom considera ecuațiile care ne dau invarianța tensorului de torsiune

$$\overline{T}_{rs}^{i} u_j^r u_k^s - T_{jk}^r u_r^i = 0. \tag{14}$$

Aceste ecuații ne dau pentru $i = 2$, $j = 1$, $k = 3$, condițiile

$$a_2^2 = a_1^1 (a_3^3)^2, \quad a^3 = 0.$$

Și în acest caz grupul are tot șapte parametri.

Să considerăm în sfîrșit cazul $a = 1$; atunci avem

$$\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{33}^2 = 0$$

și

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Phi(x^3) + \Psi(x^3), \quad \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^2 = \Phi(x^3) - \Psi(x^3), \quad \Gamma_{33}^3 = 2\Phi(x^3), \tag{15}$$

unde Φ și Ψ sînt funcții arbitrare de variabile x^3.

Aceste spații însă au un grup intranzitiv cu opt parametri [5].

Pe baza rezultatelor obținute mai sus putem enunța

LEMA 1. *Nu există spații A_3 cu grup intranzitiv G_5 avînd unul din grupurile (I) drept grup total de stabilitate.*

§ 2. SPAȚIILE A_3 CU GRUPURILE DE STABILITATE (II)

Avem

$$X_4 = x^3 p_2, \qquad X_5 = x^1 p_2, \qquad X_6 = x^3 p_1 + x^2 p_2 + aU,$$

(II)

$$(X_4 X_5) = 0, \quad (X_4 X_6) = X_4, \quad (X_5 X_6) = X_5 - X_4.$$

Varietatea liniară bidimensională invariantă este tot planul $x^3 = 0$, deci operatorii principali au expresiile de forma (2).

Făcînd o transformare de operatori (3) au constantele c_1^α, c_2^α convenabil alese și considerînd identitățile lui Iacobi care se formează cu ope-

ratorii X_1, X_2, X_4, X_5, X_6, celelalte ecuații de structură ale grupului se vor scrie

$$(X_1X_4) = 0, \quad (X_1X_5) = X_2, \quad (X_1X_6) = aX_1, \quad (X_1X_2) = \rho X_4, \tag{16}$$
$$(X_2X_4) = 0, \quad (X_2X_5) = 0, \quad (X_2X_6) = (1+a)X_2,$$

unde constanta ρ este nulă dacă $a \neq 0$.

În cazul cînd $a = 0$ putem saisface la structura respectivă luînd

$$X_1 = p_1 - \rho x^3 U, \quad X_2 = p_2.$$

Scriind ecuațiile (6) relativ la transformările X_2, X_4, X_5, rezultă econdițiile

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{33} = \Gamma^2_{22} = 0,$$
$$\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = 0, \tag{17}$$
$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23}, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32}, \quad \Gamma^3_{33} = \Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{31},$$
$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13}, \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21},$$

componentele nenule nedepinzînd de x^2.

Presupunînd că $\rho \neq 0$ și scriind ecuațiile (6) relativ la transformările X_6 și X_1, rezultă în primul rînd

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = 0 \tag{17'}$$

iar componente $\Gamma^1_{13}, \Gamma^1_{31}, \Gamma^2_{23}, \Gamma^2_{32}, \Gamma^3_{33}$ nu depind de x^1.

Pentru determinarea componentei Γ^1_{13} avem ecuația

$$\frac{d\Gamma^1_{13}}{dx^3}\rho(x^3)^2 + 2\rho x^3\Gamma^1_{13} = 2\rho$$

care integrată ne dă

$$\Gamma^1_{13} = \frac{x^3 + \alpha}{(x^3)^2}.$$

Conexiunea nu este deci definită în origine și ipoteza că $\rho \neq 0$ nu poate fi acceptată.

Prin urmare, în toate cazurile operatorii principali vor avea expresiile (5).

Scriind acum ecuațiile (6) relativ la transformările grupului, rezultă condițiile (17) și (17'), iar dacă $a = 0$ avem și

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{33} = 0;$$

în acest caz componentele nenule ale conexiunii fiind date de formulele (15). Regăsim iarăși spații A_3 cu grup intranzitiv maxim G_8.

Dacă $a \neq 0$, atunci avem

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \Gamma^3_{33} = 0,$$

iar componentele nenule sînt determinate de ecuațiile

$$a\frac{d\Gamma_{11}^2}{dx^3}x^3+(a-1)\Gamma_{11}^2=0,\quad a\frac{d\Gamma_{33}^2}{dx^3}x^3+(a-1)\Gamma_{33}^2+\Gamma_{13}^2+\Gamma_{31}^2=0,$$

$$a\frac{d\Gamma_{13}^2}{dx^3}x^3+(a-1)\Gamma_{13}^2+\Gamma_{11}^2=0,\quad a\frac{d\Gamma_{31}^2}{dx^3}x^3+(a-1)\Gamma_{13}^2+\Gamma_{11}^2=0.$$

Integrînd prima dintre aceste ecuații obținem

$$\Gamma_{11}^2=\varkappa(x^3)^{\frac{1-a}{a}},\qquad(\varkappa=\text{const.})$$

și dacă $\varkappa\neq 0$, componentele Γ_{13}^2 și Γ_{31}^2 ar avea ca expresii funcții nedefinite în origine, deci $\Gamma_{11}^2=0$. La fel se arată că trebuie să avem

$$\Gamma_{13}^2+\Gamma_{31}^2=0.$$

Componentele nenule ale conexiunii acestor spații se vor scrie

$$\Gamma_{13}^2=-\Gamma_{31}^2=\alpha(x^3)^{\frac{1-a}{a}},\quad \Gamma_{33}^2=\beta(x^3)^{\frac{1-a}{a}}$$

Aceste spații mai admit și transformarea x^3p_1, prin urmare grupul lor de mișcări are mai mult decît cinci parametri. Rezultă

LEMA 2. *Nu există spații A_3 cu grup intranzitiv G_5 avînd grup total de stabilitate unul din grupurile* (II).

§ 3. SPAȚII A_3 CU GRUPURILE DE STABILITATE (III)

Avem

(III) $X_4=x^3p_1,\ X_5=x^3p_2,\ X_6=x^1p_2+(x^1p_1+x^2p_2)+aU,$

$(X_4X_5)=0,\ (X_4X_6)=X_4+X_5,\ (X_5X_6)=X_5.$

Varietatea liniară bidimensională invariantă este și în acest caz planul $x^3=0$. Alegînd convenabil operatorii principali X_1, X_2 și considerînd identitățile

$$(X_u\,X_\alpha\,X_\beta)=0,\ (u=1,\ 2;\quad \alpha,\ \beta=4,\ 5,\ 6),$$

obținem în cazul cînd $a\neq -1$:

$$(X_1X_4)=0,\quad (X_1X_5)=0,\quad (X_1X_6)=X_2+(1+a)X_1,\quad (X_1X_2)=\rho X_5,$$
$$(X_2X_4)=0,\quad (X_2X_5)=0,\quad (X_2X_6)=(1+a)X_2,$$

unde $\rho=0$ dacă $a\neq\frac{1}{2}$.

În cazul cînd $a=-\frac{1}{2}$ operatorii principali au expresiile (5′) și se arată la fel ca în paragraful precedent că ipoteza $\rho\neq 0$ nu este acceptabilă.

Rămîne de considerat numai cazul cînd $\rho = 0.$, deci cînd operatorii principali au expresiile (5).

Dacă $a = -1$ avem

$$X_6 = x^1 p_2 - x^3 p_3$$

și celelalte ecuații de structură ale grupului se vor scrie

$$(X_1X_4) = \rho X_4, \quad (X_1X_5) = -\nu X_4, \quad (X_1X_6) = X_2$$
$$(X_1X_2) = -\rho X_2 \quad (18)$$
$$(X_2X_4) = \nu X_4 + \rho X_5, \quad (X_2X_5) = \nu X_5, \quad (X_2X_6) = 0$$

avînd $\nu\rho = 0$. Se arată că pentru $\nu \neq 0$ grupul respectiv nu poate fi grupul de mișcare al unui spațiu A_3.

Presupunem deci $\nu = 0$ și integrăm ecuațiile (18′); obținem

$$X_1 = p_1 - \rho x^1 p_1, \quad X_2 = p_2 - \rho x^1 p_2.$$

Scriind ecuațiile (6) relativ la transformările de operatori X_1, X_2, X_4, X_5 și X_6 rezultă că dacă $\rho \neq 0$, toate componentele conexiunii sînt nule deci spațiul este euclidian.

Vom presupune deci că oricare ar fi valoarea lui a operatorii principali au expresiile (5). Scriind ecuațiile (6) relativ la transformările X_1, X_2, X_4, X_5, rezultă relațiile :

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{22} = 0,$$
$$\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = 0, \quad (19)$$
$$\Gamma^3_{33} = \Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{32}, \quad \Gamma^1_{23} + \Gamma^1_{32} = 0, \quad \Gamma^2_{13} + \Gamma^2_{31} = 0;$$

componentele nenule nedepinzînd de variabilele x^1 și x^2.

Ținînd seamă și de transformarea X_6, avem

$$a\left(\frac{d\Gamma^1_{23}}{dx^3}x^3 + \Gamma^1_{23}\right) = 0, \quad a\left(\frac{d\Gamma^2_{13}}{dx^3}x^3 + \Gamma^2_{13}\right) + \Gamma^2_{23} - \Gamma^1_{13} = 0,$$

$$a\left(\frac{d\Gamma^1_{13}}{dx^3}x^3 + \Gamma^1_{13}\right) + \Gamma^1_{23} = 0, \quad a\left(\frac{d\Gamma^2_{23}}{dx^3}x^3 + \Gamma^2_{23}\right) - \Gamma^1_{23} = 0,$$

$$a\frac{d\Gamma^1_{33}}{dx^3}x^3 + (a-1)\Gamma^1_{33} = 0, \quad a\frac{d\Gamma^2_{33}}{dx^3}x^3 + (a-1)\Gamma^2_{33} - \Gamma^1_{33} = 0$$

și din aceste ecuații rezultă că dacă $a \neq 0,1$ toate componentele conexiunii sînt nule deci spațiul este euclidian. Dacă $a = 1$ singurele componente nenule sînt

$$\Gamma^1_{33} = \alpha, \quad \Gamma^2_{33} = \alpha x^3$$

și spațiul este de asemenea euclidian, tensorul de curbură avînd toate componentele nule.

Dacă $a = 0$, atunci componentele nenule sînt

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \Phi(x^3) + \Psi(x^3), \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \Phi(x^3) - \Psi(x^3), \tag{20}$$

$$\Gamma^2_{13} = -\Gamma^2_{31} = \Theta(x^3), \quad \Gamma^3_{33} = 2\Phi(x^3),$$

unde Φ, Ψ și Θ sînt funcții arbitrare de variabila x^3. Regăsim în acest caz o categorie de spații A_3 cu grup intranzitiv de mișcări G_6 [6].

Rezultă

LEMA 3. *Spațiile A_3 cu varietăți de intranzitivitate bidimensionale și avînd grupul de stabilitate* (III) *au un grup de mișcări cu cel puțin șase parametri.*

§ 4. SPAȚIILE A_3 CU GRUPURILE DE STABILITATE (IV)

Vom considera acum grupurile ale căror transformări infinitezimale au operatorii

$$\text{(IV)} \quad X_4 = x^3 p_2, \quad X_5 = x^1 p_1 + aU, \quad X_6 = x^2 p_2 + bU$$

și avem

$$(X_4 X_5) = 0, \quad (X_4 X_6) = X_4, \quad (X_5 X_6) = 0$$

Aceste grupuri au două varietăți liniare bidimensionale invariante și anume planele $x^1 = 0$ și $x^3 = 0$; vom avea deci de considerat două cazuri.

1. *Varietatea invariantă este planul $x^3 = 0$.* Operatorii principali au tot expresii de forma (2). Procedînd la fel ca în paragrafele precedente obținem

$$(X_1 X_4) = 0, \quad (X_1 X_5) = (1+a) X_1, \quad (X_1 X_6) = b X_1,$$

$$(X_1 X_4) = 0, \quad (X_2 X_5) = a X_2, \quad (X_2 X_6) = (1+b) X_2, \tag{21}$$

$$(X_1 X_2) = \lambda X_1 + \nu X_2 - \rho X_4 + \mu X_5,$$

unde

$\lambda \neq 0$ numai în cazul $a = 0$, $b = -1$,

$\nu \neq 0$ „ „ „ $a = -1$, $b = 0$,

$\rho \neq 0$, „ „ „ $a = -\frac{1}{2}$ $b = 0$,

$\mu \neq 0$, „ „ „ $a = b = -\frac{1}{2}$.

Dacă exceptăm aceste cazuri rezultă că avem $(X_1 X_2) = 0$ și deci operatorii principali au expresiile (5).

Pentru $a = 0$, $b = -1$ avem

$$X_1 = p_1, \; X_2 = p_2 - \lambda x^1 p_1$$

și cum în acest caz $X_5 = x^1 p_1$ rezultă că putem lua $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$.

La fel pentru $a = -1$, $b = 0$ luăm $X_1 = p_1 - \nu(x^2 p_2 + x^3 p_3)$, $X_2 = p_2$ și deoarece $X_5 = -(x^2 p_2 + x^2 p_3)$, avem din nou $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$. Prin urmare putem considera că $\lambda = \nu = 0$.

Cînd $a=b=-\frac{1}{2}$ integrînd ecuațiile de structură corespunzătoare obținem

$$X_1 = p_1 - \mu x^2 (x^1 p_1 - x^2 p_2 - x^3 p_3), \quad X_2 = p_2$$

și se arată la fel ca în paragrafele anterioare că nu putem avea $\mu \neq 0$.

Să presupunem acum că $a = -\frac{1}{2}$, $b=0$, Atunci putem lua

$$X_1 = p_1 + \rho x^3 U, \quad X_2 = p_2, \quad X_5 = x^1 p_1 - x^3 p_3, \quad X_6 = x^2 p_2 \tag{22}$$

și scriind ecuațiile (6) relativ la transformările X_2 și X_4 și X_6 rezultă

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{33} = 0, \tag{23}$$

$$\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = 0, \Gamma^3_{13} = \Gamma^2_{12}, \Gamma^3_{31} = \Gamma^2_{21}, \Gamma^3_{33} = \Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{32},$$

componentele nenule nedepinzînd de x^2.

Vom scrie acum ecuațiile (6) relativ la transformările X_1 și X_5. Făcînd $i = j = 2$, $k = 1$, avem

$$\frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial x^1} (1 + \rho x^1 x^3) + \frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial x^3} \rho (x^3)^2 + \rho x^3 \Gamma^2_{21} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial x^1} x^1 - \frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial x^3} x^3 + \Gamma^2_{21} = 0.$$

Înmulțind a doua ecuație (24) cu $\rho(x^3)$ și adunînd cu prima, obținem

$$\frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial x^1} + 2\rho(x^3)^2 \frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial x^3} = 0, \tag{24'}$$

din care rezultă

$$\Gamma^2_{21} = \chi\left(\frac{2\rho x^3}{1 + 2\rho x^1 x^3}\right),$$

unde χ este o funcție arbitrară.

Înlocuind expresia lui Γ^2_{21} din (24'') în a doua ecuație (24) obținem

$$u \frac{d\chi}{du} - \chi = 0, \left(u = \frac{2\rho x^3}{1 + 2\rho x^1 x^3} \right).$$

Integrînd această ecuație rezultă

$$\Gamma^2_{21} = \frac{\rho(\alpha + \beta) x^3}{1 + 2\rho x^1 x^3}, \qquad (\alpha, \beta = \text{const.}).$$

În mod similar determinăm expresiile componentelor Γ^2_{12}, Γ^1_{11} și ținînd seamă de condițiile (23) avem

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \frac{\rho(\alpha + \beta) x^3}{1 + 2\rho x^1 x^3}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{\rho(\alpha - \beta) x^3}{1 + 2\rho x^1 x^3}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{2\gamma\rho x^3}{1 + 2\rho x^1 x^3}, \tag{25}$$

α, β și γ fiind constante.

Făcînd $i = j = 1$, $k = 3$, obținem

$$\frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^1}(1+\rho x^1 x^3) + \frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^3}\rho(x^3)^2 + 2\rho x^3 \Gamma^1_{13} + \rho x^1(\Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{13}) = \rho,$$

$$\frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^1} x^1 - \frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x_3} x^3 - \Gamma^1_{13} = 0. \tag{26}$$

Făcînd aceleași combinații ca mai sus și ținînd seamă de valorile componentelor Γ^1_{11} și Γ^3_{13} din (25), avem

$$\frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^1}(1+2\rho x^1 x^3) + \rho x^3 \Gamma^1_{13} = \rho + \frac{(\alpha - 2\gamma - \beta)\rho^2 x^1 x^3}{1+2\rho x^1 x^3}. \tag{26'}$$

Din ecuația (26') rezultă

$$\Gamma^1_{13} = \frac{1}{x^3} + (\alpha - 2\gamma - \beta)\left(\frac{1}{x^3} - \frac{\rho x^1}{M}\right) + \frac{S(x^3)}{M}$$

și înlocuind această valoare în ultima ecuație (26) găsim $S'x^3 + S = 0$. Pentru ca toate componentele să fie definite în origine trebuie să luăm

$$S = 0, \quad 2\gamma - \alpha - \beta = 1.$$

În același mod obținem condițiile

$$2\gamma - \alpha + \beta = 1, \quad \alpha = 1.$$

Rezultă că $\gamma = 1$, $\beta = 0$.

În sfîrșit, pentru $i = 1$, $j = 1 = 3$, obținem $\Gamma^1_{33} = 0$.

Prin urmare în acest caz conexiunea spațiului se poate scrie sub forma

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j \tag{27}$$

în care

$$\varphi_1 = \frac{\rho x^3}{1+2\rho x^1 x^3}, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = \frac{\rho x^1}{1+2\rho x^1 x^3}. \tag{27'}$$

Regăsim în acest fel spațiile proiectiv euclidiene simetrice cu grup G_7 [7].

Vom considera deci grupurile care au transformările infinitezimale

$$X_1 = p_1, \; X_2 = p_2, \; X_4 = x^3 p_2, \; X_5 = (1+a)x^1 p_1 + a x^2 p_2 + a x^3 p_3,$$
$$X_6 = b x^1 p_1 + (1+b) x^2 p_2 + b x^3 p_3.$$

Scriind apoi ecuațiile (6) relativ la transformările X_5 și X_6, rezultă :

1°. Dacă $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a + 2b \neq 0$, $a + b \neq 0$, toate componentele conexiunii sînt nule deci spațiul este euclidian. Aceeași concluzie este valabilă și pentru $a = 0$, $b \neq 0$.

2°. Dacă $a + 2b = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, singura componentă nenulă a conexiunii este

$$\Gamma^2_{11} = \varkappa(x^3)^{-\frac{a+2}{a}}, \qquad (-2 < a < 0);$$

aceste spații mai admit și alte transformări infinitezimale de exemplu $x^1 p_2$.

3°. Dacă $a + b = 0$, $a \neq 0$ singurele componentele nenule ale conexiunii sînt

$$\Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = \gamma(x^3)^{\frac{1-a}{a}}$$

dacă $0 < a < 1$ şi

$$\Gamma^2_{13} = \gamma_1(x^3)^{-\frac{1+a}{a}}, \quad \Gamma^2_{31} = \gamma_2(x^3)^{-\frac{1+a}{a}}$$

dacă $-1 < a < 0$.

În primul caz spaţiul mai admite şi transformarea $x^3 p_1$, iar în al doilea caz transformarea $x^1 p_2$.

4°. Pentru $a \neq 0$, $b = 0$, componentele nenule ale conexiunii sînt

$$\Gamma^1_{11} = 2\gamma(x^3)^p, \ \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = (\alpha+\beta)(x^3)^p, \ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = (\alpha-\beta)(x^3)^p \tag{28}$$

unde

$$p = -\frac{1+a}{a}.$$

Printr-o schimbare de variabile putem face $\gamma = \alpha$ şi atunci conexiunea spaţiului poate fi scrisă sub forma

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \psi_j \tag{29}$$

avînd

$$\varphi_1 = (\alpha+\beta)(x^3)^p, \ \psi_1 = (\alpha-\beta)(x^3)^p, \ \varphi_2 = \varphi_3 = \psi_2 = \psi_3 = 0 \tag{29'}$$

Aceste spaţii au însă un grup de mişcări cu cel puţin şase parametri deoarece ele mai admit şi transformarea $x^1 p_2$.

5°. În sfîrşit, dacă $a = b = 0$ atunci singurele componente nenule ale conexiunii spaţiului sînt

$$\Gamma^1_{13} = \Theta + \Xi, \Gamma^1_{31} = \Theta - \Xi, \Gamma^2_{23} = \Phi + \Psi, \Gamma^2_{32} = \Phi - \Psi, \Gamma^3_{33} = 2\Phi \tag{30}$$

unde Θ, Ξ, Φ, şi Ψ sînt funcţii arbitrare de variabila x^3. Şi aceste spaţii au un grup de mişcări cu cel puţin şase parametri. Prin urmare oricare ar fi valorile constantelor a şi b grupul de mişcări al spaţiului are un număr de parametri superior lui 5.

2. *Varietatea invariantă este planul* $x^1 = 0$. Operatorii principali au atunci expresii de forma

$$X_u = p_u + a^s_u(x) p_s, \qquad (u = 2,3) \tag{31}$$

cu $a_u(x)$ funcţii care se anulează în origine.

Folosind acelaşi procedeu ca mai înainte găsim expresiile parantezelor $(X_u X_\alpha)$, $(X_1 X_2)$, $(u = 2,3;\ \alpha = 4, 5, 6)$:

$$\begin{gathered}(X_2X_4) = 0, \quad (X_2X_5) = aX_2, \quad (X_2X_6) = (1+b)X_2, \\ (X_3X_4) = X_2, \quad (X_3X_5) = aX_3, \quad (X_3X_4) = bX_3, \\ (X_2X_3) = \lambda X_2 + \mu X_5 + \rho X_4,\end{gathered} \tag{32}$$

unde $\mu \neq 0$ numai pentru $a = 0, b = -\frac{1}{2}$, iar λ și ρ sînt diferiți de zero numai dacă $a = b = 0$.

Se arată ușor că ipoteza $\mu \neq 0$ nu poate fi acceptată. Dacă presupunem deci că nu avem $a = b = 0$, atunci

$$(X_2 X_3) = 0$$

și operatorii principali sînt

$$X_2 = p_2, \qquad X_3 = p_3 .$$

Procedînd la fel ca mai sus, adică scriind ecuațiile (6) relativ la toate transformările infinitezimale ale grupului, rezultă:

1°. Dacă $a \neq -1$, $b \neq 0$, $a + 2b + 1 \neq 0$, $a - b + 1 \neq 0$, atunci spațiul este euclidian.

2°. Dacă $a \neq -1$, $b \neq 0$, $a + 2b + 1 = 0$ singurele componente nenule sînt

$$\Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = \chi\,(x^1)^{-\frac{b+1}{b}}, \qquad (\chi = \text{const.})$$
$$(-1 < b < 0)$$

și aceste spații admit și transformarea $x^2 p_3$.

3°. Dacă $a \neq -1$, $b \neq 0$, $a - b + 1 = 0$, atunci există o singură componentă nenulă

$$\Gamma^2_{33} = \eta\,(x^1)^{\frac{1-b}{b}}, \qquad (0 < b < 1,\ \eta = \text{const.})$$

și spațiul mai admite și transformarea $x^1 p_2$.

4°. Pentru $a = -1$, $b = 0$ componentele nenule ale conexiunii se scriu

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \Phi + \Psi,\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \Phi - \Psi,\ \Gamma^1_{11} = 2\,\Theta,$$

unde Φ, Ψ și Θ sînt funcții arbitrare de variabila x^1.

Aceste spații admit un grup intranzitiv de mișcări cu opt parametri. Să considerăm acum și cazul $a = b = 0$; avem atunci

$$X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3 + (\lambda + \rho x^3)\,U$$

și componentele nenule ale conexiunii spațiului A_3 corespunzător sînt:

$$\Gamma^1_{13} = \frac{\rho x^3 + \alpha + \beta}{1 + \lambda x^3 + \rho (x^3)^2}, \qquad \Gamma^1_{31} = \frac{\rho x^3 + \alpha - \beta}{1 + \lambda x^3 + \rho (x^3)^2},$$

$$\Gamma^2_{23} = \frac{\rho x^3 + \gamma + \delta}{1 + \lambda x^3 + \rho (x^3)^2}, \qquad \Gamma^2_{32} = \frac{\rho x^3 + \gamma - \delta}{1 + \lambda x^3 + \rho (x^3)^2},$$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{2\rho x^3 + 2\gamma}{1 + \lambda x^3 + \rho (x^3)^2}.$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta = \text{const.}).$$

Aceste spații au un grup de mișcări cu cel puțin șapte parametri [7].

Din cercetarea făcută în acest paragraf rezultă:

LEMA 4. *Nu există spații A_3 cu varietăți de intranzitivitate bidimensionale având unul din grupurile* (IV) *drept grup total de stabilitate.*

§ 5. SPAȚIILE A_3 CU GRUPURILE DE STABILITATE (VII)

Operatorii transformărilor infinitezimale se scriu

$$\text{(VII)} \quad X_4 = x^3 p_1, \quad X_5 = x^3 p_2, \quad X_6 = x^1 p_1 + c x^2 p_2 + a U$$

și avem

$$(X_4 X_5) = 0, \quad (X_4 X_6) = X_5, \quad (X_5 X_6) = c X_5 .$$

Varietatea liniar invariantă este planul $x^3 = 0$ și dacă presupunem că $a \neq 0, \ -1, \ -\frac{1}{2}$; $c + a \neq 0$; $c + 2a \neq 0$, atunci celelalte ecuații de structură ale grupului se vor scrie

$$\begin{matrix} (X_1 X_4) = 0, & (X_1 X_5) = 0, & (X_1 X_6) = (1 + a) X_1, \\ (X_2 X_4) = 0, & (X_2 X_5) = 0, & (X_2 X_6) = (c + a) X_2 \end{matrix} \qquad (X_1 X_2) = 0. \tag{33}$$

Cazurile $c + 2a = 0$ și $a = -\frac{1}{2}$ nu sînt distincte reducîndu-se unul la celălalt printr-o schimbare între ele a variabilelor x^1 și x^2. Aceeași observație este valabilă și pentru cazurile $c + a = 0$ și $a = -1$.

Dacă $c + 2a = 0$ avem

$$(X_1 X_2) = \rho X_4 + \lambda X_5 ,$$

unde λ este nul dacă $a \neq -\frac{1}{2}$. Expresiile operatorilor principali sînt în acest caz

$$X_1 = p_1 - \lambda x^3 U, \qquad X_2 = p_2 + \rho x^3 U$$

și se arată că ρ și λ nu pot fi diferiți de zero, deci și în acest caz ecuațiile de structură sînt date de formulele (33). Același rezultat este valabil și pentru $a = -1$ (deci și pentru $c + a = 0$) precum și pentru $a = 0, \ c \neq 0, \ 1$.

Prin urmare dacă exceptăm cazurile $a = c = 0$, $a = 0$, $c = 1$, operatorii principali au expresiile (5) și componentele nenule ale conexiunii spațiului se scriu

$$\begin{matrix} \Gamma^1_{13} = \Phi + \Psi, & \Gamma^2_{23} = \Phi + \Theta, \\ \Gamma^1_{31} = \Phi - \Psi, & \Gamma^2_{32} = \Phi - \Theta, \end{matrix} \qquad \Gamma^3_{33} = 2\Phi, \tag{34}$$

cu Φ, Ψ și Θ funcții arbitrare de variabila x^3.

Regăsim astfel o categorie de spații A_3 cu grup intranzitiv G_6. În cazul $a = c = 0$, parantezele $(X_u' X_\alpha)$, $(X_1 X_2)$, $(u = 1, 2;\ \alpha = 4, 5, 6)$ se vor scrie

$$(X_1 X_4) = 0, \quad (X_1 X_5) = 0, \quad (X_1 X_6) = X_1$$
$$(X_2 X_4) = 0, \quad (X_2 X_5) = \rho X_5, \quad (X_2 X_6) = 0 \qquad (X_1 X_2) = \rho X_1$$

și integrînd aceste ecuații de structură obținem

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2 + \rho x^1 p_1 + \rho x^3 p_3;$$

conexiunea spațiului A_3 corespunzător se poate scrie sub forma (29) avînd

$$\varphi_1 = \alpha + \beta, \quad \psi_1 = \alpha - \beta, \quad \varphi_1 = \psi_2 = 0, \quad \varphi_3 = -(\alpha + \beta)\frac{x^2}{x^3},$$
$$\psi_3 = -(\alpha - \beta)\frac{x^2}{x^3}. \qquad (29')$$

Aceste spații mai admit și transformarea $x^2 p_1$ deci grupul de mișcări are mai mult decît cinci parametri. În concluzie avem:

LEMA 5. *Nu există spații A_3 cu varietăți de intranzitivitate bidimensionale avînd unul din grupurile* (VII) *(cu excepția cazului $a = 0$, $c = 1$) drept grup total de stabilitate.*

§ 6. SPAȚIILE A_3 CU GRUPUL DE STABILITATE (IX)

Avem

(IX) $$X_4 = x^3 p_2, \quad X_5 = x^1 p_2, \quad X_6 = x^2 p_2 + aU,$$
$$(X_4 X_5) = 0, \quad (X_4 X_6) = X_4, \quad (X_5 X_6) = X_5.$$

Grupurile (IX) au două varietăți liniare bidimensionale invariante și anume planele $x^1 = 0$. Deoarece prin intervertirea variabilelor x^1 și x^3 ansamblul transformărilor (IX) rămîne neschimbat, rezultă că nu avem decît un singur caz de considerat. Fie planul invariant $x^3 = 0$; presupunem că $a \neq 0$. Procedînd la fel ca în cazurile anterioare rezultă că celelalte ecuații de structură ale grupului de mișcări se scriu

$$(X_1 X_4) = 0, \quad (X_1 X_5) = X_2, \quad (X_1 X_6) = X_1,$$
$$(X_2 X_4) = 0, \quad (X_2 X_5) = 0, \quad (X_2 X_6) = (1 + a) X_2, \qquad (X_1 X_2) = 0. \qquad (35)$$

Rezultă că operatorii principali au expresiile (5) și găsim că singurele componente nenule ale conexiunii spațiului A_3 corespunzător sînt

$$\Gamma^2_{11} = \alpha (x^3)^p, \quad \Gamma^2_{13} = (\beta + \delta)(x^3)^p, \quad \Gamma^2_{31} = (\beta - \delta)(x^3)^p, \quad \Gamma^2_{33} = \gamma (x^3)^p \qquad (36)$$

$$\left(p = \frac{1 - a}{a} = \text{întreg pozitiv}; \quad 0 < a < 1 \right),$$

şi se arată la fel ca în primul paragraf că grupul de mişcări al acestor spaţii are mai mult decît cinci parametri.

LEMA 6. *Nu există spaţii A_3 cu varietăţi de intranzitivitate bidimensionale, avînd unul din grupurile* (IX) (cu $a \neq 0$), *drept grup total de stabilitate.*

Din lemele demonstrate în acest capitol rezultă că numai unele dintre grupurile (A) pot fi grupuri totale de stabilitate ale unui spaţiu A_3 cu grup intranzitiv de mişcări G_5.

Operatorii transformărilor infinitezimale ale acestor grupuri se pot scrie :

$$\begin{aligned}
&(V) && x^1p_2,\quad x^2p_1,\quad x^1p_1 - x^2p_2,\\
&(VI) && x^3p_1,\quad x^3p_2,\quad x^1p_2,\\
&(VII') && x^3p_1\quad x^3p_2,\quad x^1p_1 + x^2p_2,\\
&(VIII) && x^3p_2,\quad x^1p_2,\quad x^1p_1 + cx^2p_2 + aU,\\
&(IX') && x^3p_2,\quad x^1p_2,\quad x^2p_2
\end{aligned} \qquad (B)$$

În capitolul următor vom determina conexiunea spaţiilor A_3 cu grup G_5 pentru care unul din grupurile (B) este grup total de stabilitate.

CAPITOLUL II

SPAŢIILE A_3 CU GRUP INTRANZITIV G_5

§ 1. SPAŢIILE A_3 CU GRUPUL DE STABILITATE (V)

Operatorii transformărilor infinitezimale ale grupului de stabilitate sînt

$$(V) \qquad X_4 = x^1p_2,\quad X_5 = x^1p_1 - x^2p_2,\quad X_6 = x^2p_1$$

şi ecuaţiile sale de structură se scriu

$$(X_4X_5) = -2X_4,\quad (X_4X_6) = X_5,\quad (X_5, X_6) = -2X_6. \qquad (37)$$

Varietatea liniară bidimensională invariantă prin transformările grupului (V) este planul $x^3 = 0$. Deci operatorii principali vor avea expresiile de forma (2) şi parantezele (X_1X_α), (X_2X_α), $(\alpha = 4, 5, 6,)$, se scriu

$$(X_1X_4) = X_2 + c^\alpha_{14}X_\alpha,\quad (X_1X_5) = X_1 + c^\alpha_{15}X_\alpha,\quad (X_1X_6) = c^\alpha_{16}X_\alpha,$$

$$(X_2X_4) = c^\alpha_{24}X_\alpha,\quad (X_2X_5) = -X_2 + c^\alpha_{25}X_\alpha,\quad (X_2X_6) = X_1 + c^\alpha_{26}X_\alpha.$$

Făcînd transformarea de operatori

$$\overline{X}_1 = X_1 + \frac{1}{3}c^4_{15}X_4 + c^5_{15}X_5 - c^6_{15}X_6,\quad \overline{X}_2 = X_2 + c^4_{25}X_4 - c^5_{25}X_5 - \frac{1}{3}c^6_{25}X_6$$

putem anula constantele c_{15}^{α} și c_{25}^{α}. Aceste constante fiind nule, identitățile $(X_1 X_4 X_5) = 0$, $(X_2 X_4 X_5) = 0$, $(X_1 X_6 X_5) = 0$, $(X_2 X_6 X_5) = 0$ se scriu

$$[(X_1 X_4) X_5] + (X_1 X_4) = 0, \quad [(X_2 X_4) X_5] + 3(X_2 X_4) = 0$$
$$[(X_1 X_6) X_5] - 3(X_1 X_6) = 0, \quad [(X_2 X_6) X_5] - (X_2 X_6) = 0$$

și rezultă că și constantele c_{14}^{α}, c_{24}^{α}, c_{16}^{α}, c_{26}^{α} sînt nule. Considerînd apoi și identitățile $(X_1 X_2 X_4) = 0$ și $(X_1 X_2 X_5) = 0$, rezultă că ecuațiile de structură ale grupului se scriu

$$\begin{aligned} &(X_1 X_4) = X_2, \quad (X_1 X_5) = 0, \quad (X_1 X_6) = X_1, \\ &(X_2 X_4) = 0, \quad (X_2 X_5) = X_1, \quad (X_2 X_6) = -X_2, \end{aligned} \qquad (X_1 X_2) = 0 \qquad (38)$$

și operatorii principali vor avea expresiile (5).

Scriind ecuațiile (6) relativ la toate transformările grupului, rezultă că spațiul A_3 corespunzător are toate componentele conexiunii nule în afară de

$$\begin{aligned} &\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Phi(x^3) + \Psi(x^3), \quad \Gamma_{33}^3 = \Theta(x^3), \\ &\Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^2 = \Phi(x^3) - \Psi(x^3), \quad \Gamma_{12}^3 = -\Gamma_{21}^3 = \Xi(x^3), \end{aligned} \qquad (39)$$

unde Φ, Ψ, Θ și Ξ sînt funcții arbitrare de variabila x^3. Grupul de mișcări al acestor spații este tranzitiv și are șase parametri numai în cazul cînd

$$\Phi = \frac{\alpha}{1 + \rho x^3}, \quad \Psi = \frac{\beta}{1 + \rho x^3}, \quad \Theta = \frac{2\gamma}{1 + \rho x^3}, \quad \Xi = \frac{\eta}{1 + \rho x^3}.$$ [1]

În toate celelalte cazuri grupul este intranzitiv și are cinci parametri. Putem enunța:

TEOREMA. 1. *Spațiile A_3 cu varietăți de intranzitivitate bidimensionale și cu grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale $x^1 p_2$, $x^1 p_1 - x^2 p_2$, $x^2 p_1$ au componentele nenule ale conexiunii date de formulele* (39) *și posedă un grup intranzitiv de mișcări cu cinci parametri.*

§ 2. SPAȚIILE A_3 CU GRUPUL DE STABILITATE (VI)

Presupunem acum că grupul de stabilitate este grupul liniar cu trei parametri, ai cărui operatori ai transformărilor infinitezimale sînt

$$\text{(VI)} \qquad X_4 = x^3 p_1, \quad X_5 = x^3 p_2, \quad X_6 = x^1 p_2$$

și deci avem

$$(X_4 X_5) = 0, \quad (X_4 X_6) = X_5, \quad (X_5 X_6) = 0. \qquad (40)$$

Varietatea liniară bidimensională invariantă a acestui grup este planul $x^3 = 0$. Alegînd convenabil operatorii principali X_1, X_2 și considerînd

1) Vezi lucrarea [6], formulele (18).

identitățile lui Iacobi $(X_1 X_\alpha X_\beta) = 0$, $(X_2 X_\alpha X_\beta) = 0$, $(X_1 X_2 X_\alpha) = 0$, $(\alpha, \beta = 4,5,6)$, rezultă că ecuațiile de structură ale grupului se pot scrie sub forma

$$\begin{gathered}(X_1 X_4) = (\rho + \lambda) X_4, \quad (X_1 X_5) = \lambda X_5, \quad (X_1 X_6) = X_2, \\ (X_2 X_4) = \rho X_5, \qquad (X_2 X_5) = 0, \qquad (X_2 X_6) = 0, \\ (X_1 X_2) = -\rho X_2 + \mu X_5.\end{gathered} \tag{41}$$

Dacă $\rho = 0$, atunci avem

$$X_1 = p_1 + \lambda x^3 p_3 + \mu x^3 U, \quad X_2 = p_2.$$

Scriind ecuațiile (6) relativ la transformările X_2, X_5 și X_6 rezultă

$$\begin{aligned}&\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{33} = \Gamma^2_{22} = 0, \\ &\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = 0, \\ &\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31}, \ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13}, \ \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{12}, \\ &\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23}, \ \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32}, \ \Gamma^3_{33} = \Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{31},\end{aligned} \tag{42}$$

componentele nenule nedepinzînd de variabila x^2.

Scriem acum ecuațiile (6) relativ la transformările X_4 și X_1. Făcînd $i = j = k = 1$ avem

$$\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\Gamma^1_{11}}{\mathrm{d}x^3} (\lambda + \mu x^3) + 2\mu \Gamma^1_{11} = 0$$

care prin integrare ne dă

$$\Gamma^1_{11} = \frac{2\chi}{(\lambda + \mu x^3)^2}. \tag{43}$$

La fel obținem

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \frac{\chi + \eta}{(\lambda + \mu x^3)^2}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{\chi - \eta}{(\lambda + \mu x^3)^2}.$$

Pentru $i = j = k = 3$ avem

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Gamma^3_{33}}{\partial x^1} x^3 + \frac{2\chi}{(\lambda + \mu x^3)^2} = 0, \\ \frac{\partial \Gamma^3_{33}}{\partial x^1} (1 + \mu x^1 x^3) + \frac{\partial \Gamma^3_{33}}{\partial x^3} (\lambda x^3 + \mu (x^3)^2) + (2\mu x^3 + \lambda) \Gamma^3_{33} + \\ + \frac{2\mu \chi x^1}{(\lambda + \mu x^3)^2} = 0.\end{gathered} \tag{44}$$

Din prima ecuație (44) deducem

$$\Gamma^3_{33} = \frac{-2\,\chi\,x^1}{x^3(\lambda + \mu\,x^3)} + m(x^3)$$

și înlocuind în a doua rezultă că dacă $\mu \neq 0$ atunci $\chi = 0$ (la fel va rezulta și $\eta = 0$). Ținînd apoi seama de condițiile (42) găsim

$$\Gamma^3_{33} = 2\,\Gamma^1_{13} = 2\,\Gamma^2_{23} = 2\,\Gamma^1_{31} = 2\Gamma^2_{32} = \frac{2\mu}{\lambda + \mu\,x^3}\cdot \tag{45}$$

Se poate arăta apoi că $\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{33} = 0$.

Spațiile A_3 a căror conexiune este dată de formulele (45) (restul componentelor fiind nule), sînt însă spații cu grup maxim G_9 [8] și prin urmare vom exclude cazul $\mu \neq 0$.

Dacă $\mu = \rho = 0$, atunci spațiul este euclidian, toate componentele conexiunii fiind nule.

Rămîne să considerăm cazul $\rho \neq 0$. Atunci printr-o transformare de operatori de forma

$$X_1 = X_1 + aX_4, \quad X_2 = X_2 + aX_5$$

putem anula pe μ și integrînd ecuațiile de structură obținute găsim

$$X_1 = p_1 - \rho\,x^1 p_1 + \lambda\,x^3 p_3, \quad X_2 = p_2 - \rho\,x^1 p_2. \tag{46}$$

Dacă $\lambda = 0$ atunci componentele nenule ale spațiului A_3 corespunzător se scriu :

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \Phi + \Psi, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \Phi - \Psi, \quad \Gamma^3_{33} = 2\Phi, \quad \Gamma^2_{33} = \Theta$$

cu Φ, Ψ și Θ funcții arbitrare de variabila x^3. Regăsim iarăși spațiile A_3 cu grup intranzitiv maxim G_8.

Presupunem deci că ρ și λ sînt diferiți de zero și prin transformarea de variabile

$$x'^1 = \lambda\,x^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3$$

putem face $\lambda = 1$.

Grupul de mișcări al spațiului va avea transformările infinitezimale

$$X_1 = p_1 - \rho x^1 p_1 + x^3 p_3, \quad X_2 = p_2, \quad X_4 = x^3 p_1, \quad X_5 = x^3 p_2, \quad X_6 = x^1 p_2.$$

Procedînd la fel ca mai sus rezultă că singurele componente nenule ale conexiunii spațiului A_3 corespunzător sînt

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = 2\alpha\,\rho\,(x^3)^\rho, \quad \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = (\alpha+\beta)\,\rho\,(x^3)^\rho, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = (\alpha-\beta)\,(x^3)^\rho,\\
&\Gamma^3_{33} = 2\alpha\,(1-\rho\,x^1)\,(x^3)^{\rho-1}, \quad \Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = (\alpha+\beta)\,(1-\rho\,x^1)\,(x^3)^{\rho-1},\\
&\Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = (\alpha-\beta)\,(1-\rho\,x^1)\,(x^3)^{\rho-1}, \quad \Gamma^2_{11} = \gamma\,\rho^2\,(x^3)^{2\rho},\\
&\Gamma^2_{33} = \gamma\,(1-\rho x^1)^2\,(x^3)^{2\rho-2} + \gamma\rho(1-\rho x^1)(x^3)^{\rho-2},\\
&\Gamma^2_{13} = \gamma\rho\,(1-\rho x^1)(x^3)^{2\rho-1} + \gamma\rho\nu_1(x^3)^{\rho-1},\\
&\Gamma^2_{31} = \gamma\rho\,(1-\rho\,x^1)\,(x^1)^{2\rho-1} + \gamma\rho\,\nu_2(x^3)^{\rho-1}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Observăm că pentru $\rho = 1$ trebuie să avem $\nu_1 = \nu_2 = 0$ și regăsim conexiunea unor spații A_3 cu grup tranzitiv G_6 [6]. Vom presupune că ρ este un întreg pozitiv mai mare ca 1.

Ecuațiile grupului de mișcări le putem determina ușor prin calcule asemănătoare celor făcute în lucrarea [6]; aceste ecuații se scriu

$$x^1 = (1 - \rho a^1)\, x^1 + a_3^1 x^3 + a^1, \quad x^2 = x^2 + a_1^2 x^1 + a_3^2 x^3 + a^2, \quad x^3 = a_3^3 a^3, \tag{48}$$

$$(1 - \rho a^1)\,(a_3^3)^\rho = 1.$$

Din rezultatele obținute rezultă:

TEOREMA 2. *Spațiile A_3 cu varietăți de intranzitivitate bidimensionale și cu grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale $x^3 p_1$, $x^3 p_2$, $x^1 p_2$, sînt sau spații cu grup maxim sau spațiile care au conexiunea dată de formulele* (47) *și grupul de mișcări G_5 avînd ecuațiile* (48).

§ 3. SPAȚIILE A_3 CU GRUP DE STABILITATE (VII′)

Avem

$$\text{(VII′)} \quad X_4 = x^3 p_1, \quad X_5 = x^3 p_2, \quad X_6 = x^1 p_1 + x^2 p_2$$

și

$$(X_4 X_5) = 0, \quad (X_4 X_6) = X_4, \quad (X_5 X_6) = X_5.$$

Celelalte ecuații de structură ale grupului se vor scrie

$$\begin{aligned} &(X_1 X_4) = 0, \quad (X_1 X_5) = 0, \quad (X_1 X_6) = X_1 + c_{16}^4 X_4 + c_{16}^5 X_5, \\ &(X_2 X_4) = 0, \quad (X_2 X_5) = 0, \quad (X_2 X_6) = X_2 + c_{26}^4 X_4 + c_{26}^5 X_5, \end{aligned} \qquad (X_1 X_2) = 0. \tag{49}$$

Făcînd o schimbare de variabile de forma $x'^i = x^i + \ldots$ (termenii nescriși fiind de ordin superior în x^i), putem lua

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2.$$

În noile variabile expresiile operatorilor X_4 și X_5 rămîn neschimbate iar

$$X_6 = x^1 p_1 + x^2 p_2 + (c_{16}^4 x^1 + c_{26}^4 x^2) x^3 p_1 + (c_{16}^5 x^1 + c_{26}^5 x^2)\, x^3 p_2.$$

Scriind ecuațiile (6) relativ la transformările X_1, X_2, X_4 și X_5, rezultă

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{23}^1 + \Gamma_{32}^1 = 0, \\ &\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = 0, \quad \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{31}^2 = 0, \\ &\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{32}^2, \end{aligned} \tag{50}$$

componentele nenule nedepinzînd de variabilele x^1 și x^2.

Scriind apoi ecuațiile (6) la transformarea X_6 pentru $i = j = 1$, $k = 3$; $i = k = 1$, $j = 3$; $i = j = 2$, $k = 3$; $i = k = 2$, $j = 3$; $i = 1$, $j = 2$ $k = 3$; $i = 2$, $j = 1$, $k = 3$, rezultă

$$c_{16}^4 = c_{16}^5 = c_{26}^4 = c_{26}^5 = 0$$

prin urmare și în noile variabile avem $X_6 = x^1 p_1 + x^2 p_2$ și din ecuațiile (6) mai obținem

$$\Gamma_{33}^1 = \Gamma_{33}^2 = 0. \tag{30'}$$

Componentele nenule ale conexiunii se pot scrie deci sub forma

$$\begin{gathered}\Gamma_{13}^1 = \Phi + \Psi, \quad \Gamma_{31}^1 = \Phi - \Psi, \quad \Gamma_{23}^2 = \Phi + \Theta, \quad \Gamma_{32}^2 = \Phi - \Theta, \\ \Gamma_{23}^1 = -\Gamma_{32}^1 = \Omega, \quad \Gamma_{13}^2 = -\Gamma_{31}^2 = \Xi, \quad \Gamma_{33}^3 = 2\Phi,\end{gathered} \tag{51}$$

în care Φ, Ψ, Θ, Ω și Ξ sînt funcții arbitrare de variabila x^3. Aceste spații posedă un grup tranzitiv de mișcări numai în cazul cînd aceste funcții au anumite forme speciale sau se reduc la niște constante [6]; în general spațiile avînd conexiunea (51) posedă un grup de mișcări intranzitiv cu cinci parametri. Rezultă:

TEOREMA 3. *Spațiile A_3 cu grup intranzitiv de mișcări G_5 avînd grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale $x^3 p_1$, $x^3 p_2$, $x^1 p_1 + x^2 p_2$ au componentele nenule ale conexiunii date de formulele* (51).

§ 4. SPAȚIILE A_3 CU GRUPURILE DE STABILITATE (VIII)

Grupul de stabilitate este dat de operatorii

$$\text{(VIII)} \qquad X_4 = x^3 p_2, \quad X_5 = x^1 p_2, \quad X_6 = x^1 p_1 + c x^2 p_2 + aU$$

și avem

$$(X_4 X_5) = 0, \quad (X_4 X_6) = c X_4, \quad (X_5 X_6) = (c - 1) X_5.$$

Grupul are două plane invariante $x^1 = 0$ și $x^3 = 0$ însă este suficient să considerăm un singur caz. Vom admite că planul invariant este $x^3 = 0$. Procedînd la fel ca și în cazurile precedente determinăm ecuațiile de structură ale grupului și anume

$$\begin{gathered}(X_1 X_4) = 0, \quad (X_1 X_5) = X_2, \quad (X_1 X_6) = (1 + a) X_1, \\ (X_1 X_2) = -\rho X_4, \\ (X_2 X_4) = 0, \quad (X_2 X_5) = 0, \quad (X_2 X_6) = (c + a) X_2,\end{gathered} \tag{52}$$

ρ fiind diferit de zero numai dacă $a = -\dfrac{1}{2}$; acest caz îl vom studia la urmă.

Putem deci presupune că operatorii principali au expresiile (5) și considerînd ecuațiile (6) scrise realtiv la transformările grupului rezultă:

1. Dacă $a = 0$, $c \neq 1, 2$, atunci componentele nenule ale conexiunii spațiului sînt date de formulele (15) și grupul total de mișcări are opt parametri.

2. Pentru $a = 0$, $c = 1$, în afară de componentele date de formulele (15) mai avem

$$\Gamma^2_{33} = \Omega(x^3), \qquad (\Omega = \text{funcție arbitrară}).$$

Aceste spații mai admit și transformarea $x^3 p_1$ deci grupul lor de mișcări are un număr de parametri superior lui 5,

3. $a = 0$, $c = 2$. Componentele nenule ale conexiunii sînt

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \Phi + \Psi, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \Phi - \Psi \\ &\Gamma^2_{33} = \Theta, \quad \Gamma^3_{33} = 2\,\Phi, \end{aligned} \tag{53}$$

cu Φ, Ψ și Θ funcții arbitrare de variabila x^3. Dacă Θ este nul, grupul de mișcări are opt parametri. Pentru Θ oarecare, tensorul de curbură mai are componenta nenulă Γ^2_{113} care face ca numărul de parametri ai grupului să scadă la 5. Putem enunța:

TEOREMA 4. *Spațiile A_3 cu varietăți de intranzitivitate bidimensionale și care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale $x^3 p_2$, $x^1 p_2$, $x^1 p_1 + 2x^2 p_2$ sînt spațiile avînd conexiunea dată de formulele (53) și un grup intranzitiv de mișcări cu cinci parametri.*

4. Dacă $a \neq 0$, componentele nenule ale conexiunii se scriu

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 2\alpha (x^3)^p, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = (\alpha - \beta)(x^3)^p, \quad \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = (\alpha + \beta)(x^3)^p, \\ &\Gamma^2_{11} = \gamma (x^3)^{c(p+1)-2p-1}, \quad \Gamma^2_{33} = \eta (x^3)^{c(p+1)+1}, \\ &\Gamma^2_{13} = \nu_1 (x^3)^{c(p+1)-p}, \quad \Gamma^2_{31} = \nu_2 (x^2)^{c(p+1)-p}, \quad \left(p = -\frac{1+a}{a}, \; -1 < a < 0\right), \end{aligned} \tag{54}$$

cu α, β, γ, η, ν_1 și ν_2 constante.

Pentru a arăta că grupul de mișcări al acestor spații are într-adevăr cinci parametri vom presupune la început $\beta = \gamma = \nu_1 = \nu_2 = \eta = 0$; în această situație componentele conexiunii spațiului se pot scrie sub forma (27) avînd

$$\varphi_1 = \alpha (x^3)^p, \quad \varphi_2 = \varphi_3 = 0. \tag{55}$$

Tensorii contractați ai tensorului de curbură $P_{kl} = \Gamma^i_{ikl}$ și $\Gamma_{jl} = \Gamma^i_{jil}$ au următoarele componente

$$\begin{aligned} &P_{12} = P_{23} = 0, \quad P_{13} = 4p\alpha (x^3)^{p-1}, \\ &\Gamma_{11} = 2\alpha (x^3)^{2p}, \quad \Gamma_{13} = 3\alpha p (x^3)^{p-1}, \quad \Gamma_{31} = -\alpha p (x^3)^{p-1}, \\ &\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \Gamma_{22} = \Gamma_{23} = \Gamma_{32} = \Gamma_{33} = 0. \end{aligned}$$

În locul tensorului Γ_{jl} putem lua tensorul

$$H_{jl} = \frac{1}{2\alpha}(\Gamma_{jl} + \Gamma_{lj}) - \frac{1}{4\alpha} P_{jl}$$

care are o singură componentă nenulă

$$H_{11} = (x^3)^{2p}.$$

Considerînd legea de transformare a tensorului P_{kl}

$$\overline{P}_{rs}\, u_k^r\, u_l^s = P_{kl} \tag{56}$$

rezultă dacă dăm indicilor k și l diferite valori

$$u_2^1 = u_2^3 = 0, \quad u_1^1\, u_3^3 - u_3^1\, u_1^3 = \left(\frac{x^3}{\overline{x}^3}\right)^{p-1}. \tag{57}$$

Din legea de transformare a tensorului

$$\overline{H}_{rs}\, u_j^r\, u_l^s = H_{jl} \tag{56'}$$

rezultă în plus condiția

$$u_3^1 = 0. \tag{58}$$

Grupul de mișcări al spațiului are ecuațiile de forma

$$\overline{x}^1 = \overline{x}^1(x^1), \quad \overline{x}^2 = \overline{x}^2(x^1, x^2, x^3), \overline{x}^3 = \overline{x}^3(x^1, x^3). \tag{59}$$

Din ecuațiile (12) rezultă apoi că x^1, x^2 și x^3 sînt funcții liniare în variabilele respective :

$$\begin{gathered}\overline{x}^1 = a_1^1 x^1 + a^1, \quad \overline{x}^2 = a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 + a^2, \\ \overline{x}^3 = a_3^3 x^3 + a_1^3 x^1 + a^3.\end{gathered} \tag{59'}$$

Înlocuind expresia lui $\overline{x}^3$ în ultima condiție (57) rezultă

$$a_1^3 = a^3 = 0, \quad a_1^1 (a_3^3)^p = 1. \tag{57'}$$

Așadar ecuațiile grupului de mișcări se vor scrie

$$\begin{gathered}\overline{x}^1 = a_1^1 x^1 + a^1, \quad \overline{x}^2 = a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 + a^2, \\ \overline{x}^3 = a_3^3 x^3, \quad [a_1^1 (a_3^3)^p = 1].\end{gathered} \tag{60}$$

Acest grup are, după cum se vede, șase parametri. Dacă presupunem în plus că cel puțin una din constantele γ sau ν_2 sînt diferite de zero, atunci apar noi componente nenule ale tensorului de curbură Γ_{113}^2 respectiv Γ_{313}^2 ceea ce face ca a_2^2 să se exprime în funcție de a_1^1 și a_3^3 deci numărul de parametri ai grupului scade la 5. Avem prin urmare :

TEOREMA 5. *Spațiile A_3 cu varietăți de intranzitivitate bidimensionale și care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale $x^3 p_2$, $x^1 p_2$, $x^1 p_1 + c x^2 p_2 + a U$, $(a \neq 0)$, sînt spațiile cu conexiunea dată de formulele (54) și au un grup de mișcări cu cinci parametri.*

Să considerăm acum cazul $a = -\frac{1}{2}$. Atunci operatorul X_6 are expresia

$$X_6 = x^1 p_1 + (2c - 1)\, x^2 p_2 - x^3 p_3$$

și în ecuațiile (52) ρ este diferit de zero. Putem lua

$$X_1 = p_1 + \rho\, x^3 U, \qquad X_2 = p_2$$

și considerînd transformările X_2, X_4 și X_5 rezultă condițiile

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = 0$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13}, \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{12}, \quad \Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23}, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32}, \tag{61}$$

$$\Gamma^3_{33} = \Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{31},$$

componentele nenule fiind funcții numai de variabilele x^1 și x^3. Ținînd seamă și de transformările X_1 și X_6 rezultă, în primul rînd, prin aceleași calcule efectuate în § 4 al primului capitol, că avem

$$\Gamma^1_{11} = 2\Gamma^2_{11} = 2\Gamma^2_{12} = 2\Gamma^3_{31} = 2\Gamma^3_{13} = \frac{2\rho x^3}{1 + 2\rho x^1 x^3},$$

$$\Gamma^3_{33} = 2\Gamma^1_{13} = 2\Gamma^1_{31} = 2\Gamma^2_{23} = 2\Gamma^2_{32} = \frac{2\rho x^1}{1 + 2\rho x^1 x^3}. \tag{62}$$

Să determinăm acum și celelalte componente nenule Γ^2_{11} Γ^2_{13}, Γ^2_{31}, Γ^2_{33}. Scriind ecuațiile (6) relativ la transformările X_1 și X_6 pentru $i = 2$, $j = k = 1$, avem

$$\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^1}(1 + \rho x^1 x^3) + \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^3}\rho (x^3)^2 + \rho x^3 \Gamma^2_{11} = 0,$$

$$\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^1} x^1 - \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^3} x^3 + (3 - 2c)\,\Gamma^2_{11} = 0. \tag{63}$$

Adunînd la prima ecuație (63) pe a doua înmulțită cu ρx^3, rezultă

$$\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^1} = (c - 2)\frac{2\rho x^3}{1 + 2\rho x^1 x^3}\,\Gamma^2_{11}$$

din care obținem

$$\Gamma^2_{11} = (1 + 2\rho x^1 x^3)^{c-2}\, m\,(x^3).$$

Înlocuind această valoare în a doua ecuație (63) găsim ecuația diferențială care ne dă pe m, anume

$$x^3 \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x^3} - (3 - 2c)\, m = 0$$

de unde rezultă

$$m = \rho\varkappa\,(x^3)^{3-2c}$$

deci

$$\Gamma^2_{11} = \frac{\rho\varkappa\,(x^3)^{3-2c}}{(1 + 2\rho x^1 x^3)^{2-c}}.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2 - \frac{\varkappa (x^3)^{1-2c}}{4c\ (c-1)} (1 + 2\rho x^1 x^3)^c, \quad x'^3 = x^3 \tag{64}$$

putem anula pe $\varkappa$. Să presupunem deci că

$$\Gamma^2_{11} = 0. \tag{62'}$$

Ținînd seamă de formula (62') și procedînd analog găsim

$$\Gamma^2_{13} = -\Gamma^2_{31} = \frac{\beta (x^3)^{1-2c}}{(1 + 2\rho x^1 x^3)}, \quad \Gamma^2_{33} = \frac{\alpha (x^3)^{-1-2c}}{(1 + 2\rho x^1 x^3)^{1-c}}. \tag{62''}$$

Conexiunea nu este definită în origine decît dacă $c \leqslant -\frac{1}{2}$. Dacă $\alpha = \beta = 0$, atunci spațiul este proiectiv, euclidian simetric în sensul lui Cartan [7] și are un grup de mișcări cu șapte parametri. Dacă $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ putem considera și cazul $c = \frac{1}{2}$ și regăsim o clasă de spații A_3 cu grup tranzitiv G_6. În cazul cel mai general α, $\beta \neq 0$ grupul va fi intranzitiv și va avea cinci parametri. Rezultă

TEOREMA 6. *Spațiile A_3 avînd conexiunea dată de formulele* (62) (62'') *sînt spații cu grup intranzitiv de mișcări G_5 avînd grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale $x^3 p_2$, $x^1 p_2$, $x^1 p_1 - x^3 p_3 - (2c-1) x^2 p_2$.*

§ 5. SPAȚIILE A_3 CU GRUPUL DE STABILITATE (IX')

Să considerăm acum cazul cînd operatorii transformărilor infinitezimale ale grupului de stabilitate sînt

(IX) $$X_4 = x^3 p_2, \quad X_5 = x^1 p_2, \quad X_6 = x^2 p_2.$$

Varietățile bidimensionale invariante ale grupului (IX') sînt planele $x^1 = 0$ și $x^3 = 0$; vom considera cazul planului invariant $x^3 = 0$. Ecuațiile de structură ale grupului de mișcări al spațiului se scriu

$$\begin{aligned}
&(X_4 X_5) = 0, \quad (X_4 X_6) = X_4, \quad (X_5 X_6) = X_5,\\
&(X_1 X_4) = 0, \quad (X_1 X_5) = X_2, \quad (X_1 X_6) = 0,\\
&(X_2 X_4) = 0, \quad (X_2 X_5) = 0 \quad\ (X_2 X_6) = X_2,\\
&(X_1 X_2) = \rho X_2 + \lambda X_4 + \nu X_5.
\end{aligned} \tag{65}$$

Putem satisface la această structură luînd

$$X_1 = p_1 + \rho U + \lambda x^3 U + \nu x^1 U, \quad X_2 = p_2. \tag{66}$$

Scriind ecuațiile (6) relativ la transformările X_2, X_4, X_5 și X_6 ale grupului rezultă că putem scrie componentele conexiunii spațiului A_3 corespunzător sub forma (29) cu $\varphi_2 = \psi_2 = 0$.

Pentru determinarea funcțiilor φ_1, φ_3, ψ_1, și ψ_3 vom scrie ecuațiile (6) relativ la transformarea X_4; găsim

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda^1}(1 + \rho x^1 + \lambda x^1 x^3 + \nu (x^1)^2) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda^3}(\rho x^3 + \lambda (x^3)^2 + \\
&+ \nu x^1 x^3) + (\rho + \lambda x^3 + 2\nu x^1)\varphi_1 + \nu x^3 \varphi_3 = \nu \\
&\frac{\partial \varphi_3}{\partial x^1}(1 + \rho x^1 + \lambda x^1 x^3 + \nu (x^1)^2) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}(\rho x^3 + \lambda (x^3)^2 + \gamma x^1 x^3) + \\
&+ (\rho + 2\lambda x^3 + \nu x^1)\varphi_3 + \lambda x^1 \varphi_1 = \lambda
\end{aligned} \tag{67}$$

și un sistem asemănător pentru ψ_1 și ψ_3.

Din sistemul (67) vom obține pe φ_1 și φ_3 expresiile lor depinzînd de funcții arbitrare de o variabilă.

În particular dacă $\lambda = \nu = 0$ găsim

$$\varphi_1 = \frac{\Phi + \Psi}{1 + \rho x^1}, \quad \psi_1 = \frac{\Phi - \Psi}{1 + \rho x^1}; \quad \varphi_3 = \frac{\Theta + \Xi}{1 + \rho x^1}, \quad \psi_3 = \frac{\Theta - \Xi}{1 + \rho x^1}, \tag{68}$$

unde Φ, Ψ, Θ și Ξ sînt funcții arbitrare de variabila x^3. Dacă aceste funcții se reduc la constante regăsim o categorie de spații A_3 cu grup tranzitiv G_6; în cazul cel mai general grupul este intranzitiv și are numai cinci parametri. Putem enunța:

TEOREMA 7. *Există spații A_3 cu grup intranzitiv de mișcări G_5 avînd grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale $x^3 p_2$, $x^1 p_2$, $x^2 p_2$. Conexiunea acestor spații depinde de funcții arbitrare de o variabilă.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ A_3 С ГРУППОЙ G_5, ОБЛАДАЮЩЕЙ ДВУМЕРНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ ИНТРАНЗИТИВНОСТИ

РЕЗЮМЕ

Продолжая классификацию пространств A_3 с интранзитивными группами движений, автор определяет пространства с группами G_5, обладающими двумерными многообразиями интранзитивности. Находятся следующие категории пространств (указываются формулы, дающие выражения отличных от нуля составляющих связ-

ности, а также и операторы бесконечно малых преобразований соответствующих групп).

1° (39) $p_1,\ p_2,\ x^1p_2,\ x^1p_1 - x^2p_2,\ x^2p_1$;

2° (47) $p_1 - x^1p_1 + x^3p_3,\ p_2,\ x^3p_1,\ x^3p_2,\ x^1p_2$;

3° (51) $p_1,\ p_2,\ x^3p_1,\ x^3p_2,\ x^1p_1 + x^2p_2$;

4° (53) $p_1,\ p_2,\ x^3p_2,\ x^1p_2,\ x^1p_1 + 2x^2p_2$;

5° (54) $p_1,\ p_2,\ x^3p_2,\ x^1p_2,\ x^1p_1 + cx^2p_2 + aU\ (-1 \leqslant a < 0)$;

6° (62) $(62'')\ p_1 + x^3U,\ p_2,\ x^3p_2,\ x^1p_2,\ x^1p_1 + (2c-1)\,x^2p_2 - x^3p_3 \left(c \leqslant \frac{1}{2}\right)$

$(U = x^1p_1 + x^2p_2 + x^3p_3)$;

7° Связность дана формулами (29) где $\varphi_2 = \psi_2 = 0$; φ_1 и φ_3 — решения системы уравнений в частных производных (67), а ψ_1 и ψ_3 — суть решения аналогичной системы.

Операторы бесконечно малых преобразований группы имеют в этом случае вид $p_1 + \rho U + \lambda x^3U + \nu x^1U,\ p_2,\ x^3p_2,\ x^1p_2,\ w^2p_2$.

DÉTERMINATION DES ESPACES A_3 AYANT UN GROUPE G_5 À VARIÉTÉS D'INTRANSITIVITÉ BIDIMENSIONNELLES

RÉSUMÉ

En continuant la classification des espaces A_3 ayant des groupes intransitifs de mouvements, l'auteur détermine les espaces à groupes G_5 ayant des variétés d'intransitivité bidimensionnelles. Il trouve les catégories d'espaces suivantes (nous mentionnons les formules qui donnent les expressions des composantes de la connexion non nulles, ainsi que les opérateurs des transformations infinitésimales des groupes correspondants) :

1° (39) $p_1,\ p_2,\ x^1p_2,\ x^1p_1 - x^2p_2,\ x^2p_1$;

2° (47) $p_1 - x^1p_1 + x^3p_3,\ p_2,\ x^3p_1,\ x^3p_2,\ x^2p_2$;

3° (51) $p_1,\ p_2,\ x^3p_1,\ x^3p_2,\ x^1p_1 + x^2p_2$;

4° (53) $p_1,\ p_2,\ x^3p_2,\ x^1p_2,\ x^1p_1 + 2x^2p_2$;

5° (54) $p_1,\ p_2,\ x^3p_2,\ x^1p_2,\ x^1p_1 + cx^2p_2 + aU\ (-1 \leqslant a < 0)$;

6° (62) (62'') $p_1+x^3U,\ p_2,\ x^3p_2,\ x^1p_2,\ x^1p_1+(2c-1)\,x^2p_2-x^3p_3\left(c\leqslant-\frac{1}{2}\right)$

$(U=x^1p_1+x^2\ p_2+x^3p_3)$;

7° La connexion est fournie par les formules (29) avec $\varphi_2=\psi_2=0$; φ_1 et φ_3 sont des solutions du système d'équations à dérivées partielles (67), et ψ_1, ψ_3 des solutions d'un système semblable.

Les opérateurs des transformations infinitésimales du groupe sont dans ce cas

$$p_1+\rho U+\lambda x^3U+\nu x^1U,\ p_2,\ x^3p_2,\ x^1p_2,\ x^2p_2.$$

BIBLIOGRAFIE

1. V. DUMITRAS, *Determinarea spațiilor A_3 cu grup G_5 cu varietăți de intranzitivitate unidimensionale.* Studii și cercetări matematice, **XI**, *2*, 375—407 (1960).
2. S. LIE, F. ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen.* Leipzig, vol. III, 1893, p. 117.
3. V. DUMITRAS, *Asupra grupului de mișcare al unui spațiu A_n.* Comunicările Acad. R.P.R., **IX**, *9*, 875—879 (1959).
4. G. VRĂNCEANU, *Lecții de geometrie diferențială.* Ed. Acad. R.P.R., București, 175 (1960).
5. V. DUMITRAS, *Asupra spațiilor A_3 cu grup intranzitiv maxim.* Comunicările Acad. R.P.R., **IX**, *9*, 899—903 (1959).
6. В. ДУМИТРАШ, *Определение пространства A_3 с группой G_6.* Revue de math. pures et appliquées, *3 - 4* (1960).
7. V. DUMITRAS, *Determinarea spațiilor A_3 cu grup tranzitiv G_7.* Studii și cercetări matematice, **VIII**, *1 — 2*, 183—234 (1957).
8. G. VRĂNCEANU, *Proprietăți diferențiale globale ale spațiilor A_n cu grup maxim G_5.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secția de științe matematice și fizice, **VI**, *1*, 49—59 (1954).

CUATERNIONI OLOMORFI

DE

DAN PASCALI

Lucrarea de față își propune o prezentare, cu ajutorul cuaternionilor, a extensiunilor la spațiul tridimensional ale unor rezultate fundamentale din teoria funcțiilor de o variabilă complexă.

Ocupîndu-se de funcții complexe care nu sînt monogene, D. P o m p e i u introduce în 1912, pentru prima oară [1], derivata areolară a unei funcții continue, ca funcționala ce măsoară abaterea acesteia de la olomorfie.

Dacă $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ este continuă în punctul z_0, atunci *derivata areolară* a funcției $f(z)$ în punctul z_0 este

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_0} = \lim_{\gamma \to z_0} \frac{\frac{1}{2i}\int_\gamma f(z)\,dz}{\iint_\delta dw},$$

unde δ este domeniul interior curbei simple, rectificabile și închise γ.

În 1931, în teza sa de doctorat [2], prof. N. T e o d o r e s c u scoate în evidență fecunditatea derivatei areolare, punînd-o în legătură cu soluțiile generalizate ale unei ecuații cu derivate parțiale.

În 1952, I. N. V e k u a [3] reia studiul derivatei areolare în legătură cu soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = Af + B\bar{f} + C.$$

Se poate ușor defini *derivata medie* (*coderivata areolară*) plecînd de la relația lui I. N. Vekua:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

și anume

$$\frac{\partial f}{\partial z_0} = -\lim_{\gamma \to z_0} \frac{\frac{1}{2i}\int_\gamma f(z)\,d\bar{z}}{\iint_\delta dw}.$$

Dacă $f(z)$ este de clasă $C^{(1)}$ în D, derivata areolară și derivata medie sînt definite de operațiile

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right],$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right].$$

Se constată ușor că dacă $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ în D, funcția $f(z)$ este olomorfă în D.

Cu ajutorul derivatei areolare și derivatei medii putem scrie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\,\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Această liniarizare a fost punctul de plecare a extensiunii derivatei areolare la spațiu cu mai multe dimensiuni.

Pentru spațiul tridimensional, Gr. C. Moisil și N. Teodorescu [4] introduc operatorii:

$$D\Phi = \left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\Phi,$$

$$\overline{D}\Phi = \left(\bar{\gamma}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{\gamma}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \bar{\gamma}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\Phi,$$

unde

$$\gamma_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\bar{\gamma}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{\gamma}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{\gamma}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (M)$$

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \Phi = \begin{Vmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Vmatrix}.$$

Ansamblul de funcții $\Phi(x_1, x_2, x_3) = (\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, scris ca matrice cu o coloană, se numește *semivector*. Vom presupune că $\Phi_i(x_1, x_2, x_3) \in C^{(2)}$, $(i = 0, 1, 2, 3)$, într-un domeniu V.

Dacă în V

$$D\Phi = 0$$

adică

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} = 0 \\ &\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \tag{A}$$

semivectorul $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ se numește *olomorf* în V. Dacă în V

$$\overline{D}\Phi = 0$$

adică

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} = 0, \\ &\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} = 0, \end{aligned} \tag{A'}$$

semivectorul $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ se numește *coolomorf* în V.

Folosind un simbolism matricial, se stabilesc formule de reprezentare de tip Cauchy și Pompeiu. Din egalitățile

$$\overline{\gamma}_i \gamma_j + \overline{\gamma}_j \gamma_i = 2\delta_{ij} I$$

$$\gamma_i \overline{\gamma}_j + \gamma_j \overline{\gamma}_i = 2\delta_{ij} I$$

se obține

$$D\overline{D} = \overline{D}D = \Delta I.$$

Definiția largă a acestor operatori, împreună cu cîteva aplicații ale lor în fizica matematică, sînt date de N. Teodorescu [5].

Studiul semivectorilor olomorfi este continuat de A.V. Bițadze [6] — [9], M. Nedelcu [10] — [12] și Huan-Le-Dî [13]. Un punct de vedere vectorial analog este dezvoltat de M. S. Șneerson [14] și de D. Pascali și S. Gogonea [15].

Simbolismul matricial este extins de Gr. C. Moisil [16] la spațiul cu n dimensiuni.

O a doua cale de extensiune a derivatei areolare la spațiu cu mai multe dimensiuni este fundată tot în 1931, de Gr. C. Moisil [17], [16] prin folosirea numerelor hipercomplexe.

În particular, pentru o funcție cuaternionică

$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_0 + \Phi_1 e_1 + \Phi_2 e_2 + \Phi_3 e_3,$$

unde

$$\Phi_i = \Phi_i(x_0, x_1, x_2, x_3) \in C^{(2)} \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

se introduc operatorii:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\overline{\mathbf{D}} = \frac{\partial}{\partial x_0} - \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Evident,

$$\mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} = \Delta_4 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Funcția $\mathbf{\Phi}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ se numește monogenă dacă

$$\mathbf{D}\mathbf{\Phi} = 0$$

adică

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} = 0,\\
&\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_0} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} = 0,\\
&\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_0} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_0} = 0.
\end{aligned} \tag{B}$$

Independent de Gr. C Moisil, începînd din 1934, R. Fueter [18] și școala sa au efectuat un studiu sistematic asupra funcțiilor cuaternionice.

Dacă funcția cuaternionică $\mathbf{\Phi}$ este independentă de variabila x_0, sistemele (A) și (B) coincid, fiind echivalente cu ecuația

$$\mathbf{D}\mathbf{\Phi} = 0$$

definită de operatorul

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{C}$$

menționat în treacăt de Gr. C. Moisil [16], [19].

Bazîndu-ne pe proprietățile asemănătoare dintre semivectori și cuaternioni [20], în această lucrare vom studia cuaternioni olomorfi, cu ajutorul operatorului (C).

Folosirea algebrei cuaternionilor în locul simbolismului matricial ni se pare a fi mai naturală, analogia cu variabila complexă devenind mai pronunțată.

Transcriind în limbajul cuaternionilor rezultatele mai importante asupra semivectorilor olomorfi, lucrarea reprezintă o sinteză a extensiunilor spațiale a unor elemente din teoria bidimensională a ecuațiilor integrale singulare [21].

§ 1. CORPUL CUATERNIONILOR REALI

1. Prin *cuaternioni* înțelegem sistemul de numere hipercomplexe ale căror unități sînt

$$1 = \mathbf{e}_0,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$$

care satisfac următoarea *tablă de înmulțire*

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -1, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3;\quad \mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1;\quad \mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1.$$

Înmulțirea unităților îndeplinește relațiile

$$\mathbf{e}_m(\mathbf{e}_n\,\mathbf{e}_p) = (\mathbf{e}_m\,\mathbf{e}_n)\,\mathbf{e}_p, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{e}_m\,\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n\,\mathbf{e}_m = -2\delta_{mn}. \qquad (m,\ n = 1,\ 2,\ 3).$$

Forma generală a unui cuaternion real este

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \sum_0^3 a_m\,\mathbf{e}_m, \tag{1.3}$$

unde a_i, $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$, sînt numere reale. Cuaternionii îi vom nota cu litere aldine.

Sistemul cuaternionilor reali formează un *spațiu liniar* peste corpul numerelor reale.

Produsul cuaternionilor

$$\mathbf{a} = \sum_0^3 a_i\,\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{b} = \sum_0^3 b_i\,\mathbf{e}_i,$$

conform *tablei de înmulțire*, este dat de expresia

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + a_0(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) +$$

$$+ b_0(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

Se vede ușor că această înmulțire este asociativă:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

și distributivă la dreapta și la stînga față de adunare

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

nefiind, în general, comutativă.

Pentru fiecare cuaternion $\mathbf{a}$ diferit de zero, există un cuaternion invers unic

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{a_0 - a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Într-adevăr

$$\mathbf{a}\,\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}\cdot\mathbf{a} = 1.$$

În consecință, mulțimea cuaternionilor este un *corp necomutativ*.

Dacă interpretăm pe $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ca o bază ortogonală în spațiul tridimensional real, atunci cuaternionul (1.3) va fi format din scalarul a_0 și vectorul $\vec{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ și vom scrie

$$\mathbf{a} = (a_0, \vec{a}).$$

Atunci produsul (1.4) se poate scrie

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_0, \vec{a})\cdot(b_0, \vec{b}) = a_0 b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b} + a_0\vec{b} + b_0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b}, \quad (1.4')$$

unde prin $\vec{a}\cdot\vec{b}$ și $\vec{a}\times\vec{b}$ am notat produsul scalar și produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ în baza $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Pentru orice cuaternion

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = (a_0, \vec{a})$$

definim *cuaternionul conjugat*.

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3 = (a_0, -\vec{a}).$$

Operația de conjugare posedă următoarele proprietăți:

1) $\bar{\mathbf{e}}_m = -\mathbf{e}_m$, $(m = 1, 2, 3)$, și $\bar{\mathbf{e}}_0 = \mathbf{e}_0$;

2) $\bar{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}$ și $\overline{c\mathbf{a}} = c\bar{\mathbf{a}}$, ($c$ fiind număr real);

3) $\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = 2a_0$ și $\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}} = 2\vec{a}$;

4) $\overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$ și $\overline{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}$.

Modulul cuaternionului $\mathbf{a}$ este definit de

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (1.5)$$

Din această definiție rezultă

$$1)\ \mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}} = |\mathbf{a}|^2 \text{ și deci } |\bar{\mathbf{a}}| = |\mathbf{a}|;$$

$$2)\ \mathbf{a}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|^2} \text{ și deci } |\mathbf{a}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{a}|};$$

$$3)\ |\mathbf{a}| = 0 \text{ implică } \mathbf{a} = 0;$$

$$4)\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^{-1} = \mathbf{b}^{-1}\cdot\mathbf{a}^{-1}.$$

O proprietate mai puțin evidentă este inegalitatea triunghiului

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|. \tag{1.6}$$

Într-adevăr,

$$\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{b}} = \sum_0^3 a_m\, b_m + \sum_1^3 A_m\, \mathbf{e}_m,$$

unde A_m $(m = 1, 2, 3)$, sînt numere reale. După inegalitatea Cauchy-Buneakovski

$$\left(\sum_0^3 a_m\, b_m\right)^2 \leqslant |\mathbf{a}|^2\, |\mathbf{b}|^2$$

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{b}\bar{\mathbf{a}} = 2\sum_0^3 a_m\, b_m \leqslant 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$$

și

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + (\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{b}\cdot\bar{\mathbf{a}}) + |\mathbf{b}|^2 \leqslant |\mathbf{a}|^2 +$$

$$+ 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$$

adică (1.6).

Prin urmare cuaternionii înzestrați cu norma (1.5) formează un *spațiu metric.*

Menționăm încă o egalitate, care o vom folosi mai departe

$$\sum_0^3 \mathbf{e}_m\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_m = -2\bar{\mathbf{a}}. \tag{1.7}$$

2. Cuaternionul

$$\mathbf{q} = x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 + x_3\,\mathbf{e}_3$$

se numește *cuaternionul de poziție al punctului* Q $(\mathbf{q}) = Q$ (x_1, x_2, x_3), iar cuaternionul

$$\Phi(\mathbf{q}) = \Phi_0(x_1, x_2, x_3) + \Phi_1(x_1, x_2, x_3)\,\mathbf{e}_1 + \Phi_2(x_1, x_2, x_3)\,\mathbf{e}_2 +$$

$$+ \Phi_3(x_1, x_2, x_3)\,\mathbf{e}_3 = \sum_0^3 \Phi_m(x_1, x_2, x_3)\ \mathbf{e}_m = (\Phi_0, \vec{\Phi}),$$

unde Φ_m (x_1, x_2, x_3), $(m = 0, 1, 2, 3)$, sînt patru funcții oarecare definite într-un domeniu tridimensional V, se numește *funcție cuaternionică* în V.

În cele ce urmează și în § 2 vom presupune că Φ_m au derivate parțiale de ordinul întîi continue în V adică $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) \in C^1[V]$.

Enumerăm cîteva proprietăți ale derivatelor parțiale

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_i} = \sum_1^3 \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_i} \mathbf{e}_m \quad , \qquad (i = 1, 2, 3)$$

necesare mai jos:

$$1) \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Psi}) = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial x_i} \; ;$$

$$2) \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{b}, \text{ unde } \mathbf{a} \text{ și } \mathbf{b} \text{ sînt cuaternioni constanți;}$$

$$3) \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{\Phi}^{-1}) = -\mathbf{\Phi}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{\Phi}^{-1};$$

$$4) \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{\Psi}) = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{\Psi} + \mathbf{\Phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial x_i} .$$

3. Fie S o suprafață Leapunov închisă inclusă în V, T^+ domeniul interior suprafeței S, T^- domeniul exterior lui S, $\vec{n}$ (n_1, n_2, n_3) versorul normalei exterioare la S iar

$$\mathbf{d\sigma} = \mathbf{n} \cdot dS = dx_2\, dx_3\, \mathbf{e}_1 + dx_1\, dx_3\, \mathbf{e}_2 + dx_1\, dx_2\, \mathbf{e}_3,$$

unde dS este elementul de suprafață al lui S.

Atunci formula lui Gauss-Ostrogradski pentru un cuaternion $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q})$ se scrie

$$\iiint_{T^+} \left(\sum_1^3 \mathbf{e}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_m} \right) dv = \iint_S d\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{\Phi} \, , \qquad (1.8)$$

$$\iiint_{T^+} \left(\sum_1^3 \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_m} \cdot \mathbf{e}_m \right) dv = \iint_S \mathbf{\Phi} \cdot d\mathbf{\sigma} \qquad (1.8')$$

iar pentru doi cuaternioni $\mathbf{\rho}(\mathbf{q})$ și $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q})$

$$\iiint_{T^+} \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x_m} (\mathbf{\rho} \cdot \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{\Phi})\, dv = \iint_S \mathbf{\rho} \cdot d\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{\Phi}.$$

Însă cum

$$\sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x_m} (\mathbf{\rho} \cdot \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{\Phi}) = \left(\sum_1^3 \frac{\partial \mathbf{\rho}}{\partial x_m} \cdot \mathbf{e}_m \right) \cdot \mathbf{\Phi} + \mathbf{\rho} \cdot \left(\sum_1^3 \mathbf{e}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_m} \right),$$

obținem

$$\iiint_{T^+}\left(\sum_1^3 \frac{\partial \rho}{\partial x_m}\cdot \mathbf{e}_m\right)\cdot \mathbf{\Phi}\,dv + \iiint_{T^+}\rho\cdot\left(\sum_1^3 \mathbf{e}_m\cdot\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_m}\right)dv = \iint_S \rho\cdot d\sigma\mathbf{\Phi}. \quad (1.9)$$

Această formulă ne va folosi în § 2 la reprezentarea cuaternionilor olomorfi.

§ 2. CUATERNIONII OLOMORFI

4. Considerațiile din § 1 conduc, în mod natural, la introducerea următorilor operatori:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}=\sum_1^3 \mathbf{e}_m\frac{\partial}{\partial x_m},\\ \widetilde{\mathbf{D}} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2+\frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3=\sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{e}_m.\end{aligned} \quad (2.1)$$

Principalele rezultate ale acestui paragraf mi-au fost sugerate de ultimul capitol al lucrării acad. Gr. C. Moisil [16].

Definiția 1. *Dacă cuaternionul*

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) = \sum_0^3 \Phi_m(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_m$$

este uniform și satisface în V ecuația

$$\mathbf{D}\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

$\mathbf{\Phi}(\mathbf{q})$ *se numește cuaternion* olomorf *în V.*

Definiția 2. *Dacă cuaternionul*

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) = \sum_0^3 \Phi_m(x_1, x_2, x_3)\,\mathbf{e}_m$$

este uniform și satisface în V ecuația

$$\widetilde{\mathbf{D}}\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

$\mathbf{\Phi}(\mathbf{q})$ *se numește cuaternion* coolomorf *în V.*

Într-adevăr, ecuațiile

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\mathbf{\Phi} = &-\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3}\right)+\mathbf{e}_1\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1}+\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2}-\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}\right)+\\ &+\mathbf{e}_2\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_2}+\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3}-\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1}\right)+\mathbf{e}_3\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_3}+\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}\right)=0,\end{aligned}$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\Phi} = -\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3}\right)+\mathbf{e}_1\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1}+\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}-\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2}\right)+$$

$$+\mathbf{e}_2\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_2}+\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1}-\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3}\right)+\mathbf{e}_3\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_3}+\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}-\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}\right)=0$$

sînt identice cu sistemele (A) și (B).

Vectorial, ecuația (2.2) se scrie

$$\begin{cases} \operatorname{grad}\ \Phi_0 + \operatorname{rot}\ \vec{\Phi} = 0 \\ \operatorname{div}\ \vec{\Phi} = 0 \end{cases}$$

iar ecuația (2.3)

$$\begin{cases} \operatorname{grad}\ \Phi_0 - \operatorname{rot}\ \vec{\Phi} = 0, \\ \operatorname{div}\ \vec{\Phi} = 0. \end{cases}$$

Sub această formă au fost considerate de M.S. Șneerson [14] și de D. Pascali și S. Gogonea [15].

Un cuaternion $\boldsymbol{\Phi}$ olomorf și coolomorf, în același timp, satisface ecuațiile

$$\operatorname{grad}\ \Phi_0 = 0;\ \operatorname{div}\ \vec{\Phi} = 0;\ \operatorname{rot}\ \vec{\Phi} = 0.$$

Egalitatea

$$\widetilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\Phi} = -\overline{\mathbf{D}\overline{\boldsymbol{\Phi}}} \tag{2.4}$$

corespunde $\left(\text{făcînd abstracție de factorul } \frac{1}{2i}\right)$, relației

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}, \qquad (f = u + iv).$$

pusă în evidență de I. N. Vekua [3].

TEOREMA 1. *Dacă* $\boldsymbol{\Phi}$ *este un cuaternion olomorf în* V, *atunci* $\overline{\boldsymbol{\Phi}}$ *este un cuaternion coolomorf în* V *și reciproc.*

Într-adevăr, din egalitatea (2.4)

$$\widetilde{\mathbf{D}}\overline{\boldsymbol{\Phi}} = \overline{\mathbf{D}\boldsymbol{\Phi}} = 0.$$

Prin iterarea operatorilor introduși, obținem

$$\mathbf{D}^2\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{D}(\mathbf{D}\boldsymbol{\Phi}) = -\Delta_3\boldsymbol{\Phi} \text{ și } \widetilde{\mathbf{D}}^2\boldsymbol{\Phi} = \widetilde{\mathbf{D}}(\widetilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\Phi}) = -\Delta_3\boldsymbol{\Phi},$$

unde Δ_3 este operatorul lui Laplace în spațiul tridimensional. Obținem astfel un rezultat cunoscut din [4] și [15]:

TEOREMA 2. *Componentele unui cuaternion de clasă* $C^2(V)$ *olomorf sau coolomorf în* V *sînt funcții armonice în* V.

Cu ajutorul operatorilor introduși, formulele (1.8), (1,8′) și (1.9) se scriu

$$\iint_S d\sigma \cdot \Phi = \iiint_{T^+} \mathbf{D}\Phi \, dv, \tag{2.5}$$

$$\iint_S \Phi \cdot d\sigma = \iiint_{T^+} \tilde{\mathbf{D}}\Phi \, dv, \tag{2.6}$$

$$\iint_S \rho \cdot d\sigma \cdot \Phi = \iiint_{T^+} \rho \cdot (\mathbf{D}\Phi) \, dv + \iiint_{T^+} (\tilde{\mathbf{D}}\rho) \cdot \Phi \, dv. \tag{2.7}$$

TEOREMA 3. *Dacă* $\Phi(\mathbf{q})$ *este un cuaternion olomorf în* V, *atunci*

$$\iint_S d\sigma_{\mathbf{q}} \cdot \Phi(\mathbf{q}) = 0$$

iar dacă $\Phi(\mathbf{q})$ *este un cuaternion coolomorf în* V, *atunci*

$$\iint_S \Phi(\mathbf{q}) \cdot d\sigma_{\mathbf{q}} = 0$$

pentru orice suprafață Leapunov închisă S, *trasată în* V.

Dacă $\Phi(\mathbf{q})$ *este un cuaternion olomorf și* $\rho(\mathbf{q})$ *un cuaternion coolomorf în* V, *atunci*

$$\iint_S \rho(\mathbf{q}) \cdot d\sigma_{\mathbf{q}} \cdot \Phi(\mathbf{q}) = 0.$$

pentru orice suprafață Leapunov închisă S, trasată în V.

5. Dacă $P(\mathbf{p})$ este un punct fix din V și $Q(\mathbf{q})$ un punct al suprafeței S, fie $\mathbf{r} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ și

$$\rho(P, Q) = -\mathbf{D}\frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\tilde{\mathbf{D}}\frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{1}{\mathbf{r}|\mathbf{r}|}.$$

Pentru $P \neq Q$,

$$\mathbf{D}\rho = \tilde{\mathbf{D}}\rho = \Delta_3\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right) = 0. \tag{2.8}$$

Dacă P aparține domeniului T^+, mărginit de suprafața S, să înconjurăm punctul P printr-o sferă Σ, interioară lui T^+ și să notăm prin ω domeniul limitat de Σ. Formula (2.7), pentru domeniul $T^+ - \omega$, se scrie

$$\iint_S \rho \cdot d\sigma_{\mathbf{q}} \cdot \Phi(\mathbf{q}) - \iint_\Sigma \rho \cdot d\sigma_{\mathbf{q}} \cdot \Phi(\mathbf{q}) = \iiint_{T-\omega} \rho \cdot (\mathbf{D}\Phi(\mathbf{q})) \, dv_{\mathbf{q}}.$$

Cum pe Σ

$$d\sigma = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\, dS,$$

atunci

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to 0} \iint_{\Sigma} -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\cdot\Phi(\mathbf{q})\, dS_{\mathbf{q}} = \lim_{|\mathbf{r}|\to 0} \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \iint_{\Sigma} \Phi(\mathbf{q})\, dS_{\mathbf{q}} = 4\pi\Phi(\mathbf{p})$$

și prin urmare pentru $P(\mathbf{p}) \in T^+$

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\cdot\frac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\cdot\Phi(\mathbf{q}) - \frac{1}{4\pi} \iiint_{T^+} \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\cdot\frac{\mathbf{D}\Phi(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\, dv_{\mathbf{q}}. \quad (2.9)$$

Pentru $P(\mathbf{p}) \in T^-$, conform egalităților (2.7) și (2.8), avem

$$0 = \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\cdot\frac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\cdot\Phi(\mathbf{q}) - \frac{1}{4\pi} \iiint_{T^+} \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\cdot\frac{\mathbf{D}\Phi(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\, dv_{\mathbf{q}}. \quad (2.10)$$

Aceste formule sînt analoge formulelor de reprezentare pentru semivectori ale lui Gr.C. Moisil și N. Teodorescu [4], extensiunea spațială a formulelor integrale ale lui Pompeiu [1].

Dacă Φ este un cuaternion olomorf în T^+, adică $\mathbf{D}\Phi = \mathbf{0}$ în T^+, formulele (2.9) și (2.10) devin

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S} \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\cdot\frac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\cdot\Phi(\mathbf{q}) = \begin{cases} \bar{\Phi}(\mathbf{p}) \text{ pentru } P(\mathbf{p}) \in T^+ \\ \mathbf{0} \text{ pentru } P(\mathbf{p}) \in T^- \end{cases} \quad (2.11)$$

pe care o vom numi *formula integrală a lui Cauchy*, prin analogie cu planul complex.

Forma vectorială a acestor formule a fost dată de D. Pascali și S. Gogonea [15].

6. Să considerăm acum integrala de volum

$$\Psi(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{T^+} \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\cdot\frac{\Phi(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\, dv_{\mathbf{q}},$$

unde $\Phi \in C^{(1)}(T^+)$. Deoarece

$$\rho = \frac{1}{(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|\mathbf{q}-\mathbf{p}|} = -\mathbf{D}\left(\frac{1}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\right)$$

putem scrie

$$\Psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi}\mathbf{D} \iiint_{T^+} \frac{\Phi(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\, dv_{\mathbf{q}}.$$

Conform ecuației lui Poisson,

$$\mathbf{D}\psi = \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\left(\mathbf{D} \iiint_{T^+} \frac{\Phi(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\, dv_{\mathbf{q}}\right) = -\frac{1}{4\pi}\Delta_3 \iiint_{T^+} \frac{\Phi(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\, dv_{\mathbf{q}} = \Phi$$

la fel ca pentru funcții complexe.

7. Se vede ușor că dacă $\Phi(\mathbf{q})$ este un cuaternion olomorf în V și $t>0$ un parametru real, atunci $\Phi^*(\mathbf{q}) = \Phi(t\mathbf{q})$ este olomorf în $V^* = tV$.

Funcția cuaternionică $\Phi(\mathbf{q})$ este *olomorfă în punctul* $\mathbf{q} = \infty$ dacă :

a) Pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice r cu $0 < r < \varepsilon$ funcția cuaternionică $\Phi\left(\frac{\mathbf{q}}{r}\right)$ este olomorfă și mărginită în modul.

b) $\lim_{r\to 0} \Phi\left(\frac{\mathbf{q}}{r}\right)$ există și este independentă de $\mathbf{q}$.

Analog definim olomorfia în punctul $\mathbf{q} = -\infty$.

TEOREMA 4. (Teorema lui Liouville). *Dacă* $\Phi(\mathbf{q})$ *este olomorf în tot spațiul, atunci* $\Phi(\mathbf{q})$ *este un cuaternion constant.*

Demonstrație. Fie $P(\mathbf{p}) \neq \infty$ un punct oarecare. Alegem $\varepsilon > 0$, astfel ca $|\mathbf{p}| < \frac{1}{\varepsilon}$, și sfera $\Sigma_{\frac{1}{r}}$ cu centrul în origine și de rază $\frac{1}{r}$ cu $0 < r < \varepsilon$.

Cuaternionul $\Phi(\mathbf{q})$ fiind olomorf,

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_{\frac{1}{r}}} \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \cdot \frac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|} \cdot \Phi(\mathbf{q}).$$

Această reprezentare independentă de r se poate scrie

$$\Phi(\mathbf{p}) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_{\frac{1}{r}}} \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \cdot \frac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|} \cdot \Phi(\mathbf{q}).$$

Să punem $\mathbf{q} = \frac{1}{r}\mathbf{q}'$, unde $|\mathbf{q}'| = 1$. Atunci $d\sigma_{\mathbf{q}} = \frac{1}{r^2} d\sigma'_{\mathbf{q}}$ și

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_1} \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathbf{q}'-r\mathbf{p}} \cdot \frac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}'-r\mathbf{p}|} \cdot \Phi\left(\frac{\mathbf{q}'}{r}\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{\mathbf{q}'} \cdot \frac{d\sigma_{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}'|}\right] \cdot \Phi(\infty) = \Phi(\infty)$$

oricare ar fi punctul $P(\mathbf{p})$.

Această teoremă este prezentată de Huan-Le-Dî [13] ca o consecință a armonicității componentelor unui semivector olomorf și a teoremei lui Liouville pentru funcții armonice. Am preferat să dăm aici o demonstrație directă, pentru $\Phi(\mathbf{q}) \in C^{(1)}$.

La fel ca în teoria funcțiilor armonice pot fi demonstrate următoarele teoreme menționate de Huan-Le-Dî [13].

TEOREMA 5. (Teorema maximului modulului). *Dacă cuaternionul* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{p})$ *este olomorf în domeniul mărginit* T^+ *de frontieră* S *și continuu în* $T+S$, *atunci norma*

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{p})| = \sqrt{\sum_0^3 \Phi_i^2(\mathbf{p})}$$

atinge valoarea maximă și minimă numai pe frontiera S, *afară de cazul în care acest cuaternion este constant.*

TEOREMA 6. (Prima teoremă a lui Harnack). *Dacă șirul de cuaternioni*

$$\{\mathbf{\Phi}^n(\mathbf{p})\}, \qquad (n = 1,2,\ldots),$$

olomorfi în T^+ *și continui în* $T+S$, *converge uniform pe frontiera lui* S, *atunci șirul converge și în* T^+, *cuaternionul limită fiind de asemenea olomorf în* T^+.

TEOREMA 7. (A doua teoremă a lui Harnack). *Dacă șirul de cuaternioni olomorfi în* T^+ :

$$\{\mathbf{\Phi}^n(\mathbf{p})\}, \qquad (n = 1,2,3,\ldots),$$

converge într-un punct interior al acestui domeniu și pentru orice n

$$\mathbf{\Phi}_m^{(n+1)}(\mathbf{p}) \geqslant \mathbf{\Phi}_m^{(n)}(\mathbf{p}), \qquad (m = 0,1,2,3)$$

în toate punctele domeniului T^+, *atunci șirul converge în tot acest domeniu către un cuaternion olomorf în* T^+ *iar în orice subdomeniu mărginit și închis al lui* T^+ *convergența este uniformă.*

8. Considerații analoage se pot face și pentru cuaternioni coolomorfi. De exemplu, formula integrală a lui Cauchy

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) \cdot \frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|} \cdot \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}} = \begin{cases} \mathbf{\Phi}(\mathbf{p}) & \text{pentru } P(\mathbf{p}) \in T^+, \\ \mathbf{0} & \text{pentru } P(\mathbf{p}) \in T^-, \end{cases} \tag{2.12}$$

§ 3. EXTENSIUNEA OPERATORILOR D ȘI $\widetilde{\mathrm{D}}$

9. În paragraful precedent am definit operatorii **D** și $\widetilde{\mathbf{D}}$, corespunzători derivatei areolare și medii în sens restrîns, deoarece ei au fost aplicați numai cuaternionilor de clasă $C^{(1)}$.

În acest paragraf vom extinde acești operatori pentru cuaternioni continui, transpunînd cîteva rezultate obținute, pentru semivectori, de prof. N. Teodorescu [2].

Definiția largă a operatorilor **D** și $\widetilde{\mathbf{D}}$ se bazează pe formulele fundamentale

$$\iint_S d\sigma_q \cdot \mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) = \iiint_{T^+} \mathbf{D}\mathbf{\Phi}(\mathbf{q})\, dv_q, \tag{3.1}$$

$$\iint_S \Phi(q)\, d\sigma_q = \iiint_{T^+} \tilde{D}\Phi(q)\, dv_q . \tag{3.2}$$

Definiția 3. *O funcție cuaternionică* $\Phi(q)$ *continuă în* V *admite o derivată areolară (respectiv o derivată medie) în orice punct al domeniului* $T^+ \subset V$, *mărginit de suprafața Leapunov* S, *dacă există o funcție* $D\Phi$ *(respectiv* $\tilde{D}\Phi$*) mărginită și integrabilă în* $T^+ + S$ *satisfăcînd relația (3.1) (respectiv (3.2)).*

În acest caz

$$D\Phi(p) = \lim \frac{\iint_S d\sigma_q \cdot \Phi(q)}{\iiint_{T^+} dv_q}$$

și

$$\tilde{D}\Phi(p) = \lim \frac{\iint_S \Phi(q) \cdot d\sigma_q}{\iiint_{T^+} dv_q}$$

cînd suprafața S se strînge în jurul punctului P (p), T^+ fiind domeniul interior lui S.

Menționăm că aceste definiții sînt conforme cu egalitatea (2.4).

10. Teorema 8. (Teorema Morera-Teodorescu). *Fie un cuaternion* $\Phi(q)$ *continuu în* V. *Dacă pentru orice suprafață Leapunov închisă* S, *interioară lui* V, *avem*

$$\iint_S d\sigma_q \cdot \Phi(q) = 0$$

cuaternionul $\Phi(q)$ *este olomorf în* V, *satisfăcînd ecuația*

$$D\Phi = 0.$$

Această teoremă este extensiunea la spațiu tridimensional a teoremei lui Morera și a fost dată pentru semivectori de prof. N. Teodorescu [2].

11. Teorema 9. (N. Teodorescu). *Dacă funcția cuaternionică* $\Phi(q)$ *este continuă pe* S, *atunci funcția*

$$\Psi(p) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{q-p} \cdot \frac{d\sigma_q}{|q-p|} \cdot \Phi(q) \tag{3.3}$$

este olomorfă în tot spațiul, cu excepția lui S.

Demonstrație. Cuaternionul $\Psi(\mathbf{p})$ posedă derivate de orice ordin în T^+. Pentru calculul lui $\mathbf{D}\Psi$ să considerăm

$$\mathbf{A} = \iiint_{\omega} \mathbf{D}\Psi(\mathbf{p})\, dv_p = \iint_{\Sigma} d\sigma_p . \Psi(\mathbf{p}),$$

unde ω este domeniul mărginit de sfera Σ cu centru în punctul $P(\mathbf{p})$, interioară sau exterioară lui S. Atunci

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} d\sigma_p \iint_{S} \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \cdot \frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|} \cdot \Phi(\mathbf{q}) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \left[\iint_{\Sigma} \frac{d\sigma_p}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|} \cdot \frac{1}{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \right] \cdot d\sigma_q \cdot \Phi(\mathbf{p}).$$

Punctul Q (q) fiind exterior lui Σ, în virtutea lui (2.12) integrala relativă Σ este nulă, deci $\mathbf{A} = 0$. Cum atît punctul P $(\mathbf{p})$ cît și sfera Σ sînt oarecare rezultă

$$\mathbf{D}\Psi = 0 \tag{3.4}$$

și deci (*3.3*) *este integrala generală a ecuației* (*3.4*).

§ 4. INTEGRALE DUBLE DE TIP CAUCHY

12. Rezultatele acestui paragraf cît și ale celui următor se datoresc, în cazul semivectorilor, lui A.V. Bițadze [7] — [9] și Huan-Le-Dî [13].

Fie, ca și pînă acum, S o suprafață Leapunov închisă dată și să notăm prin T^+ domeniul interior lui S iar prin T^- domeniul exterior lui S.

Definiția 4. *Funcția cuaternionică* $\mathbf{f}(q)$ *continuă pe* S, *verifică condiția Hölder, dacă există* $L > 0$ *și* $0 < \alpha \leqslant 1$ *astfel ca*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{q}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_2)| \leqslant L\, |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^{\alpha}$$

pentru orice Q_1 $(\mathbf{q}_1)$, Q_2 $(\mathbf{q}_2) \in S$.

În § 3 am văzut că integrala de tip Cauchy

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \cdot \frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}) \tag{4.1}$$

este un cuaternion olomorf în T^+ cît și în T^-.

Cînd $P(\mathbf{p}) \to P_0(\mathbf{p}_0) \in S$, această integrală își pierde sensul obișnuit. Se poate defini *valoarea principală* (în sens Cauchy), pentru integrala (4.1).

Într-adevăr, fie în jurul punctului P_0 $(\mathbf{p}_0) \in S$ o sferă Σ_ε de rază ε și S_ε partea suprafeței S exterioară sferei Σ_ε.

Atunci

$$\Phi(\mathbf{p}_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}_0} \cdot \frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}_0|} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad P_0(\mathbf{p}_0) \in S.$$

Notînd cu Σ_ε^- partea sferei Σ exterioară domeniului T^+, avem

$$\Phi(p_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{1}{q-p_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p_0|}\cdot(f(q)-f(p_0))+f(p_0)-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^-}\frac{1}{q-p_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p_0|}\cdot f(q_0)$$

Dacă f (q) este hölderiană, această limită există :

$$\Phi(p_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{q-p_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p_0|}\cdot f(q)=\frac{1}{2}f(p_0)+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{q-p_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p_0|}\cdot(f(q)-f(p_0)).$$

La fel ca în cazul plan se pot stabili formule pentru saltul pe frontieră al integralelor de tip Cauchy.

Expresia (4.1) se poate scrie

$$\Phi(p)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{q-p}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p|}\cdot(f(q)-f(p_0))+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{q-p}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p|}\cdot f(p_0)$$

de unde

$$\Phi(p)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{q-p}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p|}\cdot(f(q)-f(p_0))+f(p_0)\text{ pentru }P(p)\in T^+,$$

$$\Phi(p)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{q-p}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p|}\cdot(f(q)-f(p_0))\text{ pentru }P(p)\in T^-.$$

Atunci

$$\Phi^+(p_0)=\lim_{\substack{p\to p_0\\ p\in T^+}}\Phi(p)=\frac{1}{2}f(p_0)+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{q-p_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p_0|}\cdot f(q),\qquad(4.2)$$

$$\Phi^-(p_0)=\lim_{\substack{p\to p_0\\ p\in T^-}}\Phi(p)=-\frac{1}{2}f(p_0)+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{q-p_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p_0|}\cdot f(q).\qquad(4.3)$$

Din (4.2) şi (4.3) se deduc *formulele lui Plemelj-Sohoţki*

$$\Phi^+(p_0)-\Phi^-(p_0)=f(p_0),\qquad(4.4)$$

$$\Phi^+(p_0)+\Phi^-(p_0)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{q-p_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p_0|}\cdot f(q).\qquad(4.5)$$

Aceste formule ne permit să stabilim următoarele teoreme :

TEOREMA 10. (H u a n-L e-D î). *Pentru ca un cuaternion* $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ *îndeplinind condiția Hölder pe* S *să reprezinte valorile limită ale unui cuaternion olomorf în* T^+, *hölderian pe* S, *este necesar și suficient să fie îndeplinită condiția*

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\cdot\frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0 \text{ dacă } P(\mathbf{p})\in T^- \tag{4.6}$$

sau condiția

$$-\frac{1}{2}\mathbf{f}(\mathbf{p}_0)+\frac{1}{4\pi}\cdot\iint_S \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}_0|}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0 \text{ dacă } P(\mathbf{p}_0)\in S. \tag{4.7}$$

Condiția este necesară. Fie cuaternionul $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q})$ olomorf în T^+, îndeplinind pe S o condiție Hölder și luînd pe S valoarea $\mathbf{f}(\mathbf{q})$.
Atunci

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\cdot\frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{cases}\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}) & \text{dacă } P(\mathbf{p})\in T^+,\\ \mathbf{0} & \text{dacă } P(\mathbf{p})\in T^-,\end{cases}$$

de unde rezultă necesitatea condiției (4.6) iar prin trecere la limită, pentru $P(\mathbf{p})\to P_0(\mathbf{p}_0)$, unde $P_0(\mathbf{p}_0)$ este orice punct de pe S, obținem (4.7).

Condiția este suficientă. Din (4.6) sau (4.7) și (4.3) rezultă $\mathbf{\Phi}^-(\mathbf{p}_0)=0$ și în virtutea lui (4.4)

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}_0)=\mathbf{\Phi}^+(\mathbf{p}_0)-\mathbf{\Phi}^-(\mathbf{p}_0)=\mathbf{\Phi}^+(\mathbf{p}_0).$$

Analog se demonstrează

TEOREMA 11. *Pentru ca un cuaternion* $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ *definit și îndeplinind o condiție Hölder pe* S *să reprezinte valorile limită ale unui cuaternion olomorf în* T^-, *hölderian pe* S, *este necesar și suficient să fie îndeplinită condiția*

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\cdot\frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0 \text{ dacă } P(\mathbf{p})\in T^+$$

sau condiția

$$\frac{1}{2}\mathbf{f}(\mathbf{p}_0)+\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}_0|}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0 \text{ dacă } P_0(\mathbf{p}_0)\in S.$$

13. *Formula Poincaré-Bertrand* (de suprapunere a integralelor singulare). *Dacă cuaternionul* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q})$ *este definit și îndeplinește o condiție Hölder pe* S, *atunci*

$$\frac{1}{4\pi^2}\iint_S \frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}_0|}\cdot\iint_S \frac{1}{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}}\cdot\frac{d\sigma_{q_1}}{|\mathbf{q}_1-\mathbf{q}|}\cdot\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}_1)=\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}_0),\ P_0(\mathbf{p}_0)\in S. \tag{4.8}$$

Demonstrație. Fie

$$\Phi_1(p_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{q - p_0} \cdot \frac{d\sigma_q}{|q - p_0|} \cdot \Phi(q), \tag{4.9}$$

$$\Phi_2(p_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{q - p_0} \cdot \frac{d\sigma_q}{|q - p_0|} \cdot \Phi_1(q). \tag{4.10}$$

Se vede ușor că Φ_1 și Φ_2 sînt funcții hölderiene pe S.
Să considerăm integralele Cauchy

$$\begin{aligned} \Psi(p) &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{q - p} \cdot \frac{d\sigma_q}{|q - p|} \cdot \Phi(q), \\ \Psi_1(p) &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{q - p} \cdot \frac{d\sigma_q}{|q - p|} \cdot \Phi_1(q) \end{aligned} \tag{4.11}$$

În virtutea lui (4.2)

$$\Psi^+(p_0) = \frac{1}{2}\Phi(p_0) + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{q - p_0} \cdot \frac{d\sigma_q}{|q - p_0|} \cdot \Phi(q),$$

$$\Psi_1^+(p_0) = \frac{1}{2}\Phi_1(p) + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{q - p_0} \cdot \frac{d\sigma_q}{|q - p_0|} \cdot \Phi_1(q).$$

Conform relațiilor (4.9), (4.10) avem

$$\Phi_1(p_0) = \Psi^+(p_0) - \frac{1}{2}\Phi(p_0) \quad \text{și} \quad \Phi_2(p_0) = \Psi_1^+(p_0) - \frac{1}{2}\Phi_1(p_0). \tag{4.12}$$

Înlocuind pe $\Phi_1(q)$ în (4.11) obținem

$$\Psi_1(p) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{q - p} \cdot \frac{d\sigma_q}{|q - p|} \left[\Psi^+(q) - \frac{1}{2}\Phi(q)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{q - p} \cdot \frac{d\sigma_q}{|q - p|} \cdot \Psi^+_{(q)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{q - p} \cdot \frac{d\sigma_q}{|q - p|} \cdot \Phi(q) =$$

$$= \Psi(p) - \frac{1}{2}\Psi(p) = \frac{1}{2}\Psi(p)$$

și prin urmare

$$\Psi_1^+(p_0) = \frac{1}{2}\Psi^+(p_0).$$

Cu ajutorul relațiilor (4.12) obținem atunci

$$\Phi_2(p_0) = \frac{1}{2}\Psi^+(p_0) - \frac{1}{2}\left[\Psi^+(p_0) - \frac{1}{2}\Phi(p_0)\right] = \frac{1}{4}\Phi(p_0)$$

și din (4.10) rezultă (4.8).

§ 5. INVERSIUNEA UNOR ECUAȚII INTEGRALE SINGULARE

14. Să căutăm soluția următoarei ecuații integrale singulare :

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{1}{q-p_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p_0|}\cdot\Phi(q)=\Psi(p_0),\quad P_0(p_0)\in S, \tag{5.1}$$

unde S este suprafața Leapunov închisă, $\Psi(q)$ o funcție cuaternionică hölderiană pe S, iar cuaternionul necunoscut $\Phi(q)$ satisface de asemenea o condiție Hölder. Pe baza formulei de iterare a integralelor singulare (4.8), soluția ecuației (5.1) este

$$\Phi(p_0)=\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{1}{q-p_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p_0|}\cdot\Psi(q),\quad P_0(p_0)\in S. \tag{5.2}$$

Reciproc, soluția ecuației integrale singulare (5.2) are forma (5.1) și prin urmare *(5.1) și (5.2) reprezintă formule de inversiune.*

Această inversiune este folosită de A.V. Bițadze [6], [7] la rezolvarea unor probleme la limită pentru semispațiu. În [6], se obține de asemenea formula Poisson, care dă soluția problemei lui Dirichlet pe sferă, pentru ecuația lui Laplace. Acest procedeu a fost extins de M. Nedelcu [12] la rezolvarea problemei lui Lauricella pentru ecuația biarmonică, obținînd, în cazul sferei, un caz particular al rezultatelor lui M. Nicolescu [22]. Deși în anumite probleme la limită metoda de mai sus este aproape imediată, în cazul problemelor la limită pentru operatorii poliarmonici ea este mai greoaie decît metoda dezvoltărilor Almansi care-i mai generală.

15. În încheiere vom expune o metodă dată de A.V. Bițadze [8] pentru rezolvarea ecuației integrale singulare

$$a\cdot\Phi(p_0)+\frac{b}{2\pi}\cdot\iint_S \frac{1}{q-p_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p_0|}\cdot\Phi(q)=f(p_0),\quad P_0(p_0)\in S, \tag{5.3}$$

unde a și b sînt cuaternioni constanți cunoscuți, f un cuaternion hölderian dat de S, iar Φ cuaternionul căutat pe suprafața S, care verifică de asemenea o condiție Hölder.

Vom presupune numai $a \neq \pm b$.

Să definim cuaternionul olomorf pe porțiuni :

$$\Psi(p)=\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{q-p}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p|}\cdot\Phi(q).$$

Conform relațiilor (4.4) și (4.5) putem scrie

$$\Psi^+(p_0)-\Psi^-(p_0)=\Phi(p_0), \tag{5.4}$$

$$\Psi^+(p_0)+\Psi^-(p_0)=\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{1}{q-p_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p_0|}\cdot\Phi(q),$$

iar ecuația (5.3) devine

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\Psi^{+}(\mathbf{p}_0)=(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\Psi^{-}(\mathbf{p}_0)+\mathbf{f}(\mathbf{p}_0)$$

sau

$$\Psi^{+}(\mathbf{p}_0)=\mathbf{G}\cdot\Psi^{-}(\mathbf{p}_0)+\mathbf{g}(\mathbf{p}_0), \tag{5.5}$$

unde

$$\mathbf{G}=\frac{1}{\mathbf{a}+\mathbf{b}}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \text{ și } \mathbf{g}(\mathbf{p}_0)=\frac{1}{\mathbf{a}+\mathbf{b}}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{p}_0).$$

Această problemă este analogă problemei Hilbert din teoria funcțiilor olomorfe de o variabilă complexă [21].

Funcția cuaternionică

$$\Psi_0(p)=\begin{cases}\mathbf{G} \text{ pentru } P(\mathbf{p})\in T^{+}\\ 1 \quad ,, \quad P(\mathbf{p})\in T^{-}\end{cases}$$

este o soluție a problemei (5.5) omogene

$$\Psi^{+}(\mathbf{p}_0)=\mathbf{G}\cdot\Psi^{-}(\mathbf{p}_0)$$

și ecuația neomogenă (5.5) se poate scrie atunci sub forma

$$\frac{1}{\Psi_0^{+}(\mathbf{p}_0)}\cdot\Psi(\mathbf{p}_0)-\frac{1}{\Psi^{-}(\mathbf{p}_0)}\cdot\Psi^{-}(\mathbf{p}_0)=\frac{1}{\Psi_0^{+}(\mathbf{p})}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{p}_0).$$

Cuaternionul

$$\mathbf{F}(\mathbf{p})=\frac{1}{\Psi_0(\mathbf{p})}\cdot\Psi(\mathbf{p})$$

este olomorf pe porțiuni și

$$\mathbf{F}^{+}(\mathbf{p}_0)-\mathbf{F}^{-}(\mathbf{p}_0)=\frac{1}{\Psi_0^{+}(\mathbf{p}_0)}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)$$

Așadar

$$\mathbf{F}(\mathbf{p})=\frac{1}{4\pi}\iint_S\frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\cdot\frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\cdot\frac{1}{\Psi_0^{+}(\mathbf{q})}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{q})$$

și

$$\Psi(\mathbf{p})=\frac{\Psi_0(\mathbf{p})}{4\pi}\iint_S\frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}\cdot\frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|}\cdot\frac{1}{\Psi_0^{+}(\mathbf{q})}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{q})$$

ale cărui valori pe frontieră sînt

$$\Psi^{+}(\mathbf{p}_0)=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{-1},\mathbf{f}(\mathbf{p}_0)+\frac{1}{4\pi}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{-1}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})\iint_S\frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}_0}\cdot$$

$$\cdot\frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}_0|}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{-1}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{q}),$$

$$\Psi^{-}(\mathbf{p}_0)=-\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{-1}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{p}_0)+\frac{1}{4\pi}\iint_S\frac{1}{\mathbf{q}-\mathbf{p}_0}\cdot\frac{d\sigma_q}{|\mathbf{q}-\mathbf{p}_0|}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{-1}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{q}).$$

În virtutea lui (5.4), forma generală a soluției ecuației (5.3) este

$$\Phi(p_0) = \frac{1}{2}\left[(a+b)^{-1} + (a-b)^{-1}\right]\cdot f(p_0) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\left[(a+b)^{-1}\cdot(a-b)^{-1}\right]\iint_S \frac{1}{q-p}\cdot\frac{d\sigma_q}{|q-p|}\cdot(a-b)^{-1}\cdot f(q).$$

Pentru rezolvarea ecuației (5.3) cu ajutorul simbolismului matricial (în care **a** și **b** sînt matrici pătrate, constantele de ordinul patru) A. V. Bițadze impune următoarele condiții:

a) $\det(a+b) \neq 0$ și $\det(a-b) \neq 0$;

b) matricea $G = (a+b)^{-1}(a-b)$ are forma

$$G = \begin{Vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ -g_2 & g_1 & -g_4 & g_3 \\ -g_3 & g_4 & g_1 & -g_2 \\ -g_4 & -g_3 & g_2 & g_1 \end{Vmatrix}.$$

Înlocuirea acestor condiții prin singura condiție $a \neq \pm b$ arată încă o dată avantajul folosirii algoritmelor cuaternionilor.

Întrebuințarea cuaternionilor în locul semivectorilor și sistemului de matrici (M) este mai comodă, deoarece în toate relațiile de mai sus se folosește doar produsul cuaternionic.

Datorită structurii de corp a mulțimii cuaternionilor și relației de conjugare între cuaternioni, analogia cu corpul funcțiile olomorfe complexe este mai bine pusă în evidență.

ГОЛОМОРФНЫЕ КВАТЕРНИОНЫ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе автор излагает при помощи кватернионов обобщения на трехмерное пространство основных результатов из теории функций комплексного переменного.

Применение кватернионов вместо матричной символики, использованной Г. К. Мойсилом, Н. Теодореску, А. В. Бицадзе, Хуан Ле-Дэ и другими, более удобно, так как все соотношения выписываются только при помощи кватернионного произведения.

После изложения в введении истории вопроса, касающегося обобщений понятий ареолярной производной, в первом параграфе исследуются алгебраические и топологические свойства множества действительных кватернионов.

Во втором параграфе вводятся операторы (2.1), связанные соотношением (2.4). Голоморфные в V кватернионы, это регулярные решения уравнения (2.2). Формулы (2.9), (2.10) и (2.11) являются обоб-

щениями интегральных формул Помпейю и Коши. Дано новое доказательство теоремы Лиувилля для голоморфных кватернионов, обладающих только непрерывными частными производными.

В третьем параграфе обобщаются операторы $\mathbf{D}$ и $\widetilde{\mathbf{D}}$ в смысле Н. Теодореску [19].

В четвертом параграфе вводятся двойные интегралы типа Коши и устанавливаются формулы Племелж-Сохоцкого и Пуанкаре-Бертрана.

В последнем параграфе обращаются сингулярные интегральные уравнения (5.1) и (5.3), где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные кватернионы и $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$.

Благодаря тому, что множество кватернионов является телом и соотношением сопряженности между кватернионами, хорошо выявляется аналогия с полем комплексных голоморфных функций.

QUATERNIONS HOLOMORPHES

RÉSUMÉ

L'auteur présente, à l'aide des quaternions, l'extension à l'espace tridimensionnel de certains résultats fondamentaux de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

L'utilisation des quaternions à la place du symbolisme matriciel — utilisé par Gr. C. Moisil, N. Teodorescu, A. V. Bitzadze, Huan-Le-Dy et encore par d'autres auteurs — est plus commode, car toutes les relations ne s'écrivent qu'à l'aide du produit quaternionique.

Après une introduction historique des extensions de la notion de dérivée aréolaire, l'auteur étudie au premier paragraphe les propriétés algébriques et topologiques de l'ensemble des quaternions réels.

Au second paragraphe, il a introduit les opérateurs (2.1) rattachés par la relation (2.4). Les quaternions holomorphes en V sont des solutions régulières de l'équation (2.2). Les formules (2.9), (2.10) et (2.11) sont des extensions des formules intégrales de Pompeiu et de Cauchy. L'auteur donne une nouvelle démonstration du théorème de Liouville relatif aux quaternions holomorphes, n'ayant que des dérivées partielles continues.

Au paragraphe 3, il étend les opérateurs $\mathbf{D}$ et $\widetilde{\mathbf{D}}$, dans le sens de N. Teodorescu [19].

Au 4e paragraphe, il introduit des intégrales doubles du type Cauchy et il établit les formules de Plemelj-Sokhotski et de Poincaré-Bertrand.

Au dernier paragraphe, il inverse les équations intégrales singulières (5.1) et (5.3), où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des quaternions constants et $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$.

Par suite de la structure de corps de l'ensemble des quaternions et des relations de conjugaison entre quaternions, l'analogie avec le corps des fonctions holomorphes complexes est mieux mise en évidence.

BIBLIOGRAFIE

1. D. POMPEIU, *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe.* Rend. Circolo Mat., Palermo, **33**, *1*, 108—113 (1912); **35**, *1*, 277—281 (1913).
2. N. TEODORESCU, *La dérivée aréolaire et ses applications dans la Physique Mathématique* (Thèse). Gauthier-Villars, Paris, 1931.
3. И. Н. ВЕКУА, *Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек.* Мат. сб., **31**, *3*, 217—914 (1952).
4. GR. MOISIL, N. TEODORESCU, *Fonctions holomorphes dans l'espace.* Mathematica, Cluj, **5**, 142—159.
5. N. TEODORESCU, *Sur l'emploi de conditions globales dans quelques problèmes physiques.* Annali di Mathematica, **11**, 325—362 (1932).
6. А.В. БИЦАДЗЕ, *Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его применения.* Известия Акад. Наук СССР, серия матем., **17**, *6*, 525—538 (1953).
7. — *Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его применения.* ДАН СССР, **93**, *3*, 389—392 (1953).
8. — *Обращение одной системы сингулярных интегральных уравнений.* ДАН СССР, **93**, *4*, 595—597 (1953).
9. — *О двумерных интегралах типа Коши.* Сооб. Акад. Наук Груз. ССР, **16**, *3*, 177—184 (1955).
10. MARIANA NEDELCU, *La théorie des polynômes aréolaires dans l'espace à m dimensions. I. Le polynôme aréolaire d'ordre I.* Rev. de math. pures et appliquées, **IV**, *4* (1959).
11. — *The Theory of the Areolar Polynomials in the m-dimensional Space. II. The n-order Areolar Polynomial.* Revue de math. pures et appliquées, **V**, *1* (1960).
12. — *La théorie des polynômes aréolaires dans l'espace à m dimensions. Théorème de Morera et applications des polynômes aux équations à dérivées aréolaires et aux problèmes aux limites.* Bull. Math. de la Soc. de Sc. Math. de la R.P.R., **3** (**51**), 2 (1959).
13. ХУАН-ЛЕ-ДЭ, *Некоторые основные теоремы о голоморфном векторе.* Sci. Rec., **2**, *2*, 53—58 (1958).
14. М. С. ШНЕЕРСОН, *О некотором аналоге интеграла типа Коши.* Успехи мат. наук, **14**, *4*, 277—282 (1959).
15. D. PASCALI, S. GOGONEA, *Sur la monogénéité dans l'espace.* Atti dei Lincei **XXIX**, 5, 283—288 (1960).
16. GR. C. MOISIL, *Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la physique mathématique.* Bucarest, 1931.
17. — *Sur les quaternions monogènes.* Bull. Sci. Math., **55**, 168—174 (1931).
18. R. FUETER, *Die Funktionentheorie der Differential-Gleichungen* $\Delta u = 0$ *und* $\Delta\Delta u = 0$ *mit vier reellen variablen.* Comm. Math. Helvetici, **7**, 307—330 (1934).
19. GR. C. MOISIL, *Sisteme de ecuații cu derivate parțiale și numere ipercomplexe.* Analele Acad. R.P.R., seria A, **2** (1949).
20. W. SCHERER, *Quaternionen und Semivektoren.* Comm. Math. Helvetici, **7**, 141—149 (1934).
21. Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Сингулярные интегральные уравнения.* Гостехиздат, 1946.
22. M. NICOLESCU, *Le problème de Lauricella-Disquitiones.* Math. et Phys., **1**, *3—4*, 321—338 (1941).

ASUPRA UNOR ECUAȚII FUNCȚIONALE SINGULARE

DE

N. PRAPORGESCU

În cercetările noastre asupra probabilităților înlănțuite am întîlnit următoarele tipuri de ecuații care, poate, n-au fost semnalate.

§ 1

1. Primul tip este

$$\varphi(\sigma) - \lambda \int_{\Delta} N(\sigma, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(\sigma), \tag{1_1}$$

$$\varphi(\sigma) - \lambda \overline{\sum_{\Delta'}} N(\sigma, \tau)\, \varphi(\tau) = f(\sigma), \tag{1_2}$$

unde $\varphi(\sigma)$ și $f(\sigma)$ sînt funcții de punctul σ din dreptunghiul infinit cu vîrful în punctul (a, a') pentru Δ și în punctul $(a+1, a')$ pentru Δ', (a și $a' > 0$), laturile fiind paralele cu axele de coordonate, iar $N(\sigma, \tau)$ funcție și de variabila τ definită ca și σ. Toate aceste funcții sînt continue față de fiecare variabilă. Simbolurile $\overline{\int_{\Delta}}$ și $\overline{\sum_{\Delta'}}$ înseamnă :

$$\int_{\Delta} = \lim_{b' \to \infty} \frac{1}{b' - a'} \int_{a'}^{b'} \int_{a}^{\infty} \quad \text{și} \quad \overline{\sum_{\Delta'}} = \lim_{b' \to \infty} \frac{1}{b' - a'} \sum_{a'}^{b'} \sum_{a+1}^{\infty}, \qquad (b' > a'). \tag{1_3}$$

În (1_2) variabilele iau numai valori întregi.

Dacă integrala din (1_1) și seria din (1_2) au limite, pentru care este suficient ca funcția de sub integrală să fie mărginită pentru toate valorile lui σ și τ, și acestor ecuații li se poate aplica teoria ecuației Fred-

holm. De asemenea și ecuațiilor de speța întîi corespunzătoare, cum se arată mai jos. Ecuația

$$\overline{\sum_{\Delta'}} N(\sigma, \tau)\, h(\tau) = f(\sigma)$$

nu poate fi inversată pe cale algebrică.

§ 2.

2. Al doilea tip este

$$\varphi(\sigma, u) - \lambda \overline{\int_{\Delta}} N(\sigma, \tau)\, \varphi(\tau, u)\, \mathrm{d}\tau = f(\sigma, u), \quad (\sigma < \tau < u), \qquad (2_1)$$

$$\varphi(\sigma, u) - \lambda \overline{\sum_{\Delta'}} N(\sigma, \tau)\, \varphi(\tau, u) \quad = f(\sigma, u). \qquad (2_2)$$

funcțiile punctuale fiind definite ca la §1. Dacă considerăm pe u ca un parametru, aceste ecuații se reduc la (1_1) și (1_2).

Cînd $N(\sigma, \tau)$ are expresia

$$N(\sigma, \tau) = \sum_{1}^{\infty}{}_n\, a_n(\sigma)\, b_n(\tau), \qquad (3)$$

cum este în cazul lanțului constant de probabilități variabile în timp, funcțiile a_n sînt determinate de ecuațiile omogene (1_1) și (1_2). Soluția ecuației

$$\varphi(\sigma, u) - \lambda \overline{\int_{\Delta}} N(\sigma, \tau)\, \varphi(\tau, u)\, \mathrm{d}\tau = 0 \qquad (2_3)$$

este $\varphi(\sigma, u) = \sum_n a_n(\sigma)\, b_n(u)$. Funcțiile a_n și b_n trebuie să fie biortonormale și să asigure convergența uniformă a seriei (3) față de σ și τ, precum și alte condiții proprii probabilităților. Sîmburele este identic cu iteratul său și $\lambda = 1$ este zeroul de ordin infinit al determinantului caracteristic; toate urmele acestuia sînt infinite [1][1]).

3. Ecuațiile de speța întîi

$$\overline{\int_{\Delta}} N(\sigma, \tau)\, h(\tau, u)\, \mathrm{d}\tau = f(\sigma, u), \qquad (4_1)$$

$$\overline{\sum_{\Delta'}} N(\sigma, \tau)\, h(\tau, u) \quad = f(\sigma, u), \qquad (4_2)$$

conform teoriei clasice [2][2]), se pot inversa numai în anumite condiții de convergență. Astfel λ_i fiind valorile caracteristice ale lui $N(\sigma, \tau)$,

[1]) p. 602.
[2]) p. 478.

de pătrat integrabil, $\varphi_i(\sigma)$ și $\psi_i(\tau)$ o pereche de soluții fundamentale ale ecuațiilor

$$\varphi_i(\sigma) = \lambda_i^2 \overline{\int_\Delta} \overline{N}(\sigma, \tau)\, \varphi_i(\tau)\, d\tau$$
$$\psi_i(\sigma) = \lambda_i^2 \overline{\int_\Delta} \underline{N}(\sigma, \tau)\, \psi_i(\tau)\, d\tau \qquad (4_3)$$

deduse din

$$\varphi_i(\sigma) = \lambda_i \overline{\int_\Delta} N(\sigma, \tau)\, \psi_i(\tau)\, d\tau$$
$$\psi_i(\sigma) = \lambda_i \overline{\int_\Delta} N(\tau, \sigma)\, \varphi_i(\tau)\, d\tau \qquad (4_4)$$

și

$$\overline{N}(\sigma, \tau) = \overline{\int_\Delta} N(\sigma, t)\, N(\tau, t)\, dt$$
$$\underline{N}(\sigma, \tau) = \overline{\int_\Delta} N(t, \sigma)\, N(t, \tau)\, dt$$

condiția necesară și suficientă ca (4_1) să aibă o soluție de pătrat integrabilă este ca seria

$$\sum_1^\infty{}_i \left[\lambda_i \overline{\int_\Delta} f(\sigma, u)\, \varphi_i(\sigma)\, d\sigma \right]^2 \qquad (5_1)$$

să fie convergentă. Soluția are dezvoltarea

$$h(\tau, u) = \sum_1^\infty{}_n \lambda_n \psi_n(\tau) \overline{\int_\Delta} f(\sigma, u)\, \varphi_n(\sigma)\, d\sigma, \qquad (6_1)$$

dacă și această serie este uniform convergentă, cum de altfel se constată înlocuind pe (6_1) în (4_1) și se ține seamă de (4_4), de faptul că șirurile φ_n și ψ_n sînt fiecare ortonormale și de [1][1]) :

$$f(\sigma, u) = \overline{\int_\Delta} \sum_n \varphi_n(\sigma)\, \varphi_n(\tau) f(\tau, u)\, d\tau. \qquad (2_4)$$

Avem și

$$h(\tau, u) = \overline{\int_\Delta} \sum_n \psi_n(\sigma)\, \psi_n(\tau)\, h(\sigma, u)\, d\sigma, \qquad (2_5)$$

dacă în (6_1), funcția $f(\sigma, u)$ se înlocuiește prin (4_1) și se ține seamă de (4_4).

[1]) p. 471.

Funcțiile f și h au aceeași formă ca (2_3); seriile sînt uniform convergente.

Aceste funcții satisfac și relația

$$\overline{\int_\Delta} h(\tau, u)\, \psi_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \lambda_n \overline{\int_\Delta} f(\sigma, u)\, \varphi_n(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \tag{4_5}$$

dedusă din (4_1) sau (6_1) multiplicate respectiv cu $\varphi_n(\sigma)$ și $\psi_n(\tau)$ și integrate în raport cu σ și τ, ținînd seamă de (4_3) și (4_4).

Cînd $N(\sigma, \tau)$ este simetric și $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 1$, avem

$$\varphi_n(\sigma) = \psi_n(\sigma) \text{ și } N(\sigma, \tau) = \sum_n \varphi_n(\sigma)\, \varphi_n(\tau) = f(\sigma, \tau) = h(\sigma, \tau).$$

Funcția de inversiune asociată lui $N(\sigma, \tau)$ este, deci,

$$S(\tau, \sigma) = \sum_n \lambda_n \varphi_n(\tau)\, \psi_n(\sigma); \tag{6_2}$$

în baza relațiilor (4_4), (2_4) și (2_5) avem și

$$\begin{aligned} &\overline{\int_\Delta}\overline{\int_\Delta} S(\sigma, \tau)\, N(\sigma, \tau')\, h(\tau', u)\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau' = h(\tau, u), \\ &\overline{\int_\Delta}\overline{\int_\Delta} S(\sigma', \tau)\, N(\sigma, \tau)\, f(\sigma', u)\, \mathrm{d}\sigma'\, \mathrm{d}\tau = f(\sigma, u). \end{aligned} \tag{6_3}$$

Cînd $N(\sigma, \tau)$ are expresia (3), $S(\sigma, \tau)$ are aceleași valori caracteristice ca $N(\sigma, \tau)$.

Relația (6_1) se scrie

$$h(\tau, u) = \overline{\int_\Delta} S(\sigma, \tau) f(\sigma, u)\, \mathrm{d}\sigma \tag{6_4}$$

care, evident, se deduce din (4_1) multiplicată cu $S(\sigma, \tau)$ și integrată în raport cu σ, iar (4_1) se deduce din (6_4) multiplicată cu $N(\sigma, \tau)$ și integrată în raport cu τ. Aceste ecuații sînt reciproce, soluția uneia satisface și pe cealaltă, dacă este verificată și relația (4_5); unicele soluții care îndeplinesc aceste condiții sînt cele date de formulele (6_4) și (4_1), dacă $\overline{N}$ și $\underline{N}$ sînt închiși, adică șirurile φ_n și ψ_n sînt complete.

4. Funcția S de inversiune a ecuației

$$P^{l+l'}(s', s'', \tau) = \int_{a'}^{b'} P^{l}(s', v, \tau)\, P^{l'}(v, s'', \tau)\, \mathrm{d}v \tag{7_1}$$

a lanțului constant de probabilități (cazul omogen), menționată în lucrarea [3][1]) are deci expresia

$$S^{l}(v, s', \tau) = \sum_n \lambda_n^{l}\, {}_l\varphi_n(v, \tau)\, {}_l\psi_n(s', \tau), \qquad (\lambda = e^{-\mu(\tau)}) \tag{7_2}$$

[1]) p. 463 și 464.

dacă seria este uniform convergentă, asociata sa fiind $P^l(s', v, \tau)$. Relațiile (4_4), (4_3) și (4_5) devin

$$
\begin{aligned}
{}_l\varphi_n(s', \tau) &= \lambda_n^l \int_{a'}^{b'} P^l(s', t, \tau)\, {}_l\psi_n(t, \tau)\, dt \\
{}_l\psi_n(s', \tau) &= \lambda_n^l \int_{a'}^{b'} P^l(t, s', \tau)\, {}_l\varphi_n(t, \tau)\, dt \qquad (7_3) \\
\overline{P}^l(s', s'', \tau) &= \int_{a'}^{b'} P^l(s', t, \tau)\, P^l(s'', t, \tau)\, dt \\
\underline{P}^l(s', s'', \tau) &= \int_{a'}^{b'} P^l(t, s', \tau)\, P^l(t, s'', \tau)\, dt \\
{}_l\varphi_n(s', \tau) &= \lambda_n^{2l} \int_{a'}^{b'} \overline{P}^l(s', t)\, {}_l\varphi_n(t, \tau)\, dt \\
{}_l\psi_n(s', \tau) &= \lambda_n^{2l} \int_{a'}^{b'} \underline{P}^l(s', t, \tau)\, {}_l\psi_n(t, \tau)\, dt \qquad (7_4)
\end{aligned}
$$

$$
\int_{a'}^{b'} P^{l'}(v, s'', \tau)\, {}_l\psi_n(v, \tau)\, dv = \lambda_n^l \int_{a'}^{b'} P^{l+l'}(s', s'', \tau)\, {}_l\varphi_n(s', \tau)\, ds' \qquad (7_5)
$$

și condiția (5_1) se scrie

$$
\sum_i \left[\lambda_i^l \int_{a'}^{b'} P^{l+l'}(s', s'', \tau)\, {}_l\varphi_i(s', \tau)\, ds' \right]^2 . \qquad (5_2)
$$

Inversa lui (7_1) se scrie deci

$$
P^{l'}(s', s'', \tau) = \int_{a'}^{b'} S^l(v, s', \tau)\, P^{l+l'}(v, s'', \tau)\, dv. \qquad (7_6)
$$

Funcția S satisface relațiile

$$
\begin{aligned}
&\int_{a'}^{b'} \int_{a'}^{b'} S^l(v, s', \tau)\, P^l(v, u, \tau)\, P^{l''}(u, s'', \tau)\, du\, dv = P^{l'}(s', s'' \tau) \\
&\int_{a'}^{b'} \int_{a'}^{b'} S^l(u, v, \tau)\, P^l(s' v, \tau)\, P^{l+l'}(u, s'', \tau)\, du\, dv = P^{l+l'}(s', s'', \tau).
\end{aligned} \qquad (7_7)
$$

Soluția ecuației (7_1)

$$
P^{l'}(s', s'', \tau) = \sum_1^\infty{}_n \frac{\gamma_n'(s', \tau)\, \gamma_n(s'', \tau)}{\lambda_n^{l'}} \qquad (7_8)
$$

satisface și pe (7_6), γ' și γ fiind soluții ale ecuației

$$\gamma'(s', \tau) - \lambda \int_{a'}^{l'} P^1(s', u, \tau)\, \gamma'(u, \tau)\, du = 0$$

cu valori caracteristice simple, și asociata acesteia, seria trebuind să fie uniform convergentă și, reciproc, soluția lui (7_6) satisface și pe (7_1), dacă este verificată și (7_5). Singurele soluții care îndeplinesc aceste condiții sînt cele date de formula (7_8) și cea rezultată din aceasta înlocuind pe l' prin $l + l'$, dacă sîmburii $\overline{P}$ și $\underline{P}$ sînt închiși. Valorile caracteristice ale lui $S(v, s', \tau)$ sînt λ_n^{-l}.

Condițiile, ce trebuie să satisfacă funcția S, arătate în lucrarea [3][1]) corespunzătoare relațiilor (7_7), cum și indicațiile date în [3] pentru stabilirea expresiilor relațiilor (7_7) se aplică atunci cînd densitatea P^l are ordinul de mărime al lui $\frac{1}{\partial v}$, corespunzător cazului lanțului discontinuu.

Tot astfel se inversează și ecuația lanțului variabil (cazul omogen)

$$P^{l+l'}(s', s'') = \int_{a'}^{b'} P^l(s', v)\, P^{l,l'}(v, s'')\, dv \qquad (7_9)$$

obținîndu-se

$$P^l(s', s'') = \int_{a'}^{b'} P^{l+l'}(s', v)\, S^{l,l'}(s'', v)\, dv,$$

în care

$$S^{l,l'}(s'', v) = \sum_n \lambda_{n\,l,l'}^{l'} \varphi_n(s'')_{l,l'} \psi_n(v) \qquad (7_{10})$$

λ, φ și ψ fiind definiți prin relații similare cu (7_3) și (7_4), $P^l(s', t)$ înlocuindu-se prin $P^{l,l'}(s'', t)$ iar (5_2) prin

$$\sum_i \left[\lambda_i^{l'} \int_{a'}^{b'} P^{l+l'}(s', s'')\, \psi_n(s'')\, ds'' \right]^2. \qquad (5_3)$$

5. Cînd seriile (5_1) și (6_1) sînt divergente, (4_1) nu se poate inversa. Dacă punem însă

$$S_k(\sigma', \tau) = \sum_1^k{}_n \lambda_n \varphi_n(\sigma')\, \psi_n(\tau),$$

$$f_k(\sigma, u) = \overline{\int_\Delta} N(\sigma, \sigma')\, h_k(\sigma', u)\, d\sigma', \qquad (8)$$

$$h_k(\tau, u) = \overline{\int_\Delta} S_k(\sigma', \tau)\, f(\sigma', u)\, d\sigma',$$

[1]) p. 463 și 464.

conform teoriei clasice se poate lua k destul de mare, astfel încît

$$\overline{\int_{\Delta}} [f(\sigma, u) - f_k(\sigma, u)]^2 \, d\sigma < \varepsilon$$

care, în baza relațiilor (8), se mai scrie

$$\overline{\int_{\Delta}} d\sigma \left[\overline{\int_{\Delta}} N(\sigma, \tau) \, (h(\tau, u) - h_k(\tau, u)) \, d\tau \right]^2 < \varepsilon,$$

$$\overline{\int_{\Delta}} d\sigma \left\{ \overline{\int_{\Delta}} d\sigma' \overline{\int_{\Delta}} f(\sigma', u) \, N(\sigma, \tau) \, [S(\sigma', \tau) - S_k(\sigma', \tau)] \, d\tau \right\}^2 < \varepsilon,$$

ε fiind oricît de mic vrem. Funcțiile f_k, h_k, S_k converg, deci, în medie pătratică, dacă șirurile φ_i și ψ_i sînt complete.

Cînd seriile (5_2), (5_3), (7_6) și (7_{10}) sînt divergente, rezultate similare se găsesc și pentru probabilități.

6. Considerațiile și rezultatele de la punctul 5 sînt valabile și pentru (2_2) și (4_2).

7. Cînd $N(\sigma, \tau)$ are expresia (3), în condițiile de la punctul 2 valorile caracteristice sînt toate egale, așa că nici funcțiile φ_i nici funcțiile ψ_i nu pot fi ortogonale, ecuația (4_1) nu se poate inversa cu ajutorul metodei de mai sus. În acest caz din (4_1) se constată că $f(\sigma, u)$ trebuie neapărat să aibă forma $f(\sigma, u) = \sum a_m(\tau) \, \beta_m(u)$, în care

$$\beta_m(u) = \overline{\int_{\Delta}} h(\tau, u) \, b_m(\tau) \, d\tau.$$

Din aceeași ecuație multiplicată cu $b_m(\sigma)$ și integrată în raport cu σ, ținînd seamă că funcțiile a și b sînt biortonormale, deducem

$$\beta_m(u) = \overline{\int_{\Delta}} f(\sigma, u) \, b_m(\sigma) \, d\sigma.$$

Din ultimele două relații obținem

$$\overline{\int_{\Delta}} [h(\tau, u) - f(\tau, u)] \, b_m(\tau) \, d\tau = 0$$

care, atunci cînd șirul biortogonal $a_m(b)$, $b_m(\tau)$ nu este complet, este satisfăcută de $h(\tau, u) - f(\tau, u) = a(\tau) \, b(u)$, $a(\tau)$ trebuind să fie ortogonală cu fiecare $b_m(\tau)$ iar $b(u)$ arbitrară dar finită. Făcînd înlocuirea în (4_1) se constată că $f(\sigma, u)$ trebuie să verifice pe (2_3).

Obținem astfel

$$h(\tau, u) = \overline{\int_{\Delta}} S(\tau, \sigma) = f(\sigma, u) \, d\sigma + a(\tau) \, b(u),$$

în care $S(\tau, \sigma) = \sum a_m(\tau) \, b_m(\sigma)$ este funcția de inversiune.

§ 3.

8. Al treilea tip este

$$\varphi(\sigma, u) - \lambda \overline{\int_{\Delta}} \varphi(\sigma, \tau)\, N(\sigma, \tau, u)\, \mathrm{d}\tau = f(\sigma, u), \tag{9_1}$$

$$\varphi(\sigma, u) - \lambda \overline{\sum_{\Delta'}} \varphi(\sigma, z)\, N(\sigma, \tau, u) = f(\sigma, u). \tag{9_2}$$

Ecuații de forma (2_1) și (9_1), pentru variabile liniare și interval finit, au fost studiate de Romanovski [4]. Dacă se consideră însă σ ca un parametru, ecuațiile (9_1) și (9_2) se pot trata ca cele de tipul întîi, soluțiile și λ depind și de σ. Ecuațiile de speța a doua omogene și cele de speța întîi corespund unui lanț variabil de probabilități; ele sînt studiate în [3] și [5].

О НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

РЕЗЮМЕ

Автор обращает внимание на типы уравнений (1_1), (1_2) (2_1), (2_2), (9_1) и (9_2), где $\varphi(\sigma, \mu)$, $f(\sigma, \tau)$, $N(\sigma, \tau)$ являются непрерывными функциями точек σ, μ и τ в бесконечном прямоугольнике с вершиной в точке (a, a') для Δ и в $(a+1, a')$ для прямоугольника Δ' и со сторонами параллельными к координатным осям; символы $\overline{I}$ и $\overline{\sum}$ имеют значение (1_3). Указываются условия когда они обладают пределами, причем тогда к этим уравнениям применима теория уравнения Фредгольма. Аналогичное рассмотрение проводится также и для уравнений первого рода (4_1), (4_2). Если ряд (5_1) сходится, то решением (4_1) является (6_1), если этот ряд также сходится абсолютно и равномерно; функция обращения имеет выражение (6_2) и удовлетворяет соотношениям (6_3). Если (5_1) и (6_1) расходятся, то (4_1) и (4_2) необратимы, однако определяемые соотношениями (8) f_k, h_k и s_k сходятся в среднем, если ортогональные системы φ_i и ψ_i полны.

Аналогичные результаты получаются также и для обращения уравнений (2_3), (7_1) и (7_9) для вероятностных цепей, причем функция обращения имеет выражения (7_2) и $(7_{10})_n$.

SUR DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES SINGULIÈRES

RÉSUMÉ

L'auteur signale les types d'équations (1_1), (1_2), (2_1), (2_2), (9_1) et (9_2) pour lesquelles $\varphi(\sigma, u)$, $f(\sigma, u)$ et $N(\sigma, \tau)$ sont des fonctions continues des points σ, u et τ du rectangle infini ayant le sommet au point (a, a') pour Δ, et au point $(a + 1, a')$ pour le rectangle Δ', et les côtés parallèles aux axes des coordonnées ; les symboles $\bar{I}$ et $\overline{\sum}$ ont la signification (1_3). Il mentionne les conditions pour lesquelles ceux-ci ont des limites, car dans ce cas c'est la théorie de l'équation de Fredholm qui leur est applicable. Il fait également des mentions similaires pour les équations de la première espèce (4_1) et (4_2). Si la série (5_1) est convergente, la solution de (4_1) est (6_1). Mais si cette série est elle aussi absolument et uniformément convergente, la fonction d'inversion a l'expression (6_2) et satisfait aux relations (6_3). Lorsque (5_1) et (6_1) sont divergentes, (4_1) et (4_2) ne peuvent pas être inversées, mais f_k, h_k et S_k (définies par les relations (8)) convergent en une moyenne quadratique si les rangées orthogonales φ_i et ψ_i sont complètes.

On obtient encore des résultats similaires pour l'inversion des équations (2_3), (7_1) et (7_9) des probabilités liées, la fonction d'inversion ayant les expressions (7_2) et $(7_{10})_n$.

BIBLIOGRAFIE

1. N. PRAPORGESCU, *Asupra unei clase de ecuații integrale.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **VIII**, *3* (1956).
2. ED. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique.* Gauthier-Villars, Paris, vol. II, 1914.
3. N. PRAPORGESCU, *Asupra probabilităților înlănțuite.* Studii şi cercetări matematice, **IX**, *2* (1958).
4. I. V. ROMANOVSKI, *Sur une classe d'équations intégrales linéaires.* C. R. Paris, **192**, 552 (1931) şi Acta Mathematica, **59**, 99—208 (1932).
5. N. PRAPORGESCU, Rev. de math. pures et appliquées, **IV**, 3 (1959).

ASUPRA CORESPONDENȚELOR SPECIALE ÎNTRE SPAȚII PROIECTIVE [1]). I

DE

MARIUS I. STOKA

Fie două spații afine $A_3(x, y, z)$ și $E_3(u^1, u^2, u^3)$, între care este definită corespondența

$$u^i = u^i(x, y, z), \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Direcțiile caracteristice ale corespondenței (1) sînt soluțiile sistemului

$$\left.\begin{aligned} &-\Pi^1_{22}y'^3 - 2\Pi^1_{23}y'^2z' - \Pi^1_{33}y'z'^2 + (\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})y'^2 + \\ &+ 2(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})y'z' + \Pi^2_{33}z'^2 + (2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11})y' + 2\Pi^2_{13}z' + \Pi^2_{11} = 0, \\ &-\Pi^1_{22}y'^2z' - 2\Pi^1_{23}y'z'^2 - \Pi^1_{33}z'^3 + \Pi^3_{22}y'^2 + 2(\Pi^3_{32} - \Pi^1_{12})y'z' + \\ &+ (\Pi^3_{33} - 2\Pi^1_{13})z'^2 + 2\Pi^3_{12}y' + (2\Pi^3_{31} - \Pi^1_{11})z' + \Pi^3_{11} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

unde am notat $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $z' = \dfrac{dz}{dx}$ și

$$\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \delta^i_j\frac{\Gamma_k}{4} - \delta^i_k\frac{\Gamma_j}{4}, \qquad (\Gamma_k = \Gamma^i_{ik};\ i, j, k = 1, 2, 3).$$

Am numit [1][2]) *corespondență specială, corespondența dintre spațiile* A_3 *și* E_3 *dacă curbele* (2), *în variabilele* y' *și* z', *au curbe comune.*

Dacă curbele (2) *se descompun în curbele* C *și* C_1, *respectiv* C *și* C_2, *numim corespondență specială fără puncte de intersecție, corespondența dintre spațiile* A_3 *și* E_3 *pentru care curbele* C, C_1 *și* C_2, *luate cîte două, nu au puncte de intersecție; corespondență specială cu puncte comune ne-*

---

[1]) Principalele rezultate din această lucrare au fost comunicate la al II-lea Congres al matematicienilor maghiari din august 1960.

[2]) p. 220.

izolate, corespondența pentru care curbele C_1 și C_2 intersectează curba C, dar nu se intersectează în exteriorul ei și corespondență specială cu puncte comune izolate, corespondența pentru care curbele C_1 și C_2 se intersectează în exteriorul curbei C, ele putînd întîlni sau nu curba C.

În prima parte a acestei lucrări vom determina cazurile în care se realizează cele trei tipuri de corespondențe speciale definite mai sus.

În partea a doua determinăm conexiunile proiective constante ale spațiilor A_3 în cazul corespondenței speciale fără puncte de intersecție, transformările punctuale atașate acestor conexiuni și grupurile lor de mișcare.

În partea a treia facem același studiu pentru corespondențele speciale cu puncte comune neizolate, iar în partea a patra pentru corespondențele cu puncte comune izolate.

I

Un prim caz în care se realizează corespondența specială fără puncte de intersecție este acela în care curbele (2) sînt confundate. În lucrarea citată [1] [1]) am arătat că pentru aceasta trebuie ca

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=0,\\ &\frac{\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12}}{\Pi^3_{22}}=\frac{\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13}}{\Pi^3_{32}-\Pi^1_{12}}=\frac{\Pi^2_{33}}{\Pi^3_{33}-2\Pi^1_{13}}=\frac{2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11}}{2\Pi^3_{12}}=\\ &\qquad=\frac{2\Pi^2_{13}}{2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11}}=\frac{\Pi^2_{11}}{\Pi^3_{11}}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

cel puțin una din cantitățile $\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12}$, $\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13}$, Π^2_{33}, $2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11}$, Π^2_{13} fiind diferită de zero [2]), căci altfel corespondența ar fi fără caracteristice.

Dacă curbele (2) sînt cubice, corespondența este specială în următoarele două cazuri :

1°. Prima cubică degenerează în conica Γ și dreapta d_1, iar a doua cubică în aceeași conică Γ și dreapta d_2;

2°. Prima cubică degenerează în conica Γ_1 și dreapta d, iar a doua în conica Γ_2 și dreapta d.

În primul caz avem identitățile :

$$\left.\begin{aligned} &-\Pi^1_{22}y'^3-2\Pi^1_{23}y'^2z'-\Pi^1_{33}y'z'^2+(\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12})y'^2+2(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13})y'z'+\\ &\quad+\Pi^2_{33}z'^2+(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})y'+2\Pi^2_{13}z'+\Pi^2_{11}\equiv f(y',z')(\alpha_1y'+\beta_1z'+\gamma_1),\\ &-\Pi^1_{22}y'^2z'-2\Pi^1_{23}y'z'^2-\Pi^1_{33}z'^3+\Pi^3_{22}y'^2+2(\Pi^3_{32}-\Pi^1_{12})y'z'+\\ &\quad+(\Pi^3_{33}-2\Pi^1_{13})z'^2+2\Pi^3_{12}y'+(2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11})z'+\Pi^3_{11}\equiv\\ &\qquad\equiv f(y',z')(\alpha_2y'+\beta_2z'+\gamma_2), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1]) p. 220.

[2]) În lucrarea citată nu am dat această ultimă condiție.

unde am pus

$$f(y', z') = a_{11}y'^2 + 2a_{12}y'z' + a_{22}z'^2 + 2a_{13}y' + 2a_{23}z' + a_{33}.$$

Din (4) rezultă următoarele relații :

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 a_{11} = \beta_2 a_{11} + 2\alpha_2 a_{12} = -\Pi^1_{22},\\
&\beta_1 a_{11} + 2\alpha_1 a_{12} = \alpha_2 a_{22} + 2\beta_2 a_{12} = -2\Pi^1_{23},\\
&\alpha_1 a_{22} + 2\beta_1 a_{12} = \beta_2 a_{22} = -\Pi^1_{33},\\
&\beta_1 a_{22} = \alpha_2 a_{11} = 0,\\
&\gamma_1 a_{11} + 2\alpha_1 a_{13} = \Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12},\\
&\gamma_2 a_{11} + 2\alpha_2 a_{13} = \Pi^3_{22},\\
&\gamma_1 a_{12} + \beta_1 a_{13} + \alpha_1 a_{23} = \Pi^2_{23} - \Pi^1_{13},\\
&\gamma_2 a_{12} + \beta_2 a_{13} + \alpha_2 a_{23} = \Pi^3_{32} - \Pi^1_{12},\\
&\gamma_1 a_{22} + 2\beta_1 a_{23} = \Pi^2_{33},\\
&\gamma_2 a_{22} + 2\beta_2 a_{23} = \Pi^3_{33} - 2\Pi^1_{13},\\
&2\gamma_1 a_{13} + \alpha_1 a_{33} = 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11},\\
&2\gamma_2 a_{13} + \alpha_2 a_{33} = 2\Pi^3_{12},\\
&2\gamma_1 a_{23} + \beta_1 a_{33} = 2\Pi^2_{13},\\
&2\gamma_2 a_{23} + \beta_2 a_{33} = 2\Pi^3_{31} - \Pi^1_{11},\\
&\gamma_1 a_{33} = \Pi^2_{11},\ \gamma_2 a_{33} = \Pi^3_{11}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Avînd în vedere că cele două curbe (2) sînt cubice rezultă că cel puțin unul din numerele Π^1_{22}, Π^1_{23}, Π^1_{33} este nenul. Din primele patru egalități (5) rezultă că avem

$$\alpha_2 = \beta_1 = 0, \qquad \alpha_1 \neq 0,\ \beta_2 \neq 0.\ ^{1})$$

În baza acestor relații, sistemul (5) se scrie

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11} = -\Pi^1_{22},\ a_{12} = -\Pi^1_{23},\ a_{22} = -\Pi^1_{33},\\
&2a_{13} - \lambda\Pi^1_{22} = \Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12},\ \lambda\Pi^1_{33} = -\Pi^2_{33}\\
&a_{13} - \mu\Pi^1_{23} = \Pi^3_{32} - \Pi^1_{12},\ \mu\Pi^1_{22} = -\Pi^3_{22},\\
&2\lambda a_{13} + a_{33} = 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}\quad \mu a_{13} = \Pi^3_{12},\\
&2\mu a_{23} + a_{33} = 2\Pi^3_{31} - \Pi^1_{11},\ \lambda a_{23} = \Pi^2_{13},\\
&a_{23} - \lambda\Pi^1_{23} = \Pi^2_{23} - \Pi^1_{13},\ \lambda a_{33} = \Pi^2_{11},\\
&2a_{23} - \mu\Pi^1_{33} = \Pi^3_{33} - 2\Pi^1_{13},\ \mu a_{33} = \Pi^3_{11},
\end{aligned}\right\} \quad (5')$$

unde am pus $\lambda = \dfrac{\gamma_1}{\alpha_1}$, $\mu = \dfrac{\gamma_2}{\beta_2}$.

---

[1]) Aceste relații au fost date în [1] oprindu-se însă la atît, căci nu făceam clasificarea de la începutul acestei lucrări.

Vom presupune mai întîi că $\lambda = \mu = 0$. În acest caz din (5′) rezultă că

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = \Pi^3_{11} = \Pi^3_{12} = \Pi^3_{22} = 0,\ \Pi^2_{22} = 2\Pi^3_{32},\ = \Pi^1_{12} = 3\Pi^3_{32},\\ &\Pi^3_{33} = 2\Pi^2_{23},\ \Pi^1_{13} = -3\Pi^2_{23},\ \Pi^2_{21} = \Pi^3_{31},\ \Pi^1_{11} = -2\Pi^2_{21},\\ &a_{13} = 4\Pi^3_{32},\ a_{23} = 4\Pi^2_{23},\ a_{33} = 4\Pi^2_{21}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Deci, dacă conexiunea Π^i_{jk} este dată de (6) curbele (2) devin

$$y' f(y', z') = 0, \qquad z' f(y', z') = 0,$$

unde

$$f(y', z') = -\Pi^1_{22} y'^2 - 2\Pi^1_{23} y' z' - \Pi^1_{33} z'^2 + 8\Pi^3_{32} y' + 8\Pi^2_{23} z' + 4\Pi^2_{21}.$$

Dacă $\Pi^2_{21} = 0$, atunci $f(0, 0) = 0$ și deci corespondența este specială cu puncte comune neizolate.

Dacă $\Pi^2_{21} \neq 0$, atunci $f(0,0) \neq 0$ și deci corespondența este specială cu puncte comune izolate.

Rezultă că, *conexiunea* (6) *determină o corespondență specială cu puncte comune izolate dacă* $\Pi^2_{21} \neq 0$ *și cu puncte comune neizolate dacă* $\Pi^2_{21} = 0$.

Presupunînd acum că $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, [1]) din (5′) rezultă

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Pi^3_{11}}{2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}} = \frac{2\Pi^3_{12}}{\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}} = \frac{-\Pi^3_{22}}{\Pi^1_{22}} = \frac{2\Pi^2_{23} - \Pi^3_{33}}{\Pi^1_{33}} = \frac{\Pi^2_{22} - 2\Pi^3_{32}}{2\Pi^1_{23}} = \\ &= \frac{\Pi^3_{31} - \Pi^2_{21}}{\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}} = \mu \neq 0,\\ &\Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = 0,\\ &a_{13} = \frac{\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}}{2},\ a_{23} = \Pi^2_{23} - \Pi^1_{13},\ a_{33} = 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Deci, dacă conexiunea Π^i_{jk} este dată de (7), curbele (2) devin

$$y' f(y', z') = 0,\ (z' + \mu) f(y', z') = 0,$$

unde

$$f(y', z') = -\Pi^1_{22} y'^2 - 2\Pi^1_{23} y' z' - \Pi^1_{33} z'^2 + (\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}) y' + 2(\Pi^2_{33} - \Pi^1_{13}) z' + 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}.$$

Deci $f(0, -\mu) = 6\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11} - \Pi^1_{33}\mu^2$.

Dacă $\Pi^1_{33} = 0$, atunci $f(0, -\mu) = 6\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11}$, iar dacă $\Pi^1_{33} \neq 0$,

$$f(0, -\mu) = \frac{\Pi^1_{13}(6\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11}) - (2\Pi^2_{23} - \Pi^3_{33})^2}{\Pi^1_{33}}.$$

[1]) Dacă presupunem $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$ se obține același rezultat, schimbînd indicii 2 cu 3.

Rezultă că, *conexiunea* (7) *cu* $\Pi^1_{33} \neq 0$ *determină o corespondență specială care are puncte comune neizolate sau izolate, după cum expresia* $\Pi^1_{33}(6\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11}) - (2\Pi^2_{23} - \Pi^3_{33})^2$ *este nulă sau nenulă, iar conexiunea*

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = \Pi^1_{33} = 0,\ \Pi^3_{33} = 2\Pi^2_{23},\ \Pi^1_{13} = -3\Pi^2_{23},\\ &\frac{\Pi^3_{11}}{2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}} = \frac{2\Pi^3_{12}}{\Pi^2_{22} - \Pi^1_{12}} = \frac{-\Pi^3_{22}}{\Pi^1_{22}} = \frac{\Pi^2_{22} - 2\Pi^3_{32}}{2\Pi^1_{23}} = \frac{\Pi^3_{31} - \Pi^2_{21}}{4\Pi^2_{23}} = \lambda \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

determină o corespondență specială, care are puncte comune neizolate sau izolate, după cum expresia $6\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11}$ *este nulă sau nenulă.*

Vom considera acum cazul în care $\lambda, \mu \neq 0$. Dacă $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{33} = 0$, din sistemul (5′) rezultă

$$a_{13} = \frac{\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}}{2},\ a_{23} = \frac{\Pi^3_{33} - 2\Pi^1_{13}}{2},$$

$$a_{33} = \frac{2\Pi^1_{23}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) - (\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})(\Pi^3_{33} - 2\Pi^2_{23})}{2\Pi^1_{23}},$$

$$\left.\begin{aligned} &4(\Pi^1_{12}\Pi^1_{13} + \Pi^1_{12}\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}\Pi^2_{22}) = \Pi^1_{23}(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}),\\ &(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})(2\Pi^1_{12} + 3\Pi^2_{22}) = 4\Pi^1_{23}\Pi^3_{12},\\ &(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})(\Pi^1_{13} + 3\Pi^2_{23}) = 4\Pi^1_{23}\Pi^2_{13},\\ &(\Pi^1_{13} + 3\Pi^2_{23})[2\Pi^1_{23}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) + (\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})(\Pi^1_{13} + 3\Pi^2_{23})] +\\ &\qquad + 4\Pi^2_{11}(\Pi^1_{23})^2 = 0,\\ &(2\Pi^1_{12} + 3\Pi^2_{22})[2\Pi^1_{23}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) + (\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})(\Pi^1_{13} + 3\Pi^2_{23})] -\\ &\qquad - 4\Pi^3_{11}(\Pi^1_{23})^2 = 0,\\ &\Pi^1_{22} = \Pi^1_{33} = \Pi^2_{33} = \Pi^3_{22} = 0,\ \Pi^1_{23} \neq 0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Deci, dacă conexiunea Π^i_{jk} este dată de (9), curbele (2) devin

$$\left(y' - \frac{\Pi^1_{13} + 3\Pi^2_{23}}{2\Pi^1_{23}}\right) f(y', z') = 0,\ \left(z' + \frac{2\Pi^1_{12} + 3\Pi^2_{22}}{2\Pi^1_{23}}\right) f(y', z') = 0,$$

unde

$$f(y', z') = -2\Pi^1_{23}\, y'z' + (\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})y' - (3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})z' + 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11} + \frac{(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})(\Pi^1_{13} + 3\Pi^2_{23})}{2\Pi^1_{23}}.$$

Deci

$$f(-\lambda, -\mu) = \frac{2\Pi^1_{12}\Pi^1_{13} - 2\Pi^1_{12}\Pi^2_{23} + 7\Pi^2_{22}\Pi^1_{13} + 9\Pi^2_{22}\Pi^2_{23} + \Pi^1_{23}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11})}{\Pi^1_{23}}.$$

Rezultă că, *conexiunea* (9) *determină o corespondență specială are puncte comune neizolate sau izolate, după cum expresia* $2\Pi^1_{12}\Pi^1_{13} - 2\Pi^1_{12}\Pi^2_{23} + 7\Pi^2_{22}\Pi^1_{13} + 9\Pi^2_{22}\Pi^2_{23} + \Pi^1_{23}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11})$ *este nulă sau nenulă.*

Dacă $\lambda,\ \mu \neq 0$ și $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 0$ [1]), din sistemul (5′) rezultă

$$a_{13} = 2\Pi^2_{22},\ a_{23} = \Pi^2_{23} - \Pi^1_{13},\ a_{33} = \frac{2(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})}{\Pi^1_{33}} - 3\Pi^1_{11} - 2\Pi^2_{21},$$

$$\left.\begin{aligned}
&2\Pi^2_{22}\Pi^2_{33} + \Pi^1_{33}(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) - (\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}) = 0,\\
&2\Pi^2_{22}(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}) - \Pi^1_{33}\Pi^3_{12} = 0,\\
&\Pi^2_{33}(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}) + \Pi^1_{33}\Pi^2_{13} = 0,\\
&\Pi^2_{33}[\Pi^1_{33}(3\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) - 2(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})] - \Pi^2_{11}(\Pi^1_{13})^2 = 0,\\
&(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})[\Pi^1_{33}(3\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) - 2(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})] + \\
&\qquad + \Pi^3_{11}(\Pi^1_{33})^2 = 0,\\
&\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^3_{22} = 0,\ \Pi^1_{12} = -3\Pi^3_{32},\ \Pi^2_{22} = 2\Pi^3_{32},\ \Pi^1_{33} \neq 0.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Curbele (2) devin în acest caz

$$\left(y' - \frac{\Pi^2_{33}}{\Pi^1_{33}}\right) f(y',\ z') = 0,\ \left(z' + \frac{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}{\Pi^1_{13}}\right) f(y',\ z') = 0,$$

unde

$$f(y',\ z') = -\Pi^1_{33}z'^2 + 4\Pi^2_{22}y' + 2(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})z' - 3\Pi^1_{11} - 2\Pi^2_{21} + \frac{2(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})}{\Pi^1_{33}}.$$

Deci

$$f(-\lambda,\ -\mu) = \frac{(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})(5\Pi^1_{13} - 6\Pi^2_{23}) - \Pi^1_{33}(5\Pi^1_{11} + 6\Pi^2_{21})}{\Pi^1_{33}}.$$

Rezultă că, *conexiunea* Π^i_{jk} *care verifică relațiile* (10) *determină o corespondență specială cu puncte comune neizolate sau izolate după cum expresia* $(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})(5\Pi^1_{13} - 6\Pi^2_{23}) - \Pi^1_{33}(5\Pi^1_{11} + 6\Pi^2_{21})$ *este nulă sau nenulă.*

Vom considera acum cazul în care $\lambda,\ \mu \neq 0,\ \Pi^1_{22} = 0, \Pi^1_{23}, \Pi^1_{33} \neq 0$ [2]).

---

[1]) Cazul $\Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = 0$ se obține din aceasta prin schimbarea indicilor 2 cu 3.

[2]) Cazul $\Pi^1_{33} = 0, \Pi^1_{22}, \Pi^1_{23} \neq 0$ se obține din acesta prin schimbarea indicilor 2 cu 3.

Sistemul (5′) ne dă

$$a_{13}=\frac{\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12}}{2},\ a_{23}=\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13}-\frac{\Pi^1_{23}\,\Pi^2_{33}}{\Pi^1_{13}},\ a_{33}=2\,\Pi^2_{21}-$$

$$-\Pi^1_{11}+\frac{\Pi^2_{33}\,(\Pi^2_{22}-2\,\Pi^1_{12})}{\Pi^1_{33}},$$

$$\left.\begin{aligned}
&(\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12})\,(3\,\Pi^2_{22}+2\,\Pi^1_{12})-4\,\Pi^1_{23}\Pi^3_{12}=0,\\
&(3\,\Pi^2_{22}+2\,\Pi^1_{12})\,(\Pi^1_{33})^2-\Pi^1_{23}\,\Pi^1_{33}\,(3\Pi^2_{23}+\Pi^1_{13})+2\,\Pi^2_{33}\,(\Pi^1_{23})^2=0,\\
&\Pi^2_{13}\,(\Pi^1_{33})^2+(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13})\,\Pi^1_{33}\,\Pi^2_{33}-\Pi^1_{23}\,(\Pi^2_{33})^2=0,\\
&2\,(2\Pi^2_{21}+\Pi^1_{11})\,\Pi^1_{23}\,\Pi^1_{33}+(\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12})\,\Pi^1_{23}\,\Pi^2_{33}+(3\,\Pi^2_{22}+\\
&\qquad+2\,\Pi^1_{12})\,[\Pi^1_{33}\,(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13})-\Pi^1_{23}\,\Pi^2_{33}]=0,\\
&\Pi^2_{11}\,(\Pi^1_{33})^2+(2\,\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})\,\Pi^1_{33}\Pi^2_{33}+(\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12})\,(\Pi^2_{33})^2=0,\\
&(3\,\Pi^2_{22}+2\,\Pi^1_{12})[(\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12})\,\Pi^2_{33}+(2\,\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})\,\Pi^1_{33}]-\\
&\qquad-2\Pi^1_{23}\,\Pi^1_{33}\,\Pi^3_{11}=0,\\
&\Pi^1_{22}=\Pi^3_{22}=0,\ \Pi^1_{23},\ \Pi^1_{33}\neq 0.
\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Curbele (2) se scriu

$$\left(y'-\frac{\Pi^2_{33}}{\Pi^1_{33}}\right)f\,(y',z')=0,\ \left(z'+\frac{3\Pi^2_{22}+2\,\Pi^1_{12}}{2\Pi^1_{23}}\right)f\,(y',z')=0,$$

unde

$$f\,(y',z')=-2\Pi^1_{23}\,y'\,z'-\Pi^1_{33}\,z'^2+(\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12})\,y'+$$

$$+2\left(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13}-\frac{\Pi^1_{23}\,\Pi^2_{33}}{\Pi^1_{33}}\right)z'+2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11}+\frac{\Pi^2_{33}\,(\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12})}{\Pi^1_{33}}.$$

Deci

$$f(-\lambda,-\mu)=$$

$$=\frac{32\Pi^2_{22}\,\Pi^2_{33}\,(\Pi^1_{23})^2-(3\Pi^2_{22}+2\Pi^1_{12})^2\,(\Pi^1_{33})^2-4(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13})\,(3\,\Pi^2_{22}+\Pi^1_{12})\,\Pi^1_{23}\,\Pi^1_{33}}{4\Pi^1_{33}\,(\Pi^1_{23})^2}+$$

$$+2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11}.$$

Rezultă că, *conexiunea* (11) *determină o corespondență specială cu puncte comune, neizolate sau izolate după cum expresia*

$$32\Pi^2_{22}\,\Pi^2_{33}\,(\Pi^1_{23})^2-(3\Pi^2_{22}+2\Pi^1_{12})^2\,(\Pi^1_{33})^2-4(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13})\,(3\Pi^2_{22}+\Pi^1_{12})\,\Pi^1_{23}\,\Pi^1_{33}+$$

$$+4\Pi^1_{33}\,(\Pi^1_{23})^2\,(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})$$

este nulă sau nenulă.

Dacă $\lambda, \mu \neq 0$, $\Pi^1_{23} = 0$, Π^1_{22} , $\Pi^1_{33} \neq 0$, din sistemul (5′) rezultă

$$a_{13} = -2\Pi^1_{12} - \Pi^2_{22}, a_{23} = \Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}, a_{33} = 2\Pi^1_{21} - \Pi^1_{11} - \frac{2\Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})}{\Pi^1_{33}},$$

$$\left.\begin{aligned}
&(2\Pi^1_{12} + 3\Pi^2_{22})\Pi^1_{33} - \Pi^1_{22}\Pi^2_{33} = 0,\\
&\Pi^1_{22}\Pi^1_{33}(2\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11}) - \Pi^1_{33}\Pi^3_{22}(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}) - \Pi^1_{22}\Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) = 0,\\
&(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})\Pi^1_{22} + \Pi^1_{33}\Pi^2_{33} = 0,\\
&(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})\Pi^3_{22} - \Pi^1_{22}\Pi^3_{12} = 0,\\
&(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})\Pi^2_{33} + \Pi^1_{33}\Pi^2_{13} = 0,\\
&\Pi^2_{33}[\Pi^1_{33}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) - 2\Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})] + \Pi^2_{11}(\Pi^1_{33})^2 = 0,\\
&\Pi^3_{22}[\Pi^1_{33}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) - 2\Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})] + \Pi^3_{11}\Pi^1_{22}\Pi^1_{33} = 0,\\
&\Pi^1_{23} = 0, \Pi^1_{22}, \Pi^1_{33} \neq 0.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Cu aceste valori curbele (2) se scriu

$$\left(y' - \frac{\Pi^2_{33}}{\Pi^1_{33}}\right) f(y', z') = 0, \quad \left(z' - \frac{\Pi^3_{22}}{\Pi^1_{22}}\right) f(y', z') = 0,$$

unde

$$f(y', z') = -\Pi^1_{22}y'^2 - \Pi^1_{33}z'^2 - 2(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})y' + 2(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})z' + 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11} - \frac{2\Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})}{\Pi^1_{33}}.$$

Deci

$$f(-\lambda, -\mu) = -\frac{(\Pi^1_{22})^3(\Pi^2_{33})^2 + (\Pi^1_{33})^3(\Pi^3_{22})^2}{(\Pi^1_{22}\Pi^1_{33})^2} - \frac{4\Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})}{\Pi^1_{33}} + \frac{2\Pi^3_{22}(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})}{\Pi^1_{22}} + 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}.$$

Rezultă că, *conexiunea* Π^i_{jk} *care verifică relațiile* (12) *determină o corespondență specială cu puncte comune neizolate sau izolate după cum expresia*

$$(\Pi^1_{22})^3(\Pi^2_{33})^2 + (\Pi^1_{33})^3(\Pi^3_{22})^2 + 4\Pi^1_{33}\Pi^2_{33}(\Pi^1_{22})^2(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) - 2\Pi^3_{22}\Pi^1_{22}(\Pi^1_{33})^2(\Pi^2_{22} - \Pi^1_{13}) + (\Pi^1_{22}\Pi^1_{33})^2(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11})$$

este nulă sau nenulă.

Ultimul caz pe care-l avem de considerat este $\lambda,\ \mu \neq 0,\ \Pi^1_{22}, \Pi^1_{23}, \Pi^1_{33} \neq 0$. Sistemul (5′) ne dă

$$a_{13} = -2\Pi^1_{12} - \Pi^2_{22} - \frac{\Pi^1_{23}\Pi^3_{22}}{\Pi^1_{22}},\quad a_{23} = \Pi^2_{23} - \Pi^1_{13} - \frac{\Pi^1_{23}\Pi^2_{33}}{\Pi^1_{33}},$$

$$a_{33} = 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11} - \frac{2\Pi^2_{33}[\Pi^1_{22}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) + \Pi^1_{23}\Pi^3_{22}]}{\Pi^1_{22}\Pi^1_{33}},$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^1_{22}\Pi^1_{33}(2\Pi^1_{12} + 3\Pi^2_{22}) + 2\Pi^1_{23}\Pi^3_{22}\Pi^1_{33} - \Pi^2_{33}(\Pi^1_{22})^2 = 0,\\
&\Pi^1_{22}\Pi^1_{33}(2\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11}) - \Pi^1_{33}\Pi^3_{22}(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}) - \Pi^1_{22}\Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12} +\\
&\qquad + \Pi^2_{22}) = 0,\\
&\Pi^1_{22}\Pi^1_{33}(2\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}) - 2\Pi^1_{22}\Pi^1_{23}\Pi^2_{33} + (\Pi^1_{33})^2\Pi^3_{22} = 0,\\
&\Pi^3_{22}[\Pi^1_{22}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) + \Pi^1_{23}\Pi^3_{22}] - \Pi^3_{12}(\Pi^1_{22})^2 = 0,\\
&\Pi^2_{33}[\Pi^1_{33}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^1_{23}\Pi^2_{33}] - \Pi^2_{13}(\Pi^1_{33})^2 = 0,\\
&\Pi^1_{22}\Pi^1_{33}\Pi^2_{33}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) - 2(\Pi^2_{33})^2[\Pi^1_{22}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) +\\
&\qquad + \Pi^1_{23}\Pi^3_{22}] + \Pi^1_{22}\Pi^2_{11}(\Pi^1_{33})^2 = 0,\\
&\Pi^1_{22}\Pi^1_{33}\Pi^3_{22}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) - 2\Pi^2_{33}\Pi^3_{22}[\Pi^1_{22}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) +\\
&\qquad + \Pi^1_{23}\Pi^3_{22}] + \Pi^1_{33}\Pi^3_{11}(\Pi^1_{22})^2 = 0,\\
&\Pi^1_{22},\ \Pi^1_{23},\ \Pi^1_{33} \neq 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Curbele (2) se scriu în acest caz

$$\left(y' - \frac{\Pi^2_{33}}{\Pi^1_{33}}\right)f(y', z') = 0,\quad \left(z' - \frac{\Pi^3_{22}}{\Pi^1_{22}}\right)f(y', z') = 0,$$

unde

$$f(y', z') = -\Pi^1_{22}y'^2 - 2\Pi^1_{23}y'z' - \Pi^1_{33}z'^2 - 2\left(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22} + \frac{\Pi^1_{23}\Pi^3_{22}}{\Pi^1_{22}}\right)y' +$$

$$+ 2\left(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13} - \frac{\Pi^1_{23}\Pi^2_{33}}{\Pi^1_{33}}\right)z' + 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11} - \frac{2\Pi^2_{33}[\Pi^1_{22}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) + \Pi^1_{23}\Pi^3_{22}]}{\Pi^1_{22}\Pi^1_{33}}.$$

Deci

$$f(-\lambda, -\mu) = -\frac{(\Pi^1_{22})^3(\Pi^2_{33})^2 + 8\Pi^1_{22}\Pi^1_{23}\Pi^1_{33}\Pi^2_{33} + (\Pi^1_{33})^3(\Pi^3_{22})^2}{(\Pi^1_{22}\Pi^1_{33})^2} -$$

$$- \frac{4\Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})}{\Pi^1_{33}} + \frac{2\Pi^3_{22}(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})}{\Pi^1_{22}} + 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}.$$

Rezultă că, *conexiunea* (13) *determină o corespondență specială c puncte comune neizolate sau izolate după cum expresia* $(\Pi^1_{22})^3(\Pi^2_{33})^2 + 8\Pi^1_{22}\Pi^1_{23}\Pi^1_{33}\Pi^2_{33}\Pi^3_{22} + (\Pi^1_{33})^3(\Pi^3_{22})^2 + 2\Pi^1_{22}\Pi^1_{33}[2\Pi^1_{22}\Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) - -\Pi^1_{33}\Pi^3_{22}(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})] - (\Pi^1_{22}\Pi^1_{33})^2(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11})$ *este nulă sau nenulă.*

Ne vom ocupa acum de cazul în care prima cubică (2) degenerează în conica Γ_1 și o dreaptă d, iar a doua în conica Γ_2 și aceeași dreaptă d.

Avem deci identitățile

$$\left.\begin{aligned} &-\Pi^1_{22}y'^3 - 2\Pi^1_{23}y'^2z' - \Pi^1_{33}y'z'^2 + (\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})y'^2 + 2(\Pi^2_{23} - \\ &\quad - \Pi^1_{13})y'z' + \Pi^2_{33}z'^2 + (2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11})y' + 2\Pi^2_{13}z' + \Pi^2_{11} \equiv \\ &\quad \equiv (a_{11}y'^2 + 2a_{12}y'z' + a_{22}z'^2 + 2a_{13}y' + 2a_{23}z' + a_{33})\varphi(y', z'), \\ &-\Pi^1_{22}y'^2z' - 2\Pi^1_{23}y'z'^2 - \Pi^1_{33}z'^3 + \Pi^3_{22}y'^2 + 2(\Pi^3_{32} - \Pi^1_{12})y'z' + \\ &\quad + (\Pi^3_{33} - 2\Pi^1_{13})z'^2 + 2\Pi^3_{12}y' + (2\Pi^3_{31} - \Pi^1_{11})z' + \Pi^3_{11} \equiv (b_{11}y'^2 + \\ &\quad + 2b_{12}y'z' + b_{22}z'^2 + 2b_{13}y' + 2b_{23}z' + b_{33})\varphi(y', z'), \end{aligned}\right\}$$

unde

$$\varphi(y', z') = \alpha y' + \beta z' + \gamma.$$

De aici rezultă:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha a_{11} = \beta b_{11} + 2\alpha b_{12} = -\Pi^1_{22}, \\ &\beta a_{11} + 2\alpha a_{12} = 2\beta b_{12} + \alpha b_{22} = -2\Pi^1_{23}, \\ &2\beta a_{12} + \alpha a_{22} = \beta b_{22} = -\Pi^1_{33}, \\ &\beta a_{22} = \alpha b_{11} = 0, \\ &\gamma a_{11} + 2\alpha a_{13} = \Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}, \\ &\gamma a_{12} + \beta a_{13} + \alpha a_{23} = \Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}, \\ &\gamma a_{22} + 2\beta a_{23} = \Pi^2_{33}, \\ &2\gamma a_{13} + \alpha a_{33} = 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}, \\ &2\gamma a_{23} + \beta a_{33} = 2\Pi^2_{13}, \\ &\gamma a_{33} = \Pi^2_{11}, \\ &\gamma b_{11} + 2\alpha b_{13} = \Pi^3_{22}, \\ &\gamma b_{12} + \beta b_{13} + \alpha b_{23} = \Pi^3_{32} - \Pi^1_{12}, \\ &\gamma b_{22} + \beta b_{23} = \Pi^3_{33} - 2\Pi^1_{13}, \\ &2\gamma b_{13} + \alpha b_{33} = 2\Pi^3_{12}, \\ &2\gamma b_{23} + \beta b_{33} = 2\Pi^3_{31} - \Pi^1_{11}, \\ &\gamma b_{33} = \Pi^3_{11}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Avînd în vedere că cele două curbe (2) sînt cubice, rezultă că cel puțin unul din numerele $\Pi^1_{22}, \Pi^1_{23}, \Pi^1_{33}$ este nenul. Din primele patru ecuații (14) rezultă că avem

$$a_{22} = b_{11} = 0, \quad a_{11} = 2b_{12}, \quad b_{22} = 2a_{12}.$$

Avînd în vedere că nu putem avea în același timp $\alpha = 0$ și $\beta = 0$, vom presupune că $\alpha \neq 0$ și deci putem lua $\alpha = 1$.

Astfel sistemul (14) devine

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11} = -\Pi^1_{22},\ 2a_{12} = \beta\Pi^1_{22} - 2\Pi^1_{23},\\
&2a_{13} = \gamma\Pi^1_{22} + \Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12},\\
&2a_{23} = -2\beta\gamma\Pi^1_{22} - \beta(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}) + 2\gamma\Pi^1_{23} + 2(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}),\\
&a_{33} = -\gamma^2\Pi^1_{22} - \gamma(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}) + 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11},\\
&2b_{13} = \Pi^3_{22},\ 2b_{23} = \gamma\Pi^1_{22} - \beta\Pi^3_{22} - 2(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}),\\
&b_{33} = -\gamma\Pi^3_{22} + 2\Pi^3_{12}.
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^1_{22}\beta^2 - 2\Pi^1_{23}\beta + \Pi^1_{33} = 0,\\
&\Pi^3_{22}\gamma^2 - 2\Pi^3_{12}\gamma + \Pi^3_{11} = 0,\\
&(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})\beta^2 + 2\Pi^1_{23}\beta\gamma - 2(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})\beta - 2\Pi^1_{33}\gamma + \Pi^2_{33} = 0,\\
&3\Pi^1_{22}\beta\gamma^2 + 2(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})\beta\gamma - 2\Pi^1_{23}\gamma^2 - (2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11})\beta -\\
&\quad - 2(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})\gamma + 2\Pi^2_{13} = 0,\\
&\Pi^1_{22}\gamma^3 + (\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})\gamma^2 - (2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11})\gamma + \Pi^2_{11} = 0,\\
&\Pi^3_{22}\beta^2 - 2\Pi^1_{22}\beta\gamma + 2(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})\beta + 2\Pi^1_{23}\gamma -\\
&\quad - 3\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23} = 0,\\
&2\Pi^3_{22}\beta\gamma - \Pi^1_{22}\gamma^2 - 2\Pi^3_{12}\beta + 2(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})\gamma -\\
&\quad - 3\Pi^1_{11} - 2\Pi^2_{21} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (14')$$

Curbele (2) se scriu

$$\left.\begin{aligned}
&[-\Pi^1_{22}y'^2 + (\beta\Pi^1_{22} - 2\Pi^1_{23})y'z' + 2a_{13}\gamma' + 2a_{23}z' + a_{33}](y' + \beta z' + \gamma) = 0,\\
&[-\Pi^1_{22}y'z' + (\beta\Pi^1_{22} - 2\Pi^1_{23})z'^2 + 2b_{13}y' + 2b_{23}z' + b_{33}](y' + \beta z' + \gamma) = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Conicele din paranteze sînt sau amîndouă hiperbole, dacă $\Pi^1_{22} \neq 0$, $\beta\Pi^1_{22} - 2\Pi^1_{23} \neq 0$, sau una hiperbolă și una parabolă, dacă $\Pi^1_{22} = 0$ sau $\beta\Pi^1_{22} - 2\Pi^1_{23} = 0$.

Deci, *conexiunea* Π^i_{jk} *care satisface sistemul* (14′) *determină o corespondență specială cu puncte comune izolate sau neizolate sau fără puncte de intersecție.*

Ne vom ocupa acum de cazul în care curbele (2) sînt conice. Pentru aceasta trebuie ca

$$\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = 0. \qquad (15)$$

Dacă această condiție este satisfăcută, corespondența este specială în cazul cînd prima curbă (2) degenerează în dreptele d și d_1, iar a doua în dreptele d și d_2, dreptele d_1 și d_2 fiind diferite, căci altfel am regăsit cazul determinat de sistemul (3).

Avem de analizat următoarele patru cazuri :

1°. Dreptele d_1 și d_2 sînt paralele cu dreapta d, în care caz corespondența este specială fără puncte de intersecție ;

2°. Dreptele d_1 și d_2 sînt paralele dar intersectează dreapta d, în care caz corespondența este specială cu puncte neizolate comune ;

3°. Dreptele d_1, d_2 și d sînt concurente, corespondența fiind, în acest caz, specială cu puncte neizolate comune ;

4°. Dreptele d_1 și d_2 sînt concurente într-un punct exterior dreptei d, în care caz corespondența este specială cu puncte izolate comune.

În primul caz avem identitățile

$$\left.\begin{aligned}
&(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})\,y'^2 + 2(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})\,y'z' + \Pi^2_{33}z'^2 + (2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11})\,y' + \\
&\quad + 2\Pi^2_{13}z' + \Pi^2_{11} \equiv \lambda(ay' + bz' + c)(ay' + bz' + c_1), \\
&\Pi^3_{22}\,y'^2 + 2(\Pi^3_{32} - \Pi^1_{12})\,y'z' + (\Pi^3_{33} - 2\Pi^1_{13})z'^2 + 2\Pi^3_{12}y' + (2\Pi^3_{31} - \\
&\quad - \Pi^1_{11})\,z' + \Pi^3_{11} \equiv (ay' + bz' + c)(ay' + bz' + c_2), \\
&c_1 \neq c_2, \quad c_1 \neq c, \quad c_2 \neq c, \quad a^2 + b^2 \neq 0.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Din aceste identități obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda a^2 = \Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}, && a^2 = \Pi^3_{22}, \\
&\lambda ab = \Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}, && ab = \Pi^3_{32} - \Pi^1_{12}, \\
&\lambda b^2 = \Pi^2_{33}, && b^2 = \Pi^3_{33} - 2\Pi^1_{13}, \\
&\lambda a(c + c_1) = 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}, && a(c + c_2) = 2\Pi^3_{12}, \\
&\lambda b(c + c_1) = 2\Pi^2_{13}, && b(c + c_2) = 2\Pi^3_{31} - \Pi^1_{11}, \\
&\lambda cc_1 = \Pi^2_{11}, && cc_2 = \Pi^3_{11}, \\
&c_1 \neq c_2; \quad c \neq c_2, \quad c \neq c_1, \quad a^2 + b^2 \neq 0.
\end{aligned}\right\} \tag{16'}$$

Din primele șase ecuații ale acestui sistem rezultă

$$\frac{\Pi^2_{22} - \Pi^1_{12}}{\Pi^3_{22}} = \frac{\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}}{\Pi^3_{32} - \Pi^1_{12}} = \frac{\Pi^2_{33}}{\Pi^3_{33} - 2\Pi^1_{13}} = \lambda, \qquad (\lambda \neq 0). \tag{17}$$

De asemenea, trebuie ca cele două conice din membrii întîi ai ecuației (15) să fie degenerate și de gen parabolă, adică

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^3_{22}(\Pi^3_{33} - 2\Pi^1_{13}) - (\Pi^3_{32} - \Pi^1_{12})^2 = 0, \\
&4(\Pi^3_{12})^2(\Pi^3_{33} - 2\Pi^1_{13}) - 4\Pi^3_{12}(\Pi^3_{32} - \Pi^1_{12})(2\Pi^3_{31} - \Pi^1_{11}) + \\
&\quad + \Pi^3_{22}(2\Pi^3_{31} - \Pi^1_{11})^2 = 0, \\
&4\Pi^3_{22}(\Pi^2_{13})^2 - 4\Pi^2_{13}(\Pi^3_{32} - \Pi^1_{12})(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) + \\
&\quad + (\Pi^3_{33} - 2\Pi^1_{13})(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11})^2 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

De asemenea din (16′) rezultă

$$\left.\begin{aligned}
&(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11})(\Pi^3_{32} - \Pi^1_{12}) - 2\Pi^3_{22}\Pi^2_{13} = 0, \\
&(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11})(\Pi^3_{31} - \Pi^1_{11} - 4\Pi^2_{13}\Pi^3_{12} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{17'}$$

Dacă $a \neq 0$, din (16′) rezultă

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^3_{22}(\Pi^2_{11}-\lambda\Pi^3_{11})^2=(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11}-2\lambda\Pi^3_{21})\,[2\Pi^2_{11}\Pi^3_{12}-\Pi^3_{11}(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})],\\ &\Pi^3_{22}\neq 0,\ (\Pi^3_{12})^2-\Pi^3_{11}\Pi^3_{22}\neq 0,\ 2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11}-2\lambda\Pi^3_{12}\neq 0, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

iar dacă $b \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^2_{33}(\Pi^2_{11}-\lambda\Pi^3_{11})^2=[2\Pi^2_{13}-\lambda(2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11})]\,[\Pi^2_{11}(2\Pi^3_{31}-\\ &\qquad -\Pi^1_{11})-2\Pi^3_{11}\Pi^2_{13}],\\ &\Pi^2_{33}\neq 0,\ (2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11})^2-\Pi^3_{11}(\Pi^3_{33}-2\Pi^1_{13})\neq\\ &\qquad \neq 0,\ 2\Pi^2_{13}-\lambda(2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11})\neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Deci, *conexiunea* Π^i_{jk} *care verifică relațiile* (15), (17), (17′), (18), (19) sau (15), (17), (17′), (18), (20) *determină o corespondență specială fără puncte de intersecție.*

Ne vom ocupa acum de cazul doi, în care dreptele d_1 și d_2 sînt paralele dar intersectează dreapta d. În acest caz avem identitățile

$$\left.\begin{aligned} &(\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12})\,y'^2+2(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13})\,y'z'+\Pi^2_{33}\,z'^2+(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})\,y'+\\ &\qquad +2\Pi^2_{13}z'+\Pi^2_{11}\equiv\lambda(ay'+bz'+c)(a_1y'+b_1z'+c_1),\\ &\Pi^3_{22}\,y'^2+2(\Pi^3_{32}-\Pi^1_{12})\,y'z'+(\Pi^3_{33}-2\Pi^1_{13})\,z'^2+2\Pi^3_{12}\,y'+\\ &\qquad +(2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11})\,z'+\Pi^3_{11}\equiv(ay'+bz'+c)(a_1y'+b_1z'+c_2), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$ab_1-a_1b\neq 0,\ c_1\neq c_2.$

O primă condiție care rezultă din (21) este relația (17).

De asemenea, avînd în vedere că cele două conice din membrii întîi ai identităților (21) sînt degenerate, rezultă că trebuie să avem relațiile

$$\left.\begin{aligned} &4\Pi^3_{11}[\Pi^3_{22}(\Pi^3_{33}-2\Pi^1_{13})-(\Pi^3_{32}-\Pi^1_{12})^2]+4\Pi^3_{12}(\Pi^3_{32}-\Pi^1_{12})(2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11})-\\ &\qquad -4(\Pi^3_{12})^2(\Pi^3_{33}-2\Pi^1_{13})-\Pi^3_{22}(2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11})^2=0,\\ &4\lambda\Pi^2_{11}[\Pi^3_{22}(\Pi^3_{33}-2\Pi^1_{13})-(\Pi^3_{32}-\Pi^1_{12})^2]+4\Pi^2_{13}(\Pi^3_{32}-\Pi^1_{12})(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})-\\ &\qquad -(\Pi^3_{33}-2\Pi^1_{13})(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})^2-4(\Pi^2_{13})^2\Pi^3_{22}=0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Neegalitățile din (21) sînt echivalente cu

$$\Pi^3_{22}(\Pi^3_{33}-2\Pi^1_{13})-(\Pi^3_{32}-\Pi^1_{12})^2\neq 0,\ 2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11}-2\lambda\Pi^3_{12}\neq 0 \tag{23}$$

sau

$$\Pi^3_{22}(\Pi^3_{33}-2\Pi^1_{13})-(\Pi^3_{32}-\Pi^1_{12})^2\neq 0,\ 2\Pi^2_{13}-\lambda(2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11})\neq 0. \tag{24}$$

Deci, *conexiunea* Π^i_{jk} *care verifică relațiile* (15), (17), (22), (23) *sau* (15), (17), (22), (24), *determină o corespondență specială cu puncte comune neizolate.*

Considerînd acum cazul în care dreptele d_1, d_2, și d sînt concurente, avem identitățile

$$\left.\begin{aligned}(\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12})y'^2+2(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13})y'z'+\Pi^2_{33}z'^2+(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})y'+2\Pi^2_{13}z'+\Pi^2_{11}\equiv\\ \equiv(ay'+bz'+c)(a_1y'+b_1z'+c_1),\\ \Pi^3_{22}y'^2+2(\Pi^3_{32}-\Pi^1_{12})y'z'+(\Pi^3_{33}-2\Pi^1_{13})z'^2+2\Pi^3_{12}y'+(2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11})z'+\Pi^3_{11}\equiv\\ \equiv(ay'+bz'+c)(a_2y'+b_2z'+c_2),\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

și condiția

$$\left.\begin{aligned}ab_1-a_1b\neq 0,\ ab_2-a_2b\neq 0,\ a_1b_2-a_2b_1\neq 0,\\ ab_1c_2+a_1b_2c+a_2bc_1-a_2b_1c-ab_2c_1-a_1bc_2=0.\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

Din (25) rezultă sistemul

$$\left.\begin{aligned}aa_1=\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12},\ aa_2=\Pi^3_{22},\\ bb_1=\Pi^2_{33},\ bb_2=\Pi^3_{33}-2\Pi^1_{13},\\ ab_1+a_1b=2(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13}),\\ ab_2+a_2b=2(\Pi^3_{32}-\Pi^1_{12}),\\ ac_1+a_1c=2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11},\\ ac_2+a_2c=2\Pi^3_{12},\\ bc_1+b_1c=2\Pi^2_{13},\\ bc_2+b_2c=2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11},\\ cc_1=\Pi^2_{11},\ cc_2=\Pi^3_{11}.\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

Deci, *conexiunea* Π^i_{jk} *care verifică sistemul* (15), (26) și (27), *determină o corespondență specială cu puncte comune neizolate.*

În același mod, dacă dreptele d_1 și d_2 sînt concurente într-un punct exterior dreptei d, avem sistemul (27) cu condiția

$$\left.\begin{aligned}ab_1-a_1b\neq 0,\ ab_2-a_2b\neq 0,\ a_1b_2-a_2b_1\neq 0,\\ ab_1c_2+a_1b_2c+a_2bc_1-a_2b_1c-ab_2c_1-a_1bc_2\neq 0.\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

Deci, *conexiunea* Π^i_{jk} *care verifică sistemul* (15), (27), (28) *determină o corespondență specială cu puncte comune izolate.*

Ne vom ocupa acum de cazul în care prima curbă (2) este o conică, iar a doua curbă (2) este o dreaptă [1]). În acest caz pentru ca corespondența să fie specială trebuie ca prima curbă (2) să degenereze în dreptele d și d_1, iar a doua în dreapta d.

---

[1]) Cazul în care prima curbă (2) este o dreaptă iar a doua o conică, se deduce din acesta prin schimbarea indicilor 2 cu 3.

Avem deci:

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = \Pi^3_{22} = 0, \\ &\Pi^3_{32} = \Pi^1_{12},\ \Pi^2_{22} = -2\Pi^1_{12},\ \Pi^3_{33} = 2\Pi^1_{13},\ \Pi^2_{23} = -3\Pi^1_{13} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

și

$$(\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12})y'^2+2(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13})y'z'+\Pi^2_{33}z'^2+(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})y'+2\Pi^2_{13}z'+\Pi^2_{11}\equiv$$
$$\equiv [2\Pi^3_{12}y'+(2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11})z'+\Pi^3_{11}]\ (ay'+bz'+c). \tag{30}$$

Avînd în vedere (29), din (30) rezultă

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^3_{12}a = -2\Pi^1_{12},\ (2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11})b = \Pi^2_{33}, \\ &2\Pi^3_{12}b-(3\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})a = -8\Pi^1_{13}, \\ &2\Pi^3_{12}c+\Pi^3_{11}a = 2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11}, \\ &\Pi^3_{11}b-(3\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})c = 2\Pi^2_{13}, \\ &c\Pi^3_{11} = \Pi^2_{11}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Dacă

$$\frac{2\Pi^3_{12}}{a} = \frac{2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11}}{b} \neq \frac{\Pi^3_{11}}{c}, \tag{32}$$

atunci dreptele d și d_1 sînt paralele și corespondența este specială fără puncte de intersecție.

Deci, *conexiunea* Π^i_{jk} *care satisface relațiile* (29), (31), (32) *determină o corespondență specială fără puncte de intersecție.*

Dacă

$$2\Pi^3_{12}b-(2\Pi^3_{31}-\Pi^1_{11})a \neq 0, \tag{33}$$

atunci dreptele d și d_1 sînt concurente și corespondența este specială cu puncte neizolate.

Rezultă că, *conexiunea* Π^i_{jk} *care satisface relațiile* (29), (31) *și* (33) *determină o corespondență specială cu puncte comune neizolate.*

Dacă ambele curbe (2) se reduc la cîte o dreaptă, pentru ca să avem o corespondență specială trebuie ca aceste drepte să fie confundate, deci regăsim cazul determinat de sistemul (3).

Avem deci:

Pentru ca între spațiile A_3 *și* E_3 *să avem o corespondență specială fără puncte de intersecție, trebuie ca conexiunea* Π^i_{jk} *să verifice: relația* (3); (15), (17), (17'), (18), (19); *relațiile* (15), (17), (17'), (18), (20); *relațiile* (29), (31), (32) *sau* (14'),

Corespondența dintre spațiile A_3 *și* E_3 *este specială cu puncte comune neizolate în cazurile în care conexiunea* Π^i_{jk} *verifică una din relațiile:*

1°. (6) cu $\Pi^2_{21} = 0$;

2°. (7) cu $\Pi^1_{33} \neq 0$ cu $\Delta_1 = \Pi^1_{33}(6\Pi^2_{21}+\Pi^1_{11})-(2\Pi^2_{23}-\Pi^3_{33})^2 = 0$;

3°. (8) cu $\Delta_2 = 6\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11} = 0$;
4°. (9) cu $\Delta_3 = 2\Pi^1_{12}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^2_{22}(7\Pi^1_{13} + 9\Pi^2_{23}) + \Pi^1_{23}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) = 0$;
5°. (10) cu $\Delta_4 = (3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})(5\Pi^1_{13} - 6\Pi^2_{23}) - \Pi^1_{33}(5\Pi^1_{11} + 6\Pi^2_{21}) = 0$;
6°. (11) cu $\Delta_5 = 32\,\Pi^2_{22}\,\Pi^2_{33}\,(\Pi^1_{23})^2 - 4\,(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})\,(3\Pi^2_{22} + \Pi^1_{12})\,\Pi^1_{23}\,\Pi^1_{33} - (3\Pi^2_{22} + 2\Pi^1_{12})^2\,(\Pi^1_{33})^2 + 4\Pi^1_{33}\,(\Pi^1_{23})^2\,(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) = 0$;
7°. (12) cu $\Delta_6 = (\Pi^1_{22})^3(\Pi^2_{33})^2 + (\Pi^1_{33})^3(\Pi^3_{22})^2 + 4\Pi^1_{33}\Pi^2_{33}(\Pi^1_{22})^2\,(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) - 2\Pi^3_{22}\Pi^1_{22}(\Pi^1_{33})^2(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}) + (\Pi^1_{22}\Pi^1_{33})^2(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) = 0$;
8°. (13) cu $\Delta_7 = (\Pi^1_{22})^3\,(\Pi^2_{33})^2 + (\Pi^1_{33})^3\,(\Pi^3_{22})^2 + 8\Pi^1_{22}\,\Pi^1_{23}\,\Pi^1_{33}\,\Pi^2_{33}\,\Pi^3_{22} - (\Pi^1_{22}\,\Pi^1_{33})^2\,(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) + 2\Pi^1_{22}\,\Pi^1_{33}\,[2\Pi^1_{22}\,\Pi^2_{33}\,(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) - \Pi^1_{33}\,\Pi^3_{22}\,(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})] = 0$;
9°. (15), (17), (22), (23);
10°. (15), (17), (22), (24);
11°. (15), (26), (27);
12°. (29), (31), (33);
13°. (14′).

Corespondența dintre spațiile A_3 și E_3 este specială cu puncte comune izolate în cazurile în care conexiunea Π^i_{jk} verifică una din relațiile:

1°. (6) cu $\Pi^2_{21} \neq 0$;
2°. (7) cu $\Pi^1_{33} \neq 0$ și $\Delta_1 \neq 0$;
3°. (8) cu $\Delta_2 \neq 0$;
4°. (9) cu $\Delta_3 \neq 0$;
5°. (10) cu $\Delta_4 \neq 0$;
6°. (11) cu $\Delta_5 \neq 0$;
7°. (12) cu $\Delta_6 \neq 0$;
8°. (13) cu $\Delta_7 \neq 0$;
9°. (14′);
10°. (15), (27), (28).

II

Ne vom ocupa acum de conexiunile proiective constante care determină corespondențe speciale fără puncte de intersecție între spațiile A_3 și E_3.

Prof. G. Vrănceanu a demonstrat [2] [1]) că pentru ca Π^i_{jk} să fie tensorul asociat unei corespondențe între două spații proiective, trebuie ca

$$\Pi^i_{jkl} + \frac{\delta^i_k}{n-1} M_{jl} - \frac{\delta^i_l}{n-1} M_{jk} = 0\,, \qquad (34)$$

$$(i, j, k, l, s = 1, \ldots, n)$$

$$\frac{\partial M_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial M_{jl}}{\partial x^k} + M_{sk}\,\Pi^s_{jl} - M_{sl}\,\Pi^s_{jk} = 0, \qquad (34')$$

[1]) p. 492.

unde

$$\left.\begin{aligned} \Pi^i_{jkl} &= \frac{\partial \Pi^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Pi^i_{jl}}{\partial x^k} + \Pi^i_{sk}\Pi^s_{jl} - \Pi^i_{sl}\Pi^s_{jk}, \\ M_{jk} &= \Pi^i_{sj}\Pi^s_{ik} + \frac{\partial \Pi^i_{jk}}{\partial x^i}. \end{aligned}\right\}$$

Notînd cu $\lambda \neq 0$ valoarea comună a rapoartelor din al doilea șir de egalități (3) și avînd în vedere că $\Pi_l - \Pi^i_{il} = 0$, obținem

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^1_{11} = -\frac{\lambda^2\Pi^3_{12}+\Pi^2_{13}}{2\lambda},\ \Pi^2_{21} = \frac{3\lambda^2\Pi^3_{12}-\Pi^2_{13}}{4\lambda},\ \Pi^3_{31} = \frac{3\Pi^2_{13}-\lambda^2\Pi^3_{12}}{4\lambda}, \\ &\Pi^1_{12} = \frac{-\lambda^2\Pi^3_{22}+\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}}{4\lambda},\ \Pi^2_{22} = \frac{\lambda^2\Pi^3_{22}+\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}}{2\lambda},\ \Pi^3_{32} = \\ &\qquad\qquad - \frac{\lambda^2\Pi^3_{22} + 3(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})}{4\lambda}, \\ &\Pi^2_{11} = \lambda\Pi^3_{11},\ \Pi^2_{33} = -\lambda(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23}),\ \Pi^3_{33} = -(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23}),\ (\lambda \neq 0). \end{aligned}\right\} \quad (3')$$

Avînd în vedere aceste relații și faptul că Π^i_{jk} sînt constante, ecuațiile (34) se scriu :

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^3_{12}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^2_{13}\Pi^3_{22} = 0, \\ &\Pi^3_{12}(\lambda^2\Pi^3_{12} + \Pi^2_{23}) + \Pi^3_{11}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23} - \lambda^2\Pi^3_{22}) = 0, \\ &\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) - \lambda^2\Pi^3_{12}(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0, \\ &\Pi^2_{13}(\lambda^2\Pi^3_{12} + \Pi^2_{13}) + 4\lambda^2\Pi^3_{11}\Pi^1_{13} = 0, \\ &(\lambda^2\Pi^3_{12}+\Pi^2_{13})(11\lambda^2\Pi^3_{12}-9\Pi^2_{13})-8\lambda^2\Pi^3_{11}(\lambda^2\Pi^3_{22}+3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23}) = 0, \\ &32\lambda^2\Pi^3_{12}\Pi^1_{13} + 7\lambda^2\Pi^2_{13}\Pi^3_{22} - 8\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) = 0, \\ &9\lambda^2\Pi^2_{13}\Pi^3_{22} - 2\lambda^2\Pi^3_{12}(8\Pi^1_{13} - 5\Pi^2_{23}) + 8\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) = 0, \\ &(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})^2 + \lambda^2\Pi^3_{22}(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0, \\ &(\Pi^1_{13})^2 + 7\Pi^1_{13}\Pi^2_{23} + 4(\Pi^2_{23})^2 + \lambda^2\Pi^3_{22}(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0, \\ &8\lambda^2\Pi^1_{13}\Pi^3_{12} + \Pi^2_{13}(2\lambda^2\Pi^3_{22} - 3\Pi^1_{13} + 2\Pi^2_{23}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Din ecuațiile a opta și a noua din acest sistem rezultă :

$$\Pi^2_{23}(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0. \quad (36)$$

Vom presupune mai întîi că $\Pi^2_{23} \neq 0$. În acest caz din (36) rezultă

$$\Pi^2_{23} = -3\Pi^1_{13} \neq 0,$$

care, înlocuită în a opta ecuație (35), ne dă $\Pi^1_{13} = 0$.

Rezultă că $\Pi^2_{23} = 0$. Înlocuind această valoare în a treia ecuație din (35), obținem

$$\Pi^1_{13}(\Pi^2_{13} - 2\lambda^2\Pi^3_{12}) = 0 . \tag{37}$$

Vom presupune mai întîi că $\Pi^1_{13} = 0$.
Cu aceasta sistemul (35) se scrie :

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^2_{13}\Pi^3_{22} = 0 , \\ &\Pi^2_{13}(\Pi^2_{13} + \lambda^2\Pi^3_{12}) = 0 , \\ &\Pi^3_{12}(\Pi^2_{13} + \lambda^2\Pi^3_{12}) - \lambda^2\Pi^3_{11}\Pi^3_{22} = 0 , \\ &11\Pi^3_{12}(\Pi^2_{13} - \lambda^2\Pi^3_{12}) - 8\lambda^2\Pi^3_{11}\Pi^3_{22} = 0 . \end{aligned}\right\}$$

sau

$$\Pi^2_{13}\Pi^3_{22} = 0,\ \Pi^3_{11}\Pi^3_{22} = 0,\ \Pi^2_{13}(\Pi^2_{13} + \lambda^2\Pi^3_{12}) = 0,\ \Pi^3_{12}(\Pi^2_{13} + \lambda^2\Pi^3_{12}) = 0, \tag{38}$$

iar condiția ca cel puțin unul din numerele $\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}$, $\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}$, Π^2_{33}, $2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}$, Π^2_{13} să fie nenul devine condiția ca cel puțin unul din numerele Π^2_{13}, Π^3_{12}, Π^3_{22} să fie nenul. Avînd în vedere această condiție, sistemul (38) are soluțiile

$$\Pi^2_{13} = \Pi^3_{12} = \Pi^3_{11} = 0 ;$$

$$\Pi^3_{22} = 0 , \ \Pi^2_{13} = -\lambda^2\Pi^3_{12} \neq 0 .$$

Presupunînd acum că $\Pi^1_{13} \neq 0$, din (37) rezultă

$$\Pi^2_{13} = 3\lambda^2\Pi^3_{12} . \tag{37'}$$

Înlocuind această valoare în ecuația a șasea și a șaptea din sistemul (35), obținem

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^3_{12}(8\Pi^1_{13} + 21\lambda^2\Pi^3_{22}) = 0 , \\ &\Pi^3_{12}(8\Pi^1_{13} + 27\lambda^2\Pi^3_{22}) = 0 . \end{aligned}\right\}$$

de unde, avînd în vedere că $\Pi^1_{13} \neq 0$, rezultă $\Pi^3_{12} = 0$. Avînd în vedere această valoare și relația (37'), sistemul (35) ne dă

$$\Pi^3_{11} = 0 , \ \Pi^1_{13} = -3\lambda^2\Pi^3_{22} \neq 0 .$$

Rezultă că, dacă conexiunea proiectivă este constantă, sistemul (3) are următoarele soluții :

$$\Pi^1_{12} = \Pi^3_{32} = -\frac{a_1 a_2}{4} , \ \Pi^2_{22} = \frac{a_1 a_2}{2} , \ \Pi^3_{22} = a_2 , \quad (a_1 , \ a_2 \neq 0) , \tag{39}$$

$$\Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = a_1 a_2 , \ \Pi^2_{11} = a_1 a_3 , \ \Pi^3_{11} = a_3 , \ \Pi^3_{12} = a_4 , \ \Pi^2_{13} = -a_1^2 a_4$$
$$(a_1 , \ a_2 , \ a_4) \neq 0 , \tag{40}$$

$$\Pi^1_{12}=\Pi^2_{22}=a_1a_2,\ \Pi^3_{32}=2a_1a_2,\ \Pi^1_{13}=-3a_1^2a_2,\ \Pi^2_{33}=9a_1^3a_2,\ \Pi^3_{22}=a_2,$$
$$(a_1,\ a_2\neq 0), \qquad (41)$$

componentele nescrise fiind nule.

În toate aceste cazuri, sistemul (34′) este identic satisfăcut.

În cazul conexiunii (39), făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x}=x,\ \bar{y}=-\frac{a_1a_2}{4},\ \bar{z}=\frac{a_1^2a_2}{16}z,$$

obținem

$$\bar{\Pi}^1_{12}=\bar{\Pi}^3_{32}=\bar{\Pi}^3_{22}=1,\ \bar{\Pi}^2_{22}=-2,$$

componentele nescrise fiind nule.

Analog, prin schimbări de variabile, conexiunile (40), (41) devin

$$\Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=\Pi^3_{12}=-\Pi^2_{13}=1,\ \Pi^2_{11}=\Pi^3_{11}=\varepsilon, \qquad (\varepsilon=0,1)$$
$$\Pi^1_{12}=\Pi^2_{22}=\Pi^1_{13}=-\Pi^3_{33}=-\Pi^2_{33}=1,\ \Pi^3_{32}=-2,\ \Pi^3_{22}=-3.$$

Avem deci:

Tensorul proiectiv constant Π^i_{jk}, *care verifică sistemul* (3), *poate fi adus prin schimbări de variabile, la una din următoarele forme*:

$$\text{I}\quad \Pi^1_{12}=\Pi^3_{32}=\Pi^3_{22}=1,\ \Pi^2_{22}=-2,$$
$$\text{II}\quad \Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=\Pi^3_{12}=-\Pi^2_{13}=1,\ \Pi^2_{11}=\Pi^3_{11}=\varepsilon, \qquad (\varepsilon=0,1),$$
$$\text{III}\quad \Pi^1_{12}=\Pi^2_{22}=\Pi^1_{13}=-\Pi^3_{33}=-\Pi^2_{33}=1,\ \Pi^3_{32}=-2,\ \Pi^3_{22}=-3,$$

componentele nescrise fiind nule.

Ne vom ocupa acum de conexiunea care verifică sistemul (15), (17), (17′), (18), (19).

Din (17) rezultă

$$\Pi^1_{12}=\frac{-\lambda^2\Pi^3_{22}+\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}}{4\lambda},\ \Pi^2_{22}=\frac{\lambda^2\Pi^3_{22}+\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}}{2\lambda},\ \Pi^2_{33}=-$$
$$-\lambda(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23}). \qquad (17'')$$

Înlocuind expresiile (15) și (17″) în (18) obținem

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^2\Pi^3_{22}(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})+(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})^2=0,\\
&\lambda[\Pi^3_{22}(3\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})^2-(\Pi^3_{12})^2(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})]-\\
&\qquad -4\Pi^3_{12}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(3\Pi^1_{11}-2\Pi^2_{21})=0,\\
&\lambda[\Pi^3_{22}(\Pi^2_{13})^2-(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})^2]+\\
&\qquad +4\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (18')$$

iar sistemul (34) se scrie

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^3_{12}(\lambda^2\Pi^3_{22}+\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})-\lambda\Pi^3_{22}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})=0,\\
&2\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})+\lambda(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})=0,\\
&\Pi^3_{11}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})-\lambda(2\Pi^1_{11}\Pi^3_{12}+\Pi^2_{11}\Pi^3_{22})=0,\\
&\lambda^2\Pi^3_{12}(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})-\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0,\\
&\lambda[\Pi^2_{13}\Pi^3_{22}+\Pi^3_{12}(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})]+(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})=0,\\
&\Pi^2_{11}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})-2\Pi^1_{11}\Pi^2_{13}+\lambda\Pi^3_{11}(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})=0,\\
&\lambda[\Pi^3_{12}(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})-\Pi^2_{13}\Pi^3_{22}]+(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(\Pi^1_{11}+\Pi^2_{21})=0,\\
&2\lambda[\Pi^1_{11}(\Pi^1_{11}+\Pi^2_{23})+\Pi^3_{11}(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})]+\Pi^2_{11}(\lambda^2\Pi^3_{22}+\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0.
\end{aligned}\right\}\quad(42)$$

Din ecuațiile a cincea și a șaptea ale sistemului (42) rezultă

$$\Pi^2_{13}\Pi^3_{22}=0 \qquad (43)$$

și avînd în vedere prima neegalitate (19), rezultă

$$\Pi^2_{13}=0.$$

Înlocuind această valoare în ultima relație (18′) și a doua relație (42) obținem

$$(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})=0,\quad(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})(2\Pi^2_{21}+\Pi^1_{11})=0,$$

sau

$$\Pi^1_{11}(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})=0,\quad \Pi^2_{21}(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})=0. \qquad (44)$$

Vom presupune mai întîi că $3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23}=0$. Din prima ecuație (18′) rezultă în acest caz $\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}$ și deci

$$\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=\Pi^3_{33}=0.$$

Din celelalte două ecuații (18′) obținem

$$\Pi^2_{13}=0 \text{ și } 3\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21}=0,$$

iar din prima ecuație (42)

$$\lambda\Pi^3_{12}+2\Pi^1_{11}=0,$$

care contrazice ultima neegalitate (19).

Deci

$$3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23}\neq 0.$$

Din (44) rezultă

$$\Pi^1_{11}=\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=0,$$

care înlocuite în a doua ecuație (18′) ne dă $\Pi^3_{12}=0$, ceea ce este imposibil în baza ultimei neegalități (19).

Deci, *dacă conexiunea* Π^i_{jk} *este constantă, sistemul* (15), (17), (17'), (18), (19) *nu are soluții.*

Vom considera acum sistemul (15), (17), (17'), (18), (20). Din (43) rezultă deci $\Pi^3_{22} = 0$.

Înlocuind această valoare în sistemul (18'), rezultă

$$\Pi^1_{13} = \Pi^2_{23}, \quad \Pi^1_{13}\Pi^3_{12} = 0, \quad \Pi^1_{13}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) = 0. \tag{18''}$$

Din (17'') rezultă $\Pi^2_{33} = -4\lambda\Pi^1_{13}$ și, având în vedere prima neegalitate (20), $\Pi^1_{13} \neq 0$.

Relațiile (18'') ne dau deci

$$\Pi^3_{12} = 0, \quad \Pi^1_{11} = 2\Pi^2_{21},$$

iar neegalitățile (20) se scriu

$$\Pi^1_{13} \neq 0, \quad \Pi^1_{11} \neq 0, \quad \Pi^2_{13} + 4\lambda\Pi^2_{21} \neq 0.$$

Înlocuind aceste valori în a doua ecuație (42) obținem

$$\Pi^1_{13}(\Pi^2_{13} + 4\lambda\Pi^2_{21}) = 0,$$

care este imposibilă în baza neegalităților precedente.

Deci, *dacă conexiunea* Π^i_{jk} *este constantă, sistemul* (15), (17), (17'), (18), (20) *nu are soluții.*

Ne vom ocupa acum de ultimul caz în care se realizează corespondența specială fără puncte de intersecție, adică de sistemul (29), (31), (32).

Notînd valoarea comună a rapoartelor egale din (32) cu λ, rezultă

$$\Pi^3_{12} = \frac{a\lambda}{2}, \quad 3\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21} = b\lambda, \quad \Pi^3_{11} \neq c\lambda \tag{32'}$$

și, avînd în vedere că avem o corespondență cu caracteristice, rezultă că

$$\lambda \neq 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0. \tag{45}$$

Înlocuind aceste valori în (31) obținem

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^1_{12} = -\frac{a^2\lambda}{4}, \quad \Pi^2_{33} = b^2\lambda, \quad \Pi^1_{13} = \frac{ab\lambda}{4}, \\ &a(\Pi^3_{11} + c\lambda) = 2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}, \quad b(\Pi^3_{11} + c\lambda) = 2\Pi^2_{13}, \quad c\Pi^3_{11} = \Pi^2_{11}. \end{aligned}\right\} \tag{31'}$$

Scriind acum ecuația (34) pentru $i = 3$, $j = l = 2$, $k = 1$, obținem

$$a\lambda = 0,$$

deci avînd în vedere neegalitățile (45) rezultă

$$a = 0, \quad b \neq 0.$$

Relațiile (24), (31′) și (32′) devin

$$\left.\begin{aligned}&\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=\Pi^1_{12}=\Pi^2_{22}=\Pi^3_{32}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=\Pi^3_{33}=\\&\qquad=\Pi^3_{12}=\Pi^3_{22}=0,\\&\Pi^1_{11}=2\Pi^2_{21}=-\frac{b\lambda}{4},\ \Pi^3_{31}=\frac{3b\lambda}{8},\ \Pi^2_{33}=b^2\lambda,\ b(\Pi^3_{11}+c\lambda)=\\&\qquad=c\Pi^2_{13},\ c\Pi^3_{11}=\Pi^2_{11}.\end{aligned}\right\}$$

Cu aceste valori, ecuația (34), pentru $i=2,\ j=1=3,\ k=1$, devine

$$b\,\lambda=0,$$

egalitatea fiind imposibilă în baza neegalităților $b\neq 0,\ \lambda\neq 0$.

Deci sistemul (29), (31), (32) nu are soluții, dacă conexiunea Π^i_{jk} este constantă.

Ne vom ocupa acum de sistemul (14′).

Avînd în vedere că nu toate numerele Π^1_{22}, Π^1_{23}, Π^1_{33} pot fi nule, din prima ecuație (14′) rezultă că dacă $\Pi^1_{22}=0$ atunci $\Pi^1_{23}\neq 0$.

Vom considera deci cazurile

1°. $\Pi^1_{22}=0,\ \Pi^1_{23}\neq 0$.

2°. $\Pi^1_{22}\neq 0$.

În cazul 1°, dacă $\Pi^1_{33}=0$, din prima ecuație (14′) rezultă $\beta=0$.

Cu aceste valori, ecuația (34) pentru $i=j=1,\ k=2,\ l=3$; $i=1,\ j=k=2,\ l=3$ și $i=1,\ j=l=3,\ k=2$ ne dă

$$\Pi^2_{22}=0,\ \Pi^1_{11}=-2\Pi^2_{21},\ \Pi^1_{13}=-\Pi^2_{23}.$$

Înlocuind aceste valori în (14′) rezultă

$$\Pi^2_{13}=-\frac{(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{23}},\ \Pi^2_{21}=-\frac{\Pi^1_{12}\,\Pi^1_{13}}{\Pi^1_{23}},\ \Pi^2_{32}=0,$$

$$\Pi^3_{11}=\frac{\Pi^1_{13}(2\Pi^1_{23}\Pi^3_{12}-\Pi^1_{13}\Pi^3_{22})}{(\Pi^1_{23})^2},\ \Pi^2_{11}=\frac{-2\Pi^1_{12}(\Pi^1_{13})^2}{(\Pi^1_{23})^2}.$$

Celelalte ecuații (34) ne dau în acest caz

$$\Pi^1_{13}\Pi^1_{12}=0,\quad \Pi^1_{13}(\Pi^1_{13}\Pi^3_{22}-\Pi^1_{23}\Pi^3_{12})=0. \tag{46}$$

Dacă $\Pi^1_{13}=0$, conexiunea este

$$\Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32},\ \Pi^1_{11}=\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=\Pi^2_{21}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=\Pi^3_{33}=\Pi^1_{22}=$$
$$=\Pi^1_{33}=\Pi^2_{11}=\Pi^2_{13}=\Pi^2_{33}=\Pi^3_{11}=0,\ \Pi^1_{23}\neq 0.$$

Printr-o schimbare de variabile această conexiune devine

$$\overline{\Pi}^1_{23}=1,\ \overline{\Pi}^1_{12}=-\overline{\Pi}^3_{23}=\varepsilon_1,\ \overline{\Pi}^3_{22}=\varepsilon_2,\ \overline{\Pi}^3_{12}=\alpha,\quad (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2=0,1),$$

componentele nescrise fiind nule.

Sistemul (2) devine în acest caz

$$\left.\begin{aligned} &y'^2(z' + \varepsilon_1) = 0, \\ &y'(2z'^2 - \varepsilon_2 y' + 2\varepsilon_1 z' - 2\alpha) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

Dacă $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \alpha = 0$, sistemul (2') se scrie

$$y'^2 z' = 0, \quad y' z'^2 = 0$$

și deci corespondența este cu puncte comune neizolate.

Dacă $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\alpha \neq 0$, sistemul (2') se scrie

$$y'^2 z' = 0, \quad y'(z'^2 - \alpha) = 0$$

și corespondența este cu puncte comune neizolate.

Dacă $\varepsilon_1 = \alpha = 0$, $\varepsilon_2 = 1$, sistemul (2') este :

$$y'^2 z' = 0, \quad y'(2z'^2 - y') = 0$$

și corespondența este cu puncte comune neizolate.

Dacă $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$, $\alpha \neq 0$, sistemul (2') este :

$$y'^2 z' = 0, \quad y'(2z'^2 - y' - 2\alpha) = 0$$

și corespondența este cu puncte comune izolate.

Dacă $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, sistemul (2') devine

$$y'^2(z' + 1) = 0, \quad y'(z'^2 + z' - \alpha) = 0$$

și corespondența este cu puncte comune neizolate.

Dacă $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\alpha = 0$, sistemul (2') se scrie

$$y'^2(z' + 1) = 0, \quad y'(2z'^2 - y' + 2z') = 0$$

și corespondența este cu puncte comune neizolate.

Dacă $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\alpha \neq 0$, sistemul (2') este :

$$y'^2(z' + 1) = 0, \quad y'(2z'^2 - y' + 2z' - 2\alpha) = 0$$

și deci corespondența este cu puncte comune izolate.

Deci conexiunea constantă Π^i_{jk} care verifică sistemul (14') cu $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{33} = \Pi^1_{13} = 0$ poate fi redusă la una din formele

$$\overline{\Pi}^1_{23} = 1, \quad \overline{\Pi}^3_{12} = \alpha;$$

$$\overline{\Pi}^1_{23} = \overline{\Pi}^3_{22} = 1;$$

$$\overline{\Pi}^1_{23} = \Pi^1_{12} = -\overline{\Pi}^3_{32} = 1, \quad \overline{\Pi}^3_{12} = \alpha;$$

$$\overline{\Pi}^1_{23} = \overline{\Pi}^1_{12} = -\overline{\Pi}^3_{32} = \overline{\Pi}^3_{22} = 1,$$

când corespondența este cu puncte comune neizolate și la una din formele

$$\overline{\Pi}^1_{23} = \overline{\Pi}^3_{22} = 1, \quad \overline{\Pi}^3_{12} = \alpha \neq 0;$$

$$\overline{\Pi}^1_{23} = \overline{\Pi}^1_{12} = -\overline{\Pi}^3_{32} = \overline{\Pi}^3_{22} = 1, \quad \overline{\Pi}^3_{12} = \alpha \neq 0,$$

când corespondența este cu puncte comune izolate.

Dacă $\Pi^1_{13} \neq 0$, din (46) rezultă

$$\Pi^1_{12} = 0, \quad \Pi^3_{12} = \frac{\Pi^1_{13}\,\Pi^3_{22}}{\Pi^1_{23}}$$

și conexiunea este

$$\Pi^1_{13} = -\Pi^2_{23} \neq 0, \ \Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = \Pi^1_{12} = \Pi^2_{22} = \Pi^3_{32} = \Pi^3_{33} = \Pi^1_{22} =$$

$$= \Pi^1_{33} = \Pi^2_{11} = \Pi^2_{33} = 0, \ \Pi^3_{12} = \frac{\Pi^1_{13}\,\Pi^3_{22}}{\Pi^1_{23}}, \ \Pi^2_{13} = -\frac{(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{23}},$$

$$\Pi^3_{11} = \frac{(\Pi^1_{13})^2\,\Pi^3_{22}}{(\Pi^1_{23})^2}, \ \Pi^1_{23} \neq = 0.$$

Făcînd o schimbare de variabile, conexiunea devine

$$\overline{\Pi}^1_{13} = \overline{\Pi}^1_{23} = -\overline{\Pi}^2_{13} = -\overline{\Pi}^2_{23} = 1, \ \overline{\Pi}^3_{11} = \overline{\Pi}^3_{12} = \overline{\Pi}^3_{22} = \alpha,$$

corespondențele nescrise fiind nule.

În acest caz sistemul (2) devine

$$\left.\begin{aligned} &(y'+1)^2 z' = 0, \\ &(y'+1)\left[z'^2 - \frac{\alpha}{2}(y'+1)\right] = 0 \end{aligned}\right\}$$

și corespondența este cu puncte comune neizolate.

Vom considera acum cazul 1° cînd $\Pi^1_{33} \neq 0$.

Printr-o schimbare de variabile putem presupune $\Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = 1$.

Cu aceste valori ecuațiile (34) ne dau

$$\Pi^1_{11} = \frac{2(\Pi^1_{13})^2 - 2(\Pi^2_{23})^2 - \Pi^2_{33}\,\Pi^3_{22}}{2}, \ \Pi^2_{21} = \frac{2(\Pi^2_{23})^2 - 2(\Pi^1_{13})^2 + \Pi^2_{33}\,\Pi^3_{22} - 2\Pi^3_{12}}{4},$$

$$\Pi^3_{11} = 0,$$

$$\Pi^1_{12} = \frac{4(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) + \Pi^3_{22}}{4}, \ \Pi^2_{22} = -\frac{\Pi^3_{22}}{2}, \ \Pi^2_{11} = \Pi^3_{21}\,\Pi^2_{33} + 2\,\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}),$$

și

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23} + \Pi^3_{22}) = 0, \\ &\Pi^2_{13}\,\Pi^3_{22} + \Pi^3_{12}(\Pi^1_{13} - \Pi^1_{23}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

iar a doua ecuație (14′) se scrie

$$\gamma(\Pi^3_{22}\,\gamma - 2\,\Pi^3_{12}) = 0. \tag{48}$$

Presupunînd $\Pi^2_{13} = \Pi^3_{12} = 0$, sistemul (47) este satisfăcut.

Din primele trei ecuații (14′) rezultă

$$\beta = \frac{1}{2},\ \gamma = \frac{2(\Pi^1_{13} - 3\Pi^2_{23}) + 4\Pi^2_{33} - \Pi^3_{22}}{4},\ \Pi^3_{22}\gamma = 0. \tag{49}$$

Vom considera mai întîi cazul în care $\Pi^3_{22} = 0$. În acest caz relațiile (49) devin

$$\beta = \frac{1}{2},\ \gamma = \frac{\Pi^1_{13} - 3\Pi^2_{23} + 2\Pi^2_{33}}{2},$$

iar celelalte ecuații (14′) ne dau

$$\Pi^2_{33} = \Pi^2_{23},\ (\Pi^1_{13})^2 - (\Pi^2_{23})^2 = 0,\ \Pi^2_{23}(2\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}) = 0.$$

Din ultimele două ecuații rezultă

$$\Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} = 0$$

și deci conexiunea are singurele componente nenule

$$\Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = 1.$$

Sistemul (2) se scrie în acest caz

$$y'z'(2y' + z) = 0,\ z'^2(2y' + z') = 0$$

și corespondența este cu puncte comune neizolate.

Dacă $\Pi^3_{22} \neq 0$ din sistemul (49) rezultă

$$\Pi^3_{22} = 2(\Pi^1_{13} - 3\Pi^2_{23} + 2\Pi^2_{33}).$$

Cu această valoare, sistemul (14′) ne dă

$$\Pi^2_{33} = \frac{\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}}{2},\ \Pi^3_{22} = 4(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}),\ \Pi^1_{13} \neq \Pi^2_{23}$$

și conexiunea se scrie

$$\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = \Pi^1_{22} = \Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^3_{11} = \Pi^3_{12} = 0,\ \Pi^1_{12} = 2\Pi^1_{13},$$

$$\Pi^2_{22} = 2(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}),\ \Pi^3_{32} = -2\Pi^2_{23},\ \Pi^2_{33} = \frac{\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}}{2},\ \Pi^3_{22} = 4(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}),$$

$$\Pi^1_{13} \neq \Pi^2_{23},\ \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = 1.$$

Avînd în vedere că $\Pi^1_{13} \neq \Pi^2_{23}$, rezultă că nu putem avea în același timp $\Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} = 0$. Vom presupune că $\Pi^1_{13} \neq 0$ și printr-o schimbare de variabile obținem

$$\overline{\Pi}^1_{13} = \overline{\Pi}^1_{23} = \overline{\Pi}^1_{33} = 1,\ \overline{\Pi}^1_{12} = 2,\ \overline{\Pi}^2_{22} = 2(\alpha - 1),\ \overline{\Pi}^2_{23} = \alpha,\ \overline{\Pi}^3_{32} = -2\alpha,$$

$$\overline{\Pi}^2_{33} = \frac{1}{2}(\alpha + 1),\ \overline{\Pi}^3_{22} = 4(1 - \alpha),\ \overline{\Pi}^3_{33} = -(\alpha + 1),\ (\alpha \neq 1),$$

componentele nescrise fiind nule.

Sistemul (2) devine în acest caz

$$\left.\begin{aligned}(2y'+z')\,[2y'z'-2\,(\alpha-3)\,y'-(\alpha+1)\,z']=0,\\(2y'+z')\,[z'^2+2\,(\alpha-1)\,y'+(\alpha+3)\,z']=0.\end{aligned}\right\}$$

Curbele

$$2y'z'-2\,(\alpha-3)\,y'-(\alpha+1)\,z'=0$$

și

$$z'^2+2\,(\alpha-1)\,y'+(\alpha+3)\,z'=0$$

au ca puncte de intersecție două puncte aflate pe dreapta $2y'+z'=0$ și punctul $M\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1},\,-2\right)$ care nu se află pe această dreaptă.

Deci corespondența este cu puncte comune izolate.

Vom considera acum cazul în care $\Pi^2_{13}=0$, $\Pi^3_{12}\neq 0$.

Din (47) rezultă $\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}$.

Pentru a verifica ecuația (48) vom presupune mai întîi că $\gamma=0$. În acest caz celelalte ecuații (14′) ne dau $\Pi^3_{12}=0$, ceea ce este absurd.

Deci $\gamma\neq 0$ și din (48) rezultă $\Pi^3_{22}\neq 0$ și

$$\gamma=\frac{2\Pi^3_{12}}{\Pi^3_{22}}.$$

Din celelalte ecuații (14′) rezultă $\Pi^3_{12}=0$ deci $\gamma=0$ ceea ce este absurd.

Deci dacă $\Pi^2_{13}=0$, $\Pi^3_{12}\neq 0$, sistemul (14′) nu are soluții constante.

Vom analiza acum cazul în care $\Pi^2_{13}\neq 0$.

Din (47) rezultă

$$\Pi^3_{22}=-(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}),\quad \Pi^1_{13}(\Pi^3_{12}-\Pi^2_{13})-\Pi^2_{23}(\Pi^3_{12}+\Pi^2_{13})=0. \qquad (47')$$

Presupunînd în ecuația (48) că $\gamma=0$, din ecuațiile (14′) și (47′) rezultă

$$\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=\Pi^2_{33}=\Pi^3_{22}=0,\quad \Pi^3_{12}=-4\Pi^2_{13}\neq 0.$$

Conexiunea este deci

$$\Pi^1_{11}=\Pi^1_{12}=\Pi^2_{22}=\Pi^3_{32}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=\Pi^3_{33}=\Pi^1_{22}=\Pi^2_{11}=\Pi^2_{33}=\Pi^3_{11}=$$
$$=\Pi^3_{22}=0,\quad \Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=2\Pi^2_{13}\neq 0,\quad \Pi^3_{12}=-4\Pi^2_{13},\quad \Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=1.$$

Printr-o schimbare de variabile această conexiune devine

$$\overline{\Pi}^1_{23}=\overline{\Pi}^1_{33}=1,\quad \overline{\Pi}^2_{13}=\lambda,\quad \overline{\Pi}^2_{21}=-\overline{\Pi}^3_{31}=2\lambda,\quad \overline{\Pi}^3_{12}=-4\lambda,\quad (\lambda=\pm 1).$$

Sistemul (2) se scrie în acest caz

$$\left.\begin{aligned}(2y'+z')\,(y'z'-2\lambda)=0,\\(2y'+z')\,(z'^2+4\lambda)=0\end{aligned}\right\}$$

și deci corespondența este fără puncte de intersecție dacă $\lambda \neq -1$ și cu puncte comune neizolate dacă $\lambda = -1$.

Vom presupune acum că $\gamma \neq 0$ și deci că

$$\Pi_{12}^3 = -\frac{\gamma(\Pi_{13}^1 + \Pi_{23}^2)}{2}.$$

Cu aceste valori sistemul (14′) ne dă

$$\Pi_{11}^1 = \Pi_{21}^2 = \Pi_{31}^3 = \Pi_{12}^1 = \Pi_{22}^2 = \Pi_{32}^3 = \Pi_{33}^3 = \Pi_{22}^1 = \Pi_{11}^2 = \Pi_{11}^3 = \Pi_{12}^3 = \Pi_{22}^3 = 0,$$

$$\Pi_{23}^2 = -\Pi_{13}^1 \neq 0, \quad \Pi_{13}^2 = -(\Pi_{13}^1)^2, \quad \Pi_{33}^2 = -\Pi_{13}^1, \quad \Pi_{23}^1 = \Pi_{33}^1 = 1.$$

Printr-o schimbare de variabile conexiunea devine

$$\overline{\Pi}_{i3}^1 = -\overline{\Pi}_{i3}^2 = 1 \quad , \quad (i = 1,2,3).$$

celelalte componente fiind nule.

Corespondența este în acest caz cu puncte comune neizolate.

Vom considera acum cazul în care $\Pi_{22}^1 \neq 0$. Printr-o schimbare de variabile putem deci presupune că $\Pi_{22}^1 = 1$.

Distingem patru situații și anume :

a) $\Pi_{23}^1 = \Pi_{33}^1 = 0$; b) $\Pi_{33}^1 = 0, \Pi_{23}^1 \neq 0$; c) $\Pi_{23}^1 = 0, \quad \Pi_{33}^1 \neq 0$

și d) $\Pi_{23}^1, \quad \Pi_{33}^1 \neq 0$.

În primul caz, din ecuațiile întîi, a doua și a cincea ale sistemului (14′) rezultă

$$\beta = 0, \quad \Pi_{33}^2 = 0, \quad \Pi_{23}^2 = -3\Pi_{13}^1,$$

iar ecuația (34) pentru $i = j = 1$, $k = 2$, $l = 3$ și $i = 1$, $j = k = 2$, $l = 3$ ne dă

$$\Pi_{13}^2 = \Pi_{13}^1 = 0.$$

Cu aceste valori celelalte ecuații (34) ne dau

$$\Pi_{11}^1 = -\Pi_{22}^2(2\Pi_{12}^1 + \Pi_{22}^2), \quad \Pi_{11}^2 = 0, \quad \Pi_{11}^3 = \Pi_{22}^3(\Pi_{11}^1 + 2\Pi_{21}^2) - \\ - 2\Pi_{12}^3\Pi_{22}^2, \quad (2\Pi_{12}^1 + \Pi_{22}^2)(\Pi_{11}^1 + 2\Pi_{21}^2) = 0. \tag{50}$$

Dacă $\Pi_{22}^2 = -2\Pi_{12}^1$, avem

$$\Pi_{11}^1 = 0, \quad \Pi_{11}^3 = 4\Pi_{12}^1\Pi_{12}^3 + 2\Pi_{22}^3\Pi_{21}^2,$$

iar sistemul (14′) devine

$$\gamma^2 = -2\Pi_{21}^2, \quad \Pi_{12}^1\Pi_{12}^3 = 0, \quad \Pi_{21}^2(\gamma - 2\Pi_{12}^1) = 0. \tag{51}$$

Presupunînd $\Pi_{21}^2 = 0$, rezultă $\Pi_{12}^1\Pi_{12}^3 = 0$ și avem cazurile

$$\Pi_{12}^1 = 0$$

sau

$$\Pi_{12}^1 \neq 0, \quad \Pi_{12}^3 = 0.$$

În primul caz, printr-o schimbare de variabile, conexiunea devine

$$\overline{\Pi}^1_{22} = 1, \quad \overline{\Pi}^3_{12} = \varepsilon_1, \quad \overline{\Pi}^3_{22} = \varepsilon_2, \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0,1)$$

componentele nescrise fiind nule.

Sistemul (2) se scrie

$$y'^3 = 0, \quad y'(y'z' - \varepsilon_1 y' - 2\varepsilon_2) = 0$$

și corespondența este fără puncte de intersecție dacă $\varepsilon_2 = 1$ și cu puncte comune neizolate dacă $\varepsilon_2 = 0$.

În al doilea caz conexiunea poate fi adusă la forma

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{\Pi}^1_{12} = \overline{\Pi}^3_{32} = 1, \quad \overline{\Pi}^2_{22} = -2, \quad \overline{\Pi}^3_{22} = \varepsilon, \qquad (\varepsilon = 0,1),$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența este în acest caz cu puncte comune izolate.

Presupunînd că $\Pi^2_{21} \neq 0$, din (51) rezultă

$$\overline{\Pi}^2_{21} = -2(\Pi^1_{12})^2 \neq 0, \quad \Pi^3_{12} = 0$$

și printr-o schimbare de variabile conexiunea se scrie

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{\Pi}^1_{12} = -\overline{\Pi}^3_{32} = 1, \ \overline{\Pi}^2_{21} = \overline{\Pi}^3_{22} = -\overline{\Pi}^3_{31} = -2, \overline{\Pi}^3_{22} = \varepsilon, \ \overline{\Pi}^3_{11} = -4\varepsilon, (\varepsilon = 0,1)$$

corespondența fiind cu puncte comune izolate.

Dacă $\Pi^2_{22} \neq -2\Pi^1_{12}$, din (50) rezultă $\Pi^1_{11} = -2\Pi^2_{21}$ iar sistemul (14′) devine

$$\left.\begin{aligned} &(2\Pi^1_{12} + 3\Pi^2_{22})\gamma = 0 \\ &\Pi^3_{22}[(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})\gamma + 2\Pi^2_{21}] - \Pi^3_{12}\Pi^2_{22} = 0, \\ &\gamma^2 - 2(2\Pi^1_{11} + \Pi^2_{22})\gamma - 4\Pi^2_{21} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

Dacă $2\Pi^1_{12} + 3\Pi^2_{22} = 0$, rezultă $\Pi^1_{12} = -\frac{3}{2}\Pi^2_{22} \neq 0$ și sistemul (52) ne dă

$$\left.\begin{aligned} &2\Pi^3_{22}(\Pi^2_{22}\gamma - \Pi^2_{21}) + \Pi^3_{12}\Pi^2_{22} = 0, \\ &\gamma^2 + 4\Pi^2_{22}\gamma - 4\Pi^2_{22} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (52')$$

Dacă $\Pi^3_{22} = 0$ avem $\Pi^3_{12} = 0$ și printr-o schimbare de variabile conexiunea devine

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{\Pi}^2_{22} = -\overline{\Pi}^2_{21} = -\overline{\Pi}^3_{31} = 1, \quad \overline{\Pi}^1_{11} = 2, \quad \overline{\Pi}^1_{12} = -\frac{3}{2}, \quad \overline{\Pi}^3_{32} = \frac{1}{2},$$

componentele nescrise fiind nule. Corespondența este deci cu puncte izolate.

Dacă $\Pi^3_{22} \neq 0$, din (52′) rezultă

$$(2\Pi^2_{21}\,\Pi^3_{22} - \Pi^3_{12}\,\Pi^2_{22})^2 - 8\Pi^3_{12}\,\Pi^3_{22}\,(\Pi^2_{22})^3 = 0.$$

Printr-o schimbare de variabile putem presupune

$$\overline{\Pi}^i_{23} = 1, \qquad (i = 1,2,3)$$

și relația de mai sus devine

$$(2\,\overline{\Pi}^2_{21} - \overline{\Pi}^3_{12})^2 - 8\overline{\Pi}^3_{12} = 0;$$

putem lua

$$\overline{\Pi}^3_{12} = 2\alpha^2, \quad \overline{\Pi}^2_{21} = \alpha, \quad (\alpha \neq \pm 2).$$

Conexiunea este deci

$$\overline{\Pi}^i_{22} = 1, \quad (i = 1,2,3), \quad \overline{\Pi}^1_{12} = -\frac{3}{2}, \quad \overline{\Pi}^3_{32} = \frac{1}{2}, \quad \overline{\Pi}^1_{11} = -2,$$

$$\overline{\Pi}^2_{21} = \overline{\Pi}^3_{31} = 1, \quad \overline{\Pi}^3_{11} = -4, \quad \overline{\Pi}^3_{12} = 2,$$

componentele nescrise fiind nule. Corespondența este cu puncte comune izolate.

Vom considera acum cazul în care $\Pi^1_{33} = 0$, $\Pi^1_{23} \neq 0$.

Putem deci presupune, printr-o schimbare de variabile, că avem

$$\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 1, \quad \Pi^1_{33} = 0.$$

În acest caz, prima ecuație (14′) se scrie

$$\beta\,(\beta - 2) = 0. \tag{53}$$

Dacă $\beta = 0$, sistemul (14′) ne dă

$$\begin{aligned}
&\Pi^2_{33} = 0, \quad (\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})\,(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) + 2\Pi^2_{13} = 0,\\
&\Pi^3_{22}\,(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})^2 - 4\Pi^3_{12}\,(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) + 4\Pi^3_{11} = 0,\\
&(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) + 2\,(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})\,(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})^2 + 4(\Pi^1_{11} - 2\Pi^2_{21})\,(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) + 8\Pi^2_{11} = 0,\\
&(3\Pi^1_{12} + \Pi^2_{23})^2 - 4\,(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})\,(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) + 4\,(3\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) = 0,
\end{aligned} \tag{54}$$

iar sistemul (34) devine

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^2_{22} = \Pi^2_{23} = -\Pi^1_{13}, \quad \Pi^3_{11} = 2\Pi^1_{13}\,\Pi^3_{12}, \quad \Pi^1_{11} = \Pi^1_{13}\,(2\Pi^1_{12} - \Pi^1_{13}),\\
&\Pi^2_{11} = [\Pi^1_{13}\,(2\Pi^1_{12} - \Pi^1_{13}) + 2\Pi^2_{21}]\,(2\Pi^1_{12} - \Pi^1_{13}), \quad \Pi^2_{13} = \Pi^1_{13}\,(2\Pi^1_{12} - \Pi^1_{13}) + 2\Pi^2_{21}
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

și

$$\Pi^3_{22}\,[\Pi^1_{13}\,(2\Pi^1_{12} - \Pi^1_{13}) + 2\Pi^2_{21}] = 0. \tag{56}$$

Dacă $\Pi^3_{22} = 0$, sistemul (54) ne dă

$$\Pi^1_{13} = \Pi^2_{21} = 0.$$

Avem deci

$$\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = \Pi^2_{31} = \Pi^2_{22} = \Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} = \Pi^3_{33} = \Pi^1_{33} = \Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = \Pi^3_{11} = \Pi^3_{22} = 0,$$

$$\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 1, \Pi^3_{32} = -\Pi^1_{12}.$$

Printr-o schimbare de variabile putem aduce conexiunea la una din formele

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{\Pi}^1_{23} = 1,$$
$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{\Pi}^1_{23} = \overline{\Pi}^1_{12} = -\overline{\Pi}^3_{32} = 1,$$
$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{\Pi}^1_{23} = 1, \quad \overline{\Pi}^3_{12} = \pm 1,$$
$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{\Pi}^1_{23} = \overline{\Pi}^1_{12} = -\overline{\Pi}^3_{22} = 1, \quad \overline{\Pi}^3_{12} = \alpha,$$

componentele nescrise fiind nule.

Prima, a treia și a patra conexiune, dacă $\alpha = -1$, determină corespondențe speciale cu puncte comune neizolate, iar conexiunea a doua și a patra cu $\alpha \neq -1$ determină corespondențe speciale cu puncte comune izolate.

Dacă $\Pi^3_{22} \neq 0$, din (56) rezultă

$$\Pi^2_{21} = \frac{\Pi^1_{12}(\Pi^1_{13} - 2\Pi^1_{12})}{2}.$$

Cu această valoare, din (54), (55) deducem

$$\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = \Pi^2_{31} = \Pi^2_{22} = \Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} = \Pi^3_{33} = \Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = \Pi^3_{11} = 0.$$

Printr-o schimbare de variabile conexiunea devine deci

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{\Pi}^1_{23} = \overline{\Pi}^3_{22} = 1, \quad \overline{\Pi}^1_{12} = -\overline{\Pi}^3_{32} = \alpha, \quad \overline{\Pi}^3_{12} = \beta,$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența este cu puncte comune neizolate dacă $\alpha = -1$ sau dacă $\alpha \neq -1$, $\beta = -\alpha^2$ și cu puncte comune izolate dacă $\alpha \neq -1$, $\beta \neq -\alpha^2$.

A doua soluție a ecuației (53) este $\beta = 2$. În acest caz sistemul (34) devine

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^2_{13} = \Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}, \quad \Pi^2_{33} = 2(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}), \quad \Pi^2_{22} = \frac{\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}}{2},\\
&\Pi^3_{11} = \Pi^3_{12}(\Pi^1_{12} - \Pi^2_{23}),\\
&\Pi^2_{11} = 2\Pi^3_{12}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) + (\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21})\left(2\Pi^1_{12} + \frac{\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}}{2}\right),\\
&\Pi^1_{11} = \frac{\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}}{2}\left(2\Pi^1_{12} + \frac{\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}}{2}\right) - \Pi^3_{22}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}),\\
&\Pi^3_{22}(\Pi^1_{11} + 2\Pi^3_{21}) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Dacă $\Pi^3_{22} = 0$, sistemul (14') ne dă

$$\Pi^1_{12} = \frac{3\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}}{4}, \quad \Pi^1_{11} = \frac{\Pi^1_{13}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})}{2},$$

$$\Pi^2_{21} = -\frac{(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(3\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + 16\,\Pi^3_{12}}{8},$$

care înlocuite în (57) ne dau

$$\Pi^2_{22} = \frac{\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}}{2}, \quad \Pi^2_{33} = 2(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}), \quad \Pi^3_{11} = \Pi^3_{12}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}),$$

$$\Pi^2_{13} = -\frac{(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})^2 + 16\,\Pi^3_{12}}{4}, \quad \Pi^2_{11} = \frac{(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})[8\Pi^3_{12} + \Pi^1_{13}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})]}{4}.$$

Distingem următoarele trei cazuri :

$$\Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} = 0; \quad \Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} \neq 0; \quad \Pi^1_{13} \neq \Pi^2_{23}.$$

În primul caz avem

$$\Pi^1_{11} = \Pi^1_{12} = \Pi^2_{22} = \Pi^3_{32} = \Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} = \Pi^3_{33} = \Pi^1_{33} = \Pi^2_{11} = \Pi^2_{33} = \Pi^3_{11} = \Pi^3_{22} = 0,$$

$$\Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = -2\Pi^3_{12}, \quad \Pi^2_{13} = -4\Pi^3_{12}, \quad \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 1.$$

Printr-o schimbare de variabile, conexiunea devine

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{\Pi}^1_{23} = 1, \quad \overline{\Pi}^3_{12} = \eta, \quad \overline{\Pi}^2_{21} = -\overline{\Pi}^3_{31} = -2\eta, \quad \overline{\Pi}^2_{13} = 4\eta, \quad (\eta = 0, \pm 1),$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența dintre spații este fără puncte de intersecție dacă $\eta = 1$ și cu puncte comune neizolate dacă $\eta = 0, -1$.

În al doilea caz avem

$$\Pi^1_{11} = \Pi^1_{33} = \Pi^2_{11} = \Pi^2_{22} = \Pi^3_{11} = \Pi^3_{22} = 0, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^3_{32} = \frac{\Pi^1_{13}}{2},$$

$$\Pi^2_{23} = \Pi^1_{13} \neq 0, \quad \Pi^3_{33} = -2\Pi^1_{13},$$

$$\Pi^2_{33} = 4\Pi^1_{13} \quad \Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = -2\Pi^3_{12}, \quad \Pi^2_{13} = -4\Pi^3_{12}, \quad \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 1.$$

Printr-o schimbare de variabile obținem

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{\Pi}^1_{23} = \overline{\Pi}^1_{13} = \overline{\Pi}^2_{23} = 1, \quad \overline{\Pi}^3_{33} = -2, \quad \overline{\Pi}^1_{12} = -\overline{\Pi}^3_{32} = \frac{1}{2}\overline{\Pi}^2_{33} = 4, \quad \overline{\Pi}^3_{12} = \alpha,$$

$$\overline{\Pi}^2_{21} = -\overline{\Pi}^3_{31} = -2\alpha, \quad \overline{\Pi}^2_{13} = -4\alpha,$$

componentele nescrise fiind nule.

Dacă $\alpha = \frac{1}{4}$ corespondența este cu puncte comune neizolate, iar dacă $\alpha \neq \frac{1}{4}$ corespondența este cu puncte comune izolate.

În cazul al treilea, putem presupune că $\Pi^1_{13} \neq 0$ și, printr-o schimbare de variabile, avem

$$\overline{\Pi}^1_{13} = \overline{\Pi}^1_{22} = \overline{\Pi}^1_{23} = 1, \quad \overline{\Pi}^1_{11} = \frac{1-\alpha}{2},$$

$$\overline{\Pi}^2_{21} = -\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)+16\beta}{8}, \quad \overline{\Pi}^3_{31} = \frac{16\beta+\alpha^2-1}{8},$$

$$\overline{\Pi}^1_{12} = \frac{3-\alpha}{4}, \quad \overline{\Pi}^2_{22} = \frac{\alpha-1}{2}, \quad \overline{\Pi}^3_{32} = -\frac{\alpha+1}{4}, \quad \overline{\Pi}^2_{23} = \alpha, \quad \overline{\Pi}^3_{33} = -(\alpha+1),$$

$$\overline{\Pi}^2_{11} = \frac{(\alpha-1)(8\beta-\alpha+1)}{4}, \quad \overline{\Pi}^2_{33} = 2(\alpha+1), \overline{\Pi}^3_{11} = \beta(1-\alpha), \overline{\Pi}^3_{12} = \beta, (\alpha \neq 1),$$

$$\overline{\Pi}^2_{13} = -\frac{(\alpha-1)^2+16\beta}{4},$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența dintre cele două spații este fără puncte de intersecție dacă $\alpha = -1$, $\beta > 0$, cu puncte comune neizolate dacă $\alpha = -1$, $\beta \leqslant 0$ sau $\alpha \neq 1$, $\beta = \frac{(\alpha+1)^2}{16}$ și cu puncte comune izolate dacă $\alpha \neq -1$, $\beta \neq \frac{(\alpha+1)^2}{16}$.

Vom considera acum cazul în care $\Pi^3_{22} \neq 0$. În acest caz putem presupune, printr-o schimbare de variabile, că $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^3_{22} = 1$ și $\Pi^1_{33} = 0$. Din ultima ecuație (57) rezultă $\Pi^2_{21} = -\frac{\Pi^1_{11}}{\Pi}$. Cu aceste valori, sistemul (14′) și (57) ne dă

$$\Pi^1_{11} = \frac{\Pi^1_{13}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}-4)}{2}, \quad \Pi^1_{12} = \frac{3\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}-4}{4}, \quad \Pi^2_{22} = \frac{\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13}}{2},$$

$$\Pi^2_{11} = -\frac{(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}-4)^2}{8}, \quad \Pi^2_{13} = 0, \quad (\Pi^2_{33} = 2(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23}),$$

$$\Pi^3_{11} = -\frac{(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}-4)^2}{16}, \quad \Pi^3_{12} = -\frac{(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}-4)^2}{16}.$$

Deci în acest caz conexiunea se scrie

$$\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=1,\quad \Pi^1_{11}=8\alpha(\alpha-\beta-1),\quad \Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=-4\alpha(\alpha-\beta-1),$$
$$\Pi^1_{12}=3\alpha-\beta-1,\quad \Pi^2_{22}=2(\beta-\alpha),\quad \Pi^3_{32}=1-\alpha-\beta,\quad \Pi^1_{13}=4\alpha,\quad \Pi^2_{23}=4\beta,$$
$$\Pi^3_{33}=-4(\alpha+\beta),\quad \Pi^2_{11}=-8(\alpha+\beta)(\alpha-\beta-1)^2,\quad \Pi^2_{33}=8(\alpha+\beta),$$
$$\Pi^3_{11}=-4(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)^2,\quad \Pi^3_{12}=-(\alpha-\beta-1)^2,$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența dintre cele două spații este cu puncte comune neizolate dacă $\alpha=-\beta=0$, $\alpha=-\beta=-1$ sau $\alpha\neq-\beta$ și $(\alpha-\beta)^2+2(\alpha+\beta)=0$ și este cu puncte comune izolate dacă $\alpha=-\beta\neq-1$ sau $\alpha\neq-\beta$ și $(\alpha-\beta)^2+2(\alpha+\beta)\neq0$.

Vom analiza acum cazul $\Pi^1_{23}=0$, $\Pi^1_{33}\neq0$. Avînd în vedere că prima ecuație (14′) trebuie să aibă soluții reale, rezultă că trebuie să avem $\Pi^1_{22}\cdot\Pi^1_{33}<0$ și deci printr-o schimbare de variabile putem presupune $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=1$, $\Pi^1_{23}=0$. Cu aceste valori, prima ecuație (14′) devine $\beta^2-1=0$.

Vom presupune mai întîi că $\beta=1$. În acest caz sistemul (14′), (34) devine

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^2_{23}=\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22},\quad \Pi^1_{33}=2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22},\quad \Pi^3_{22}-\Pi^1_{13}-\Pi^1_{12}-\Pi^2_{22},\\
&\Pi^1_{11}=(\Pi^1_{12})^2-(\Pi^1_{13})^2,\quad \Pi^2_{13}=-\Pi^3_{12}=\Pi^2_{21}+\Pi^1_{12}(\Pi^1_{12}-\Pi^1_{13}),\\
&\Pi^2_{11}=(\Pi^1_{12}-\Pi^1_{13})[2\Pi^2_{21}-\Pi^2_{22}(\Pi^1_{12}-\Pi^1_{13})],\quad \Pi^3_{11}=0,\\
&\Pi^2_{21}\Pi^2_{22}=0,\quad (\Pi^1_{12}-\Pi^1_{13})[2\Pi^2_{21}+(\Pi^1_{12}-\Pi^1_{13})(\Pi^1_{12}+\Pi^1_{13}-\Pi^2_{22})]=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(58)$$

Dacă $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}$, avem de considerat două cazuri și anume : $\Pi^2_{21}=0$ și $\Pi^2_{21}\neq0$.

În primul caz avem conexiunea

$$\Pi^1_{11}=\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=\Pi^1_{23}=\Pi^2_{11}=\Pi^2_{13}=\Pi^3_{11}=\Pi^3_{12}=0,\quad \Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=1,$$
$$\Pi^2_{23}=-\Pi^3_{32}=\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22},\quad \Pi^2_{33}=-\Pi^3_{33}=2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22},\quad \Pi^3_{22}=-\Pi^2_{22},\quad \Pi^1_{13}=\Pi^1_{12},$$

care printr-o schimbare de variabile se reduce la una din formele

$$\overline{\Pi}^1_{22}=-\overline{\Pi}^1_{33}=1;$$
$$\overline{\Pi}^1_{22}=-\overline{\Pi}^1_{33}=\overline{\Pi}^2_{22}=\overline{\Pi}^2_{23}=-\overline{\Pi}^3_{32}=\overline{\Pi}^2_{33}=-\overline{\Pi}^3_{33}=-\overline{\Pi}^3_{22}=1;$$
$$\overline{\Pi}^1_{22}=-\overline{\Pi}^1_{33}=\overline{\Pi}^1_{12}=\overline{\Pi}^1_{13}=\overline{\Pi}^2_{23}=-\overline{\Pi}^3_{32}=1,\quad \overline{\Pi}^2_{33}=-\overline{\Pi}^3_{33}=2;$$
$$\overline{\Pi}^1_{22}=-\overline{\Pi}^1_{33}=\overline{\Pi}^1_{12}=\overline{\Pi}^1_{13}=1,\quad \overline{\Pi}^2_{22}=-\overline{\Pi}^3_{22}=\alpha,\quad \overline{\Pi}^2_{23}=-\overline{\Pi}^3_{32}=\alpha+1;$$
$$\overline{\Pi}^2_{33}=-\overline{\Pi}^3_{33}=\alpha+2;$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența dintre spații este cu puncte comune neizolate în cazul primelor trei conexiuni și a conexiunii a patra cu $\alpha = -1$ și cu puncte comune izolate în cazul conexiunii a patra cu $\alpha \neq -1$.

În cazul $\Pi^2_{21} \neq 0$, din (58) rezultă

$$\Pi^1_{11} = \Pi^2_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^2_{11} = \Pi^3_{11} = \Pi^3_{22} = 0,\ \Pi^2_{13} = -\Pi^3_{12} = -\Pi^3_{31} = \Pi^2_{21} \neq 0,$$

$$\Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} = \Pi^1_{12} = -\Pi^3_{32},\ \Pi^2_{33} = -\Pi^3_{33} = 2\Pi^1_{12},\ \Pi^1_{22} = -\Pi^1_{33} = 1$$

și printr-o schimbare de variabile obținem

$$\overline{\Pi}^1_{22} = -\overline{\Pi}^1_{33} = 1,\ \overline{\Pi}^2_{13} = -\overline{\Pi}^3_{12} = -\overline{\Pi}^3_{31} = \overline{\Pi}^2_{21} = \lambda,\ \overline{\Pi}^1_{12} = \overline{\Pi}^1_{13} = \overline{\Pi}^2_{23} = -\overline{\Pi}^3_{32} = \alpha,$$

$$\overline{\Pi}^2_{33} = -\overline{\Pi}^3_{33} = 2\alpha,\ (\lambda = \pm 1),$$

componentele nescrise fiind nule.

Dacă $\alpha = 0$, $\lambda = -1$, corespondența este fără puncte de intersecție; dacă $\alpha = 0$, $\lambda = 1$ sau $\alpha = \pm 1$, $\lambda = -1$, corespondența este cu puncte comune neizolate, iar dacă $\alpha = \pm 1$, $\lambda = 1$ sau $\alpha \neq 0, \pm 1$, corespondența este cu puncte comune izolate.

Vom considera acum cazul $\Pi^1_{12} \neq \Pi^1_{13}$, $\Pi^2_{21} = 0$. În acest caz conexiunea se scrie

$$\Pi^2_{22} = \Pi^1_{12} + \Pi^1_{13},\ \Pi^3_{22} = -2\Pi^1_{12},\ \Pi^2_{11} = -(\Pi^1_{12} - \Pi^1_{13})^2 (\Pi^1_{12} + \Pi^1_{13}),$$

$$\Pi^2_{13} = -\Pi^3_{12} = \Pi^1_{12}(\Pi^1_{12} - \Pi^1_{13}),\ \Pi^1_{11} = -\Pi^3_{31} = (\Pi^1_{12})^2 - (\Pi^1_{13})^2,\ \Pi^2_{33} = 3\Pi^1_{12} + \Pi^1_{13},$$

$$\Pi^2_{23} = -\Pi^3_{32} = 2\Pi^1_{12} + \Pi^1_{13},\ \Pi^3_{33} = -2(\Pi^1_{12} + \Pi^1_{13}),\ \Pi^2_{21} = \Pi^3_{11} = \Pi^1_{23} = 0,$$

$$\Pi^1_{22} = -\Pi^1_{33} = 1.$$

Avînd în vedere că $\Pi^1_{12} \neq \Pi^1_{13}$, putem presupune că $\Pi^1_{12} \neq 0$ și deci, printr-o schimbare de variabile, obținem conexiunea

$$\overline{\Pi}^1_{12} = \overline{\Pi}^1_{22} = -\overline{\Pi}^1_{33} = 1,\ \overline{\Pi}^3_{22} = -2,\ \overline{\Pi}^1_{13} = \alpha,\ \overline{\Pi}^2_{22} = \alpha + 1,\ \overline{\Pi}^2_{33} = \alpha + 3,$$

$$\overline{\Pi}^2_{13} = -\overline{\Pi}^3_{12} = 1 - \alpha,\ \overline{\Pi}^1_{11} = -\overline{\Pi}^3_{31} = 1 - \alpha^2,\ \overline{\Pi}^2_{23} = -\overline{\Pi}^3_{32} = \alpha + 2,$$

$$\overline{\Pi}^3_{33} = -2(\alpha + 1),\ \overline{\Pi}^2_{11} = -(\alpha - 1)^2 (\alpha + 1),$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența este cu puncte comune izolate.

Vom considera acum cazul $\Pi^1_{12} \neq \Pi^1_{13}$, $\Pi^2_{21} \neq 0$. În acest caz, din (58) rezultă

$$\Pi^2_{22} = 0,\ \Pi^1_{11} = (\Pi^1_{12})^2 - (\Pi^1_{13})^2,\ \Pi^2_{21} = \frac{(\Pi^1_{13})^2 - (\Pi^2_{23})^2}{2},\ \Pi^2_{23} = -\Pi^3_{32} = \Pi^1_{12},$$

$$\Pi^2_{11} = -(\Pi^1_{12} - \Pi^1_{13})^2 (\Pi^1_{12} + \Pi^1_{13}),\ \Pi^2_{13} = -\Pi^3_{12} = \frac{(\Pi^1_{12} - \Pi^1_{13})^2}{2},$$

$$\Pi^2_{33} = 2\Pi^1_{12},\ \Pi^3_{22} = \Pi^1_{13} - \Pi^1_{12}.$$

Ca și mai sus vom presupune că $\Pi^1_{12} \neq 0$ și, făcînd o schimbare de variabile, conexiunea devine

$$\overline{\Pi}^1_{22} = -\overline{\Pi}^1_{33} = \overline{\Pi}^2_{23} - \overline{\Pi}^3_{32} = \overline{\Pi}^1_{12} = 1, \quad \overline{\Pi}^2_{33} = 2,$$

$$\overline{\Pi}^3_{22} = \alpha - 1, \quad \overline{\Pi}^2_{13} - \overline{\Pi}^3_{12} = \frac{(\alpha-1)^2}{2},$$

$$\overline{\Pi}^3_{33} = -(\alpha+1), \overline{\Pi}^1_{11} = 1 - \alpha^2, \quad \overline{\Pi}^2_{21} = \overline{\Pi}^3_{31}\frac{\alpha^2-1}{2},$$

$$\overline{\Pi}^2_{11} = -(\alpha-1)^2(\alpha+2), \quad \overline{\Pi}^1_{13} = \alpha, \quad (\alpha \neq \pm 1)$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența dintre cele două spații este cu puncte comune neizolate dacă $\alpha = -1 \pm \sqrt{2}$ și cu puncte comune izolate dacă $\alpha \neq -1 \pm \sqrt{2}$.

Vom considera acum cazul în care ecuația (14′) are soluția $\beta = -1$. În acest caz sistemul (14′), (34) devine

$$\Pi^2_{22} = -\Pi^1_{12} - \Pi^2_{23}, \ \Pi^2_{33} = \Pi^1_{12} - \Pi^2_{23}, \ \Pi^3_{22} = \Pi^1_{13} - \Pi^2_{23},$$
$$\Pi^2_{13} = -\Pi^3_{12} = -\Pi^2_{21} - \Pi^1_{12}(\Pi^1_{12} + \Pi^1_{13}), \ \Pi^1_{11} = (\Pi^1_{12})^2 - (\Pi^1_{13})^2,$$
$$\Pi^2_{11} = 2\Pi^2_{21}(\Pi^1_{12} + \Pi^1_{13}) + (\Pi^1_{12} + \Pi^1_{13})^2(\Pi^1_{12} + \Pi^2_{23}),$$
$$\Pi^3_{11} = 2\Pi^2_{21}(\Pi^1_{12} + \Pi^1_{13}) + (\Pi^1_{12} + \Pi^1_{13})^2(2\Pi^1_{12} - \Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}).$$

Distingem următoarele cazuri

$\Pi^1_{12} \neq 0$; $\Pi^1_{12} = 0, \Pi^1_{13} = 0$; $\Pi^1_{12} = \Pi^1_{13} = 0, \Pi^2_{23} = 0$; $\Pi^1_{12} = \Pi^1_{13} = \Pi^2_{23}\, 0$.

În primul caz, printr-o schimbare de variabile, putem aduce conexiunea la forma

$\overline{\Pi}^1_{12} = \overline{\Pi}^1_{22} = -\overline{\Pi}^1_{33} = 1$, $\overline{\Pi}^1_{13} = \alpha$, $\overline{\Pi}^2_{23} = \overline{\Pi}^3_{32} = \beta$, $\overline{\Pi}^2_{21} = \gamma$, $\overline{\Pi}^2_{22} = -(\beta+1)$,
$\overline{\Pi}^1_{11} = 1-\alpha^2$, $\overline{\Pi}^3_{31} = \alpha^2 - \gamma - 1$, $\overline{\Pi}^3_{33} = -(\alpha+\beta)$, $\overline{\Pi}^2_{11} = 2\gamma(\alpha+1) + (\alpha+1)^2(\beta+1)$,
$\overline{\Pi}^2_{13} = -\overline{\Pi}^3_{12} = -(\alpha+\gamma+1)$, $\overline{\Pi}^2_{33} = 1-\beta$, $\overline{\Pi}^3_{11} = 2\gamma(\alpha+1) + (\alpha+1)^2(2-\alpha+\beta)$,
$\overline{\Pi}^3_{22} = \alpha = \beta$,

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența dintre cele două spații este cu puncte comune neizolate dacă $\alpha\beta + \beta + \gamma + 1 = 0$ și cu puncte comune izolate dacă $\alpha\beta + \beta + \gamma + 1 \neq 0$.

În al doilea caz, făcînd o schimbare de variabile, obținem conexiunea sub forma

$\overline{\Pi}^1_{13} = -\overline{\Pi}^1_{11} = \overline{\Pi}^1_{22} = -\overline{\Pi}^1_{33} = 1$, $\overline{\Pi}^2_{23} = -\overline{\Pi}^2_{22} = -\overline{\Pi}^2_{33} = \overline{\Pi}^3_{32} = \alpha$,
$\overline{\Pi}^2_{21} = -\overline{\Pi}^2_{13} = \overline{\Pi}^3_{12} = \beta$,
$\overline{\Pi}^3_{31} = 1-\beta$, $\overline{\Pi}^3_{33} = -(\alpha+1)$, $\overline{\Pi}^2_{11} = \alpha + 2\beta$, $\overline{\Pi}^3_{11} = \alpha + 2\beta - 1$, $\overline{\Pi}^3_{22} = 1-\alpha$,

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența este cu puncte comune neizolate dacă $\alpha^2(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)^2=0$ și cu puncte comune izolate dacă $\alpha^2(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)^2\neq 0$.

În al treilea caz, printr-o schimbare de variabile conexiunea devine

$$\overline{\Pi}^1_{22}=-\overline{\Pi}^1_{33}=\overline{\Pi}^2_{23}=-\overline{\Pi}^2_{22}=-\overline{\Pi}^2_{33}=-\overline{\Pi}^3_{22}=\overline{\Pi}^3_{32}=-\overline{\Pi}^3_{33}=1,$$

$$\overline{\Pi}^2_{21}=-\overline{\Pi}^2_{13}=\overline{\Pi}^3_{12}=-\overline{\Pi}^3_{31}=\alpha,$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența dintre cele două spații este cu puncte comune neizolate dacă $\alpha=0$ și cu puncte comune izolate dacă $\alpha\neq 0$.

În ultimul caz conexiunea poate fi adusă la forma

$$\overline{\Pi}^1_{22}=-\overline{\Pi}^1_{33}=1,\quad \overline{\Pi}^2_{21}=-\overline{\Pi}^2_{13}=\overline{\Pi}^3_{12}=-\overline{\Pi}^3_{31}=\varepsilon,\quad (\varepsilon=0,1).$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența dintre spații este cu puncte comune neizolate.

Vom studia acum ultima situație și anume $\Pi^1_{hk}\neq 0$, $(h,k=2,3)$.

Printr-o schimbare de variabile putem presupune $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1$. În acest caz, avînd în vedere că prima ecuație (14′) trebuie să aibă soluții reale, rezultă că $\Pi^1_{33}\leqslant 1$ și deci putem pune $\Pi^1_{33}=1-k^2$, $(k\neq\pm 1)$. Cu aceste valori sistemul (34) ne dă

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^3_{11}=0,\quad \Pi^2_{33}=2(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})+(k^2-1)(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22}),\\
&\Pi^3_{22}=\frac{\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}+2\Pi^2_{22}}{k^2-1},\quad \Pi^3_{12}=\frac{\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21}-\Pi^2_{13}}{k^2-1},\\
&\Pi^2_{11}=\frac{2(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21}-\Pi^2_{13})}{k^2-1}+(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22}),\\
&\Pi^1_{11}=-\frac{(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}+2\Pi^2_{22})}{k^2-1}-\Pi^2_{22}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22}),\\
&2\Pi^2_{13}\Pi^2_{22}+(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})=0.
\end{aligned}\right\}\qquad (59)$$

Vom presupune mai întîi că $\Pi^2_{22}=0$. Din ultima ecuație (59) rezultă

$$(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})=0. \qquad (59')$$

Dacă $\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}$, sistemul (59) se scrie

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^1_{11}=\Pi^3_{11}=\Pi^3_{22}=0,\quad \Pi^2_{33}=4\Pi^1_{13}+2(k^2-1)\Pi^1_{12},\quad \Pi^3_{12}=\frac{2\Pi^2_{21}-\Pi^2_{13}}{k^2-1},\\
&\Pi^2_{11}=\frac{4\Pi^1_{13}(2\Pi^2_{21}-\Pi^2_{13})+4\Pi^1_{12}\Pi^2_{21}(k^2-1)}{k^2-1}.
\end{aligned}\right\}\qquad (59'')$$

Cu aceste valori, a doua ecuație (14′) devine

$$(2\Pi^2_{21} - \Pi^2_{13})\,\gamma = 0. \tag{60}$$

Dacă $\gamma = 0$, sistemul (14′) ne dă

$$\Pi^2_{11}=0,\ \Pi^1_{13}=(k+1)\Pi^1_{12},\ \Pi^2_{13}=(k+1)\Pi^2_{21},\ \Pi^2_{33}=2(k+1)^2\Pi^1_{12},\ \Pi^3_{12}=-\frac{\Pi^2_{21}}{k+1}.$$

Dacă $\Pi^1_{12} \neq 0$, printr-o schimbare de variabile conexiunea se scrie

$$\overline{\Pi}^1_{12}=\overline{\Pi}^1_{22}=\overline{\Pi}^1_{23}=-\overline{\Pi}^3_{32}=1,\ \overline{\Pi}^1_{33}=1-k^2,\ \overline{\Pi}^2_{21}=-\overline{\Pi}^3_{31}=\alpha,\ \overline{\Pi}^1_{13}=\overline{\Pi}^2_{23}=k-1,$$

$$\overline{\Pi}^3_{33}=-2(k+1),\ \overline{\Pi}^2_{13}=(k+1)\alpha,\ \overline{\Pi}^2_{33}=2(k+1)^2,\ \overline{\Pi}^3_{12}=-\frac{\alpha}{k+1},\ (k\neq\pm 1),$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența dintre cele două spații este cu puncte neizolate dacă $k = 0$, sau $k \neq 0$, $\alpha = -1$ și cu puncte comune izolate dacă $\alpha \neq -1$, $k \neq 0$.

Dacă $\Pi^1_{12} = 0$, printr-o schimbare de variabile obținem conexiunea

$$\overline{\Pi}^1_{22}=\overline{\Pi}^1_{23}=1,\ \overline{\Pi}^1_{33}=1-k^2,\ \overline{\Pi}^2_{21}=-\overline{\Pi}^3_{31}=\eta,\ \overline{\Pi}^2_{13}=(k+1)\eta,\ \overline{\Pi}^3_{12}=$$

$$-\frac{\eta}{k+1},\ (\eta=0,\ \pm 1;\ k=\pm 1),$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența dintre cele două spații este fără puncte de intersecție dacă $k = 0$, $\eta = \pm 1$ sau dacă $k \neq 0$, $\eta = \pm 1$, $\eta k(k+1) < 0$ și cu puncte comune neizolate dacă $\eta = 0$ sau dacă $k \neq 0$, $\eta = \pm 1$, $\eta k(k+1) > 0$.

Dacă $\gamma \neq 0$, din ecuația (60) rezultă $\Pi^2_{13} = 2\Pi^2_{21}$ și relațiile (59″) și (14′) ne dau

$$\Pi^1_{11}=\Pi^3_{11}=\Pi^3_{12}=\Pi^3_{22}=k=0,\ \Pi^1_{13}=\Pi^1_{12},\ \Pi^2_{33}=2\Pi^1_{12},\ \Pi^2_{21}=2(\Pi^1_{12})^2,\ \Pi^2_{11}=8(\Pi^1_{12})^3.$$

Printr-o schimbare de variabile, conexiunea se scrie

$$\overline{\Pi}^1_{22}=\overline{\Pi}^1_{23}=\overline{\Pi}^1_{33}=1,\ \overline{\Pi}^1_{12}=\overline{\Pi}^1_{13}=\overline{\Pi}^2_{23}=-\overline{\Pi}^3_{32}=\varepsilon,\ \overline{\Pi}^2_{21}=\overline{\Pi}^2_{33}=-\overline{\Pi}^3_{31}=-\overline{\Pi}^3_{33}=2\varepsilon,$$

$$\overline{\Pi}^2_{11}=8\varepsilon,\ \overline{\Pi}^2_{13}=4\varepsilon,\quad (\varepsilon = 0,1),$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența dintre cele două spații este cu puncte comune neizolate dacă $\varepsilon = 0$ și cu puncte comune izolate dacă $\varepsilon = 1$.

Vom presupune acum că $\Pi^1_{13} \neq \Pi^2_{23}$. În acest caz putem considera că $\Pi^1_{13} \neq 0$ și printr-o schimbare de variabile obținem:

$$\Pi^1_{13}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^1_{33}=1-k^2,\ (k\neq\pm 1),\ \Pi^2_{23}\neq 1,\ \Pi^2_{22}=0.$$

Cu aceste valori sistemul (59) ne dă

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^1_{11}=-2\Pi^2_{21},\ \Pi^3_{12}=-\frac{\Pi^2_{13}}{k^2-1},\ \Pi^2_{11}=-\frac{2\Pi^2_{13}(\Pi^2_{23}+1)}{k^2-1},\\ &\Pi^3_{22}=\frac{1-\Pi^2_{23}}{k^2-1},\ \Pi^2_{33}=2(\Pi^2_{23}+1)+2\Pi^1_{12}(k^2-1),\ \Pi^3_{11}=0,\\ &\Pi^2_{21}=\frac{1-(\Pi^2_{23})^2}{2(k^2-1)}. \end{aligned}\right\} \quad (59''')$$

În acest caz a doua ecuație (14′) devine

$$\gamma\left(\gamma+\frac{\Pi^2_{13}}{1-\Pi^2_{23}}\right)=0. \quad (61)$$

Dacă $\gamma=0$, sistemul (14′) ne dă

$$\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=-\Pi^3_{32}=-\Pi^2_{23}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=1,\ \Pi^2_{33}=\Pi^3_{22}=-2,$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența este în acest caz cu puncte comune izolate.

Dacă $\gamma\neq 0$, din (61) rezultă

$$\gamma=\frac{\Pi^2_{13}}{\Pi^2_{23}-1},\ \Pi^2_{13}\neq 0,$$

iar sistemul (14′) ne dă relația imposibilă $\Pi^2_{13}=0$.

Vom considera acum cazul în care $\Pi^2_{22}\neq 0$. În acest caz, printr-o schimbare de variabile putem obține $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^2_{22}=1$, $\Pi^1_{33}=1-k^2$, $(k\neq\pm 1)$.

Sistemul (59) devine

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^3_{11}=0,\ \Pi^2_{33}=2(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})+(k^2-1)(2\Pi^1_{12}+1),\ \Pi^3_{22}=\frac{\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}+2}{k^2-1},\\ &\Pi^1_{11}=-\frac{(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}+2)}{k^2-1}-2\Pi^1_{12}-1,\ \Pi^3_{12}=\\ &\qquad=\frac{(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}+2)}{2(k^2-1)},\\ &\Pi^2_{13}=-\frac{(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})}{2},\\ &\Pi^2_{11}=\frac{(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})}{k^2-1}+(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})(2\Pi^1_{12}+1). \end{aligned}\right\} \quad (59^{IV})$$

Cu aceste valori, a doua ecuație (14′) devine

$$(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23} + 2)\,\gamma\,(\gamma - \Pi^1_{11} - 2\Pi^2_{21}) = 0\,. \tag{62}$$

Dacă $\Pi^2_{23} = \Pi^1_{13} + 2$, sistemul ($59^{IV}$) ne dă

$$\Pi^3_{11} = \Pi^3_{12} = \Pi^3_{22} = 0,\quad \Pi^1_{11} = -2\Pi^1_{12} - 1,\quad \Pi^2_{33} = 4(\Pi^1_{13} + 1) + (k^2 - 1)(2\Pi^1_{12} + 1),$$

$$\Pi^2_{13} = 2(\Pi^1_{12} - \Pi^2_{21}) + 1,$$

$$\Pi^2_{11} = \frac{+4(\Pi^1_{13} + 1)(2\Pi^1_{12} - 2\Pi^2_{21} + 1)}{k^2 - 1} - (2\Pi^1_{12} + 1)(2\Pi^1_{12} - 2\Pi^2_{21} + 1),$$

iar sistemul (14′) ne dă $k = 1$, ceea ce este imposibil.

Deci $\Pi^2_{23} \neq \Pi^1_{13} + 2$. Ecuația (62) se scrie

$$\gamma\,(\gamma - \Pi^1_{11} - 2\Pi^2_{21}) = 0\,. \tag{62′}$$

Dacă $\gamma = 0$, sistemul (14′) ne dă

$$\left.\begin{aligned}
&k\,[\Pi^1_{13} - (k+1)\Pi^1_{12}] = 0,\quad (\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21})\,[(\Pi^1_{13})^2 - (\Pi^2_{23})^2 + \\
&\qquad + (k^2 - 1)(2\Pi^1_{12} + 1)] = 0,\\
&2\,(k^2 - 1)\,\Pi^1_{12} - (k-2)\,\Pi^1_{13} - k\,\Pi^2_{23} + k\,(k+1) = 0,\\
&(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21})\,(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23} + 2) + (k-1)\,(3\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) = 0,\\
&(\Pi^1_{11} - 2\Pi^2_{21})\,(k+1) - (\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21})\,(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Vom presupune mai întîi că $k = 0$. În acest caz (63) devine

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^1_{13} = \Pi^1_{12},\ \Pi^1_{11} = (\Pi^1_{13})^2 - (\Pi^2_{23} - 1)^2,\\
&(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21})\,(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) - \Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21} = 0\,,\\
&(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21})\,[(\Pi^1_{13})^2 - (\Pi^2_{23})^2 - 2\Pi^1_{13} - 1] = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{63′}$$

Dacă $\Pi^1_{11} = -2\Pi^2_{21}$, rezultă că

$$\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = 0,\quad \Pi^2_{23} = 1 \pm \Pi^1_{13},\quad \Pi^1_{12} = \Pi^1_{13}\,.$$

Conexiunea este deci

$$\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = \Pi^2_{22} = -\Pi^3_{22} = 1,\quad \Pi^1_{12} = \Pi^1_{13} = \alpha,$$

$$\Pi^2_{23} = -\Pi^3_{32} = \alpha + 1,\quad \Pi^2_{33} = -\Pi^3_{33} = 2\alpha + 1,$$

sau

$$\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = \Pi^2_{22} = -\Pi^3_{33} = 1,\ \Pi^1_{12} = \Pi^1_{13} = \alpha,\ \Pi^3_{32} = -\alpha - 1,\ \Pi^2_{23} = 1 - \alpha,$$

$$\Pi^2_{33} = 1 - 2\alpha,\ \Pi^3_{22} = -1 - 2\alpha,\ \left(\alpha \neq -\frac{1}{2}\right),$$

corespondențele nescrise fiind nule.

În ambele cazuri, corespondența este cu puncte comune neizolate dacă $\alpha = 0$ și cu puncte izolate dacă $\alpha \neq 0$.

Dacă $\Pi_{11}^1 \neq -2\Pi_{21}^2$, din (63′) și ($59^{IV}$) rezultă următoarele conexiuni

1) $\Pi_{22}^1 = \Pi_{23}^1 = \Pi_{33}^1 = \Pi_{22}^2 = -\Pi_{22}^3 = 1$, $\Pi_{12}^1 = \Pi_{13}^1 = -\Pi_{23}^2 = \Pi_{32}^3 = -\frac{1}{2}$, $\Pi_{21}^2 = -\Pi_{31}^3 = \Pi_{13}^2 = -\Pi_{12}^3 = \alpha$, $(\alpha \neq 0)$;

2) $\Pi_{22}^1 = \Pi_{23}^1 = \Pi_{33}^1 = \Pi_{22}^2 = 1$, $\Pi_{11}^1 = \frac{2(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha}$, $\Pi_{21}^2 = -(\alpha+1)$, $\Pi_{31}^3 = -\frac{(\alpha+1)(\alpha+4)}{\alpha}$,

$\Pi_{12}^1 = \Pi_{13}^1 = \frac{\alpha^2+2\alpha+2}{2\alpha}$, $\Pi_{23}^2 = \frac{2-\alpha^2}{2\alpha}$, $\Pi_{33}^3 = -\frac{\alpha+2}{\alpha}$, $\Pi_{32}^3 = -\frac{\alpha^2+4\alpha+2}{2\alpha}$, $\Pi_{13}^2 = -\frac{2(\alpha+1)^2}{\alpha}$,

$\Pi_{33}^2 = \frac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{\alpha}$, $\Pi_{12}^3 = -\frac{2(\alpha+1)(\alpha+3)}{\alpha}$, $\Pi_{22}^3 = -(\alpha+3)$, $(\alpha \neq 0, -2, -3)$;

3) $\Pi_{22}^1 = \Pi_{23}^1 = \Pi_{33}^1 = -\Pi_{21}^2 = \Pi_{22}^2 = 1$, $\Pi_{33}^2 = \frac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{\alpha}$, $\Pi_{11}^1 = 2(1-\alpha)$, $\Pi_{31}^3 = 2\alpha - 1$,

$\Pi_{13}^2 = \Pi_{33}^3 = \alpha - 1$, $\Pi_{12}^1 = \Pi_{13}^1 = -\frac{\alpha^2-2\alpha+2}{2\alpha}$, $\Pi_{23}^2 = \frac{2-\alpha^2}{2\alpha}$, $\Pi_{32}^3 = \frac{6^2-4\alpha+2}{2\alpha}$,

$\Pi_{12}^3 = 3\alpha - 2$, $\Pi_{22}^3 = \frac{2-3\alpha}{\alpha}$, $(\alpha \neq 0, \frac{2}{3}, 1)$,

componentele nescrise fiind nule.

În cazul acestor conexiuni corespondența dintre spații este cu puncte comune izolate.

Vom considera acum cazul în care $k \neq 0$. Sistemul (63) devine

$$\Pi_{11}^1 = 0,\ \Pi_{13}^1 = (k+1)\Pi_{12}^1,\ \Pi_{23}^2 = (k+1)(\Pi_{12}^1+1),\ \Pi_{21}^2(2\Pi_{12}^1+1) = 0. \quad (63'')$$

Dacă $\Pi^2_{21} = 0$, conexiunea este

$$\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^2_{22}=1,\ \Pi^1_{33}=1-k^2,\ \Pi^1_{12}=\alpha,\ \Pi^3_{32}=-(1+\alpha),\ \Pi^1_{13}=(k+1)\alpha,$$
$$\Pi^2_{23}=(k+1)(\alpha+1),\ \Pi^3_{33}=-(k+1)(2\alpha+1),\ \Pi^2_{33}=$$
$$=(k+1)^2(2\alpha+1),\ \Pi^3_{22}=-\frac{1}{(k-1)},\ (k\neq 0,\ \pm 1),$$

corespondențele nescrise fiind nule.

Corespondența este cu puncte comune neizolate dacă $\alpha = -\frac{k}{k+1}$ și cu puncte comune izolate dacă $\alpha \neq -\frac{k}{k+1}$.

Dacă $\Pi^2_{21} \neq 0$, din (63″) rezultă că $\Pi^1_{12} = -\frac{1}{2}$ și conexiunea este

$$\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^2_{22}=1,\ \Pi^1_{33}=1-k^2,\ \Pi^1_{12}=\Pi^3_{32}=$$
$$=-\frac{1}{2},\ \Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=\alpha,$$
$$\Pi^1_{13}=-\Pi^2_{23}=-\frac{k+1}{2},\ \Pi^2_{13}=\alpha(k+1),\ \Pi^3_{12}=$$
$$=-\frac{\alpha}{k+1},\ \Pi^3_{22}=-\frac{1}{k-1},\qquad (k\neq 0,\ \pm 1;\ \alpha\neq 0),$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența este cu puncte comune neizolate dacă $\alpha = -\frac{k+1}{4k}$ și cu puncte comune izolate dacă $\alpha \neq -\frac{k+1}{4k}$.

Ultimul caz pe care-l avem de considerat este $\gamma \neq 0$. Din (62′) rezultă

$$\gamma = \Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21} \neq 0\,.$$

Cu această valoare, sistemul (14′) ne dă

$$\left.\begin{aligned}
&k[k(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})-(k+1)\Pi^1_{12}+\Pi^1_{13}]=0,\\
&k[(k-1)(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})+\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}+k+1]=0,\\
&(k+1)(k-2)\Pi^1_{12}+k(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})+2\Pi^1_{13}-k\Pi^2_{23}+k(k+1)=0,\\
&(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})\left[\frac{\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}+2}{k-1}+2\Pi^1_{12}-\frac{2(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})}{k^2-1}\right]=0,
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})^2-(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})\left[\frac{\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}+2}{k-1}+4\Pi^1_{12}\right]+\\
&\qquad+\Pi^1_{11}-2\Pi^2_{21}=0.
\end{aligned}\right\}$$

Din acest sistem și din (59^{IV}) rezultă

$$\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^2_{22}=-\Pi^3_{32}=\Pi^2_{21}=-\Pi^1_{11}=\Pi^2_{11}=1,\ \Pi^2_{23}=-\Pi^1_{13}=$$
$$=\Pi^2_{13}-k,\ \Pi^3_{12}=-\frac{1}{k+1},$$
$$\Pi^3_{22}=-\frac{2}{k+1},\ \Pi^1_{33}=-\Pi^2_{33}=1-k^2,\ (k\neq\pm 1),$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența dintre cele două spații este cu puncte comune izolate.

Din cele de mai sus rezultă că soluțiile constante ale sistemului (14′), pentru care corespondența dintre spațiile A_3 și E_3 este fără puncte de intersecție, sînt de formele :

1) $\Pi^1_{22}=\Pi^3_{22}=1,\ \Pi^3_{22}=\varepsilon$;

2) $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{12}=1,\ \Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=-2,\ \Pi^2_{13}=-4$;

3) $\Pi^1_{13}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{11}=\Pi^1_{12}=-\Pi^2_{22}=-\Pi^2_{23}=1,\ \Pi^2_{21}=-(2\beta^2+1),$
$\Pi^3_{31}=\Pi^3_{11}=2\beta^2,\ \Pi^3_{33}=-2,\ \Pi^2_{11}=\Pi^2_{13}=-(4\beta^2+1),$
$\Pi^3_{12}=\beta^2,\ (\beta\neq 0)$;

4) $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=-\Pi^2_{13}=\Pi^3_{12}=\Pi^3_{31}=-\Pi^2_{21}=1$;

5) $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=1,\ \Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=\Pi^2_{13}=-\Pi^3_{12}=\lambda,\ (\lambda=\pm 1)$;

6) $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^1_{33}=1-k^2,\ \Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=\lambda,\ \Pi^2_{13}=$
$=(k+1)\lambda,\ \Pi^3_{12}=-\frac{\lambda}{k+1},$
$(\lambda=\pm 1;\ k\neq 0,\pm 1;\ \lambda k(k+1)<0)$;

componentele nescrise fiind nule.

Prin schimbarea de variabile

$$\bar{x}=x,\ \bar{y}+(k+1)\bar{z}=\frac{y+z}{l},\ \bar{y}-(k-1)\bar{z}=2ly,\ \left(l=\sqrt{-\frac{\lambda k}{k+1}}\right),$$

conexiunea 6) devine identică cu conexiunea 4).

Avem deci :

Teorema 1. *Tensorul proiectiv constant* Π^i_{jk}, *care determină o corespondență specială fără puncte de intersecție între spațiile* A_3 *și* E_3, *poate fi adus, prin schimbări de variabile, la una din formele* :

[I] $\Pi^1_{12}=\Pi^3_{32}=\Pi^3_{22}=1,\ \Pi^2_{22}=-2$;

[II] $\Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=\Pi^3_{12}=-\Pi^2_{13}=1,\ \Pi^2_{11}=\Pi^3_{11}=\varepsilon,\ (\varepsilon=0,1)$;

[III] $\Pi^1_{12}=\Pi^2_{22}=\Pi^1_{13}=-\Pi^3_{33}=-\Pi^2_{33}=1,\ \Pi^3_{32}=-2,\ \Pi^3_{22}=-3;$

[IV] $\Pi^1_{22}=\Pi^3_{22}=1,\ \Pi^3_{12}=\varepsilon;$

[V] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{12}=1;\ \Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=-2,\ \Pi^2_{13}=-4;$

[VI] $\Pi^1_{11}=\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=-\Pi^2_{22}=-\Pi^2_{23}=1,\ \Pi^3_{33}=-2,\ \Pi^3_{12}=\beta^2,$
$\Pi^3_{11}=\Pi^3_{31}=2\beta^2,\ \Pi^2_{21}=-(2\beta^2+1),\ \Pi^2_{11}=\Pi^2_{13}=-(4\beta^2+1)\ (\beta\neq 0);$

[VII] $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=-\Pi^2_{13}=\Pi^3_{12}=-\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=1;$

[VIII] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=1,\ \Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=\Pi^2_{13}=-\Pi^3_{12}=\lambda,\ (\lambda=\pm 1);$

componentele nescrise fiind nule.

Vom determina acum transformările punctuale corespunzătoare conexiunilor [I], ..., [VIII] determinate mai sus.

Prof. G. Vrănceanu a arătat [2][1]) că fiind dată conexiunea proiectivă Π^i_{jk}, $(i,j,k=1,2,3)$, a spațiului A_3, care satisface ecuațiile (34), (34′), transformarea punctuală dintre spațiile A_3 și E_3 este dată de formulele

$$u^1=\frac{v^1}{v^0},\quad u^2=\frac{v^2}{v^0},\quad u^3=\frac{v^3}{v^0},$$

unde v^α, $(\alpha=0,1,2,3)$, sînt integralele independente ale sistemului

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^j\,\partial x^k}+\Pi^s_{jk}\frac{\partial v}{\partial x^s}-\frac{M_{jk}}{2}v=0,\quad (x^1=x,\ x^2=y,\ x^2=z). \tag{64}$$

În cazul conexiunii [I], sistemul (64) devine

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0,\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-2\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=3v,
\end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v=\mathrm{e}^{-y}\left[a_1 x+a_2\,\mathrm{e}^{4y}+a_3(y+4z)+a_4\right].$$

Deci transformarea punctuală este

$$\left.\begin{aligned}
u^1&=x,\\
u^2&=\mathrm{e}^{4y},\\
u^3&=y+4z,
\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

spațiul A_3 nefiind echivalent în mare cu spațiul E_3.

[1]) p. 491.

În cazul conexiunii [II], sistemul (64) se scrie

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v = a_1 x + a_2 (\varepsilon x^2 + 2xy - 2xz - 2z) + a_3 (y - z) + a_4 .$$

Deci transformarea punctuală este transformarea cremoniană întreagă

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= x, \\ u^2 &= \varepsilon x^2 + 2xy - 2xz - 2z, \\ u^3 &= y - z, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

spațiul A_3 fiind echivalent în mare cu spațiul E_3.

Pentru conexiunea [III], sistemul (64) devine

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} - 3\frac{\partial v}{\partial z} = 3v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} - 2\frac{\partial v}{\partial z} = 3v, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 3v, \end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v = \mathrm{e}^{-y-z}\,[a_1 x + a_2 y + a_3\,\mathrm{e}^{4(y+z)} + a_4] .$$

Deci transformarea punctuală este

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= x, \\ u^2 &= y, \\ u^3 &= \mathrm{e}^{4(y+z)}, \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

și spațiul A_3 nu este echivalent în mare cu spațiul E_3.

În cazul conexiunii [IV], sistemul (64) devine

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}=0\,, \end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v=a_1\left(x-\frac{y^2}{2}\right)+a_2 y+a_3\left(\varepsilon xz-\frac{\varepsilon}{6}y^3-\frac{1}{2}y^2+z\right)+a_4.$$

Deci transformarea punctuală este

$$\left.\begin{aligned} u^1&=x-\frac{y^2}{2}\,,\\ u^2&=y\,,\\ u^3&=\varepsilon y\left(x-\frac{y^2}{6}\right)-\frac{y^2}{2}+z\,, \end{aligned}\right\}\tag{68}$$

spațiul A_3 fiind evchivalent în mare cu spațiul E_3.

Considerînd conexiunea [V], sistemul (64) se scrie

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}-4\frac{\partial v}{\partial y}+2\frac{\partial v}{\partial z}=0\,,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}=-v,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}=-2v,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-4v\,, \end{aligned}\right\}$$

avînd soluția

$$\begin{aligned} v=a_1&\left[x\cos(y-2z)-\frac{y}{2}\sin(y-2z)+2z\cos(y-2z)+\right.\\ &+a_2\left[x\sin(y-2z)+\frac{y}{2}\cos(y-2z)-2z\cos(y-2z)\right]+\\ &+a_3\sin(y-2z)+a_4\cos(y-2z)\,. \end{aligned}$$

Transformarea punctuală este deci

$$\left.\begin{aligned} u^1&=x-\frac{y}{2}\operatorname{tg}(y-2z)+2z\,,\\ u^2&=x\operatorname{tg}(y-2z)+\frac{y}{2}-2z\,,\\ u^3&=\operatorname{tg}(y-2z)\,. \end{aligned}\right\}\tag{69}$$

spațiul A_3 nefiind echivalent în mare cu E_3.

În cazul conexiunii [VI], sistemul (64) va fi

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}-(4\beta^2+1)\frac{\partial v}{\partial y}+2\beta^2\frac{\partial v}{\partial z}=-\beta^2 v,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=-\beta^2 v,\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-(2\beta^2+1)\frac{\partial x}{\partial y}+\beta\frac{\partial v}{\partial z}=-\beta^2 v,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=-2\beta^2 v,\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}-(4\beta^2+1)\frac{\partial v}{\partial y}+2\beta^2\frac{\partial v}{\partial z}=-2\beta^2 v,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-4\beta^2 v,
\end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v=a_1\left[\left(x-\frac{z}{2\beta^2}\right)\cos\beta(x+y+2z)-\frac{z}{2\beta}\sin\beta(x+y+2z)\right]+$$
$$+a_2\left[\left(x+\frac{z}{2\beta^2}\right)\sin\beta(x+y+2z)-\frac{z}{2\beta}\cos\beta(x+y+2z)\right]+$$
$$+a_3\sin\beta(x+y+2z)+a_4\cos\beta(x+y+2z).$$

Deci transformaea punctuală este

$$\left.\begin{aligned}
u^1&=x-\frac{z}{2\beta^2}-\frac{z}{2\beta}\operatorname{tg}\beta(x+y+2z),\\
u^2&=\left(x+\frac{z}{2\beta^2}\right)\operatorname{tg}\beta(x+y+2z)-\frac{z}{2\beta},\\
u^3&=\operatorname{tg}\beta(x+y+2z),
\end{aligned}\right\}\qquad(70)$$

și spațiul A_3 nu este echivalent în mare cu E_3.

Considerînd conexiunea [VII], obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}=-v,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}=-v,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{\partial v}{\partial x}=-v,
\end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v=a_1[x\cos(y+z)-y\sin(y+z)]+a_2[x\sin(y+z)+$$
$$+y\cos(y+z)]+a^3\sin(y+z)+a_4\cos(y+z).$$

Transformarea punctuală este deci

$$\left.\begin{aligned}
u^1&=x-y\operatorname{tg}(y+z),\\
u^2&=x\operatorname{tg}(y+z)+y,\\
u^3&=\operatorname{tg}(y+z),
\end{aligned}\right\}\qquad(71)$$

și spațiul A_3 nu este echivalent în mare cu E_3.

Dacă considerăm conexiunea [VIII], sistemul (64) devine

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\lambda\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}+\lambda\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v=a_1\left[x-\frac{(y+z)^2}{2}\right]+a_2(y+z)+a_3\left[\frac{\lambda}{6}(y+z)^3-\lambda x(y+z)+y\right]+a_4.$$

Deci transformarea punctuală este

$$\left.\begin{aligned} u^1&=x-\frac{(y+z)^2}{2},\\ u^2&=y+z,\\ u^3&=\lambda(y+z)\left[\frac{(y+z)^2}{6}-x\right]+y,\end{aligned}\right\}\qquad(72)$$

și spațiile A_3 și E_3 sînt echivalente în mare.

Avem deci:

TEOREMA 2. *Transformările punctuale atașate conexiunilor proiective constante care determină o corespondență specială fără puncte de intersecție între spațiile A_3 și E_3, sînt de formele* (65), ..., (72), *echivalența dintre spațiile A_3 și E_3 fiind globală în cazul transformărilor* (66), (68) *și* (72).

Vom determina acum grupurile totale de mișcări ale transformărilor punctuale (65), ..., (72).

Dacă notăm cu $X_h f=\xi_h^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$, $(i=1,2,3)$, operatorii infinitezimali ai unui subgrup proiectiv din spațiu, se știe [2][1]) că acest grup este grup de mișcări al transformării (1) dacă

$$\frac{\partial\Pi_{jk}^i}{\partial x^l}\xi_k^l+\Pi_{sk}^i\frac{\partial\xi_h^s}{\partial x^j}+\Pi_{js}^i\frac{\partial\xi_h^s}{\partial x^k}-\Pi_{jk}^s\frac{\partial\xi_h^i}{\partial x^s}=0,\qquad(73)$$

unde Π_{jk}^i este conexiunea proiectivă asociată transformării punctuale (1).

Avînd în vedere că ξ_h^i sînt transformările infinitezimale ale unui subgrup proiectiv, vom pune

$$\left.\begin{aligned} \xi^1&=a^1+a_1^1x+a_2^1y+a_3^1z+x(a_1x+a_2y+a_3z)\\ \xi^2&=a^2+a_1^2x+a_2^2y+a_3^2z+y(a_1x+a_2y+a_3z)\\ \xi^3&=a^3+a_1^3x+a_2^3y+a_3^3z+z(a_1x+a_2y+a_3z)\end{aligned}\right\}\qquad(74)$$

unde a^i, a_j^i, a_j, $(i,j=1,2,3)$, sînt constante.

[1]) p. 498.

În cazul conexiunii [I], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = a_i^2 = 0,\ a_2^1 = a_3^1,\ a_3^3 = 4\,a_2^3, \qquad (i = 1,2,3),$$

deci avem șapte transformări infinitezimale independente

$$X_i f = p_i,\ (i = 1,2,3),\quad X_4 f = x p_1,\quad X_5 f = (y+z)\,p_1,$$
$$X_6 f = x p_3,\quad X_7 f = (y + 4z)\,p_3,$$

unde am pus $p_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x},\ p_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y},\ p_3 = \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Dintre aceste șapte transformări doar primele șase formează grup.

Deci transformarea punctuală (65) admite ca grup total de mișcări grupul cu șase parametri

$$X_i f = p_i,\ (i = 1,2,3),\ X_4 f = x p_1,\ X_5 f = (y+z)\,p_1,\ X_6 f = x p_3, \quad (75)$$

cu structura

$$(X_i X_j) = 0,\ (i,j = 1,2,3),\ (X_1 X_4) = X_1,\ (X_1 X_6) = X_3,\ (X_2 X_5) = X_1,$$
$$(X_3 X_5) = X_1,\ (X_4 X_5) = -X_5,\ (X_4 X_6) = X_6,\ (X_5 X_6) = X_5 - X_6,$$
$$(X_1 X_5) = (X_2 X_4) = (X_2 X_6) = (X_3 X_4) = (X_3 X_6) = 0.$$

Considerînd conexiunea [II], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = 0,\ (i = 1,2,3),\quad a_2^1 = a_3^1 = 0,\quad a_1^1 = a_2^2 + 2\,a_3^2 - a_3^3,$$

$$a_2^3 = a_2^2 + a_3^2 - a_3^3,\quad a_1^3 = a_1^2 + \frac{\varepsilon}{2}(a_2^2 + 3\,a_3^2 - 2\,a_3^3),$$

deci grupul are șapte transformări infinitezimale independente și anume

$$\left.\begin{aligned} &X_i f = p_i,\ (i = 1,2,3),\ X_4 f = x p_2 + x p_3,\ X_5 f = x p_1 + y p_2 + \\ &\qquad + \left(\frac{\varepsilon}{2}\,x + y\right) p_3, \\ &X_6 f = 2\,x p_1 + z p_2 + \left(\frac{3\varepsilon}{2}\,x + y\right) p_3,\ X_7 f = x p_1 + (\varepsilon x + y - z)\,p_3. \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

Deci transformarea punctuală (66) admite ca grup total de mișcări grupul cu șapte parametri (76) cu structura:

$$(X_i X_j) = 0,\ (X_1 X_4) = X_2 + X_3,\ (X_1 X_5) = X_1 + \frac{\varepsilon}{2} X_3,$$

$$(X_1 X_6) = 2\,X_1 + \frac{3\varepsilon}{2} X_3,$$

$$(X_1 X_7) = X_1 + \varepsilon X_3,\ (X_2 X_5) = X_2 + X_3,\ (X_2 X_6) = X_3,\ (X_2 X_7) = X_3,$$
$$(X_3 X_6) = X_2,\ (X_3 X_7) = -X_3,\ (X_4 X_6) = -X_4,\ (X_5 X_6) =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} X_4 + X_5 - X_6 + X_7,$$
$$(X_6 X_7) = -\varepsilon X_4 - X_5 + X_6 - X_7,\ (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = (X_3 X_5) =$$
$$= (X_4 X_7) = (X_5 X_7) = 0.$$

În cazul conexiunii [III], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = a_i^2 = a_i^3 = 0, \quad (i = 1,2,3), \quad a_2^1 + 3\,a_3^1 = 0,$$

deci grupul are cinci operatori independenți

$$X_i f = p_i\,, \quad (i = 1,2,3), \quad X_4 f = x\,p_1\,, \quad X_5 f = (3\,y - z)\,p_1$$

și ecuațiile finite

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_4\,x + \alpha_5\,(3\,y - z) + \alpha_1\,,\\ y' &= y + \alpha_2\,,\\ z' &= z + \alpha_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Deci transformarea punctuală (67) admite ca grup total de mișcări grupul cu cinci parametri (77).

În cazul conexiunii [IV], sistemul (73), (74) devine

$$a_i = 0, \quad (i = 1,2,3), \quad a_3^2 = a_1^2 = 0, \quad \varepsilon\,a_3^1 = 0, \quad \varepsilon\,a_2^2 = 0, \quad a_1^1 = 2\,a_2^2 - a_3^1,$$

$$a_1^3 = 2\,\varepsilon\,a_2^1 + 2\,a_2^2 - a_3^3\,.$$

Dacă $\varepsilon = 0$ avem opt operatori independenți

$$X_i f = p_i\,, \quad (i = 1,2,3,), \quad X_4 f = 2\,x\,p_1 + y\,p_2 + 2\,x\,p_3\,, \quad X_5 f = (z - x)p_1\,,$$

$$X_6 f = y\,p_1\,, \quad X_7 f = y p_3\,, \quad X_8 f = (z - x)\,p_3\,,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= (\alpha_4^2 - \alpha_5)\,x + \alpha_6\,y + \alpha_5\,z + \alpha_1\\ y' &= \alpha_4\,y + \alpha_2\,,\\ z' &= (\alpha_4^2 - \alpha_8)\,x + \alpha_7\,y + \alpha_8 z + \alpha_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Deci transformarea punctuală (68) admite ca grup total de mișcări grupul maxim [1]) (78).

Considerînd conexiunea [V], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = 0, \ (i = 1,2,3), \ a_2^1 = a_3^1 = a_1^2 = a_3^2 = a_1^3 = a_3^3 = 0, \ a_1^1 = a_2^2 = -2\,a_2^3\,.$$

Avem deci patru transformări infinitezimale independente și anume :

$$X_i f = p_i\,, \quad (i = 1,2,3), \quad X_4 f = 2\,x p_1 + 2\,y p_2 - y p_3,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= (2\,\alpha_4 + 1)\,x + \alpha_1\,,\\ y' &= (2\,\alpha_4 + 1)\,y + \alpha_2\,,\\ z' &= \alpha_4\,y + z + \alpha_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Deci transformarea punctuală (69) admite ca grup total de mișcări grupul cu patru parametri (79).

---

[1]) Transformarea punctuală determinată de o conexiune proiectivă are un grup maxim de mișcări cu $n^2 - n + 2$ parametri [2], p. 505.

În cazul conexiunii [VI], sistemul (73), (74) se scrie

$$a_i = a^i_j = 0, \qquad (i, j = 1,2,3).$$

Avem deci trei operatori infinitezimali independenți

$$X_i f = p_i, \qquad (i = 1,2,3),$$

care determină grupul

$$x' = x + \alpha_1, \quad y' = y + \alpha_2, \quad z' = z + \alpha_3. \tag{80}$$

Deci transformarea punctuală (70) admite ca grup total de mișcări grupul cu trei parametri (80).

În cazul conexiunii [VII], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = 0, \quad (i = 1,2,3), \quad a^1_2 = a^1_3 = a^2_1 = a^3_1 = 0, \quad a^1_1 = 2\,a^2_2,$$

$$a^2_3 = a^3_2 = -\,a^2_2, \quad a^3_3 = a^2_2.$$

Avem deci patru operatori independenți și anume:

$$X_i f = p_i, \quad (i = 1,2,3), \quad X_4 f = 2\,x p_1 + (y - z)(p_2 - p_3),$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= (2\ \alpha_4 + 1)\ x + \alpha_1, \\ y' &= (\alpha_4 + 1)\ y - \alpha_4\ z + \alpha_2, \\ z' &= -\ \alpha_4\ y + (\alpha_4 + 1)\ z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Transformarea punctuală (71) admite deci ca grup total de mișcări grupul cu patru parametri (81).

Considerînd conexiunea [VIII], sistemul (73), (74) devine

$$a_i = 0, \quad (i = 1,2,3), \quad a^1_2 = a^1_3 = a^2_1 = a^3_1 = 0, \quad a^1_1 = a^2_2 + a^3_2,$$

$$a^2_3 = -\,a^2_2 - 2\,a^3_2, \quad a^3_3 = 2\,a^2_2 + 3\,a^3_2.$$

Rezultă că avem cinci operatori infinitezimali independenți:

$$X_i f = p_i, \quad (i = 1,2,3), \quad X_4 f = x p_1 + (y - z) p_2 + 2 z p, \quad X_5 f = x p_1 - 2 z p_2 + (y + 3z) p_3,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= \mathrm{e}^{\alpha_4}\, x + \alpha_1, \\ y' &= \frac{\mathrm{e}^{\alpha_4}[\alpha_5 + (\alpha_4 - \alpha_5)\mathrm{e}^{\alpha_4}]}{\alpha_4}\, y + \frac{\alpha_5\, \mathrm{e}^{\alpha_4}(1 - \mathrm{e}^{\alpha_4})}{\alpha_4}\, z + \alpha_2, \\ z' &= \frac{(\alpha_4 - \alpha_5)\mathrm{e}^{\alpha_4}(1 - \mathrm{e}^{\alpha_4})}{\alpha_4}\, y + \frac{\mathrm{e}^{\alpha_4}(\alpha_5\, \mathrm{e}^{\alpha_4} + \alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_4} z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Deci transformarea punctuală (72) admite ca grup total de mișcări grupul cu cinci parametri (82).

Avem deci:

TEOREMA 3. *Transformările punctuale* (65), ..., (72) *care determină corespondențe speciale fără puncte de intersecție între spațiile* A_3 *și* E_3, *au ca grupuri totale de mișcări grupurile* (75), ..., (82).

О СПЕЦИАЛЬНЫХ СООТВЕТСТВИЯХ МЕЖДУ ПРОЕКТИВНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ. I

РЕЗЮМЕ

Пусть заданы два аффинных пространства между которыми установлено соответствие (1). Характеристические направления соответствия (1) являются решениями системы (2).

В одной из предыдущих работ [1] мы назвали *соответствие между пространствами* A_3 *и* E_3 *специальным, если кривые* (2) *в переменных* y' *и* z' *обладают общими кривыми.*

Если кривые (2) *распадаются соответственно на кривые* C, C_1 *и* C, C_2, *то специальным соответствием без точек пересечения называется такое соответствие между пространствами* A_3 и E_3, *при котором кривые* C, C_1 *и* C_2 *попарно не пересекаются; специальным соответствием с неизолированными общими точками — такое соответствие при котором кривые* C_1 *и* C_2 *— пересекают кривую* C *но не пересекаются вне ее и, наконец, специальным соответствием с изолированными общими точками, — соответствие при котором кривые* C_1 *и* C_2 *пересекаются вне кривой* C, *причем они могут пересекать или нет кривую* C.

В первой части работы устанавливаются случаи, в которых осуществляются определенные выше три типа специальных соответствий.

Во второй части получены постоянные проективные связности пространств A_3, в случае специального соответствия без точек пересечения, и сопоставляемые этим связностям точечные преобразования и их группы движений.

Получаются следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Проективно постоянный тензор* Π^i_{jk}, *определяющий специальное соответствие без общих точек между пространствами* A_3 *и* E_3, *приводится при помощи замены переменных к одному из следующих видов:*

$$[\mathrm{I}] \quad \Pi^1_{12} = \Pi^3_{32} = \Pi^3_{22} = 1, \quad \Pi^2_{22} = -2;$$

$$[\mathrm{II}] \quad \Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = \Pi^3_{12} = -\Pi^2_{13} = 1, \ \Pi^2_{11} = \Pi^3_{11} = \varepsilon \quad (\varepsilon = 0,1);$$

$$[\mathrm{III}] \quad \Pi^1_{12} = \Pi^2_{22} = \Pi^1_{13} = -\Pi^3_{33} = -\Pi^2_{33} = 1, \ \Pi^3_{32} = -2,$$
$$\Pi^3_{22} = -3;$$

[IV] $\Pi^1_{22} = \Pi^3_{22} = 1, \quad \Pi^3_{12} = \varepsilon;$

[V] $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^3_{12} = 1, \quad \Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = -2, \quad \Pi^2_{13} = -4;$

[VI] $\Pi^1_{11} = \Pi^1_{12} = \Pi^1_{13} = \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = -\Pi^2_{22} = -\Pi^2_{23} = 1,$

$\Pi^3_{33} = -2, \quad \Pi^3_{12} = \beta^2, \quad \Pi^3_{11} = \Pi^3_{31} = 2\beta^2, \quad \Pi^2_{21} = -(2\beta^2+1),$

$\Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = -(4\beta^2 + 1) \quad (\beta \neq 0);$

[VII] $\Pi^1_{22} = -\Pi^1_{33} = -\Pi^2_{13} = \Pi^3_{12} = -\Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = 1;$

[VIII] $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = 1, \quad \Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = \Pi^2_{13} = -\Pi^3_{12} = \lambda$

$(\lambda = \pm 1),$

причем невыписанные компоненты равны нулю.

ТЕОРЕМА 2. *Точечные преобразования, сопоставляемые постоянным проективным связностям, определяющие специальное соответствие без точек пересечения между пространствами A_3 и E_3, имеют вид* (65) ... (72), *причем эквивалентность между пространствами A_3 и E_3 является эквивалентностью в целом в случае преобразований* (66), (68) *и* (72).

ТЕОРЕМА 3. *Точечные преобразования* (65), ..., (72), *определяющие специальные соответствия без точек пересечения между пространствами A_3 и E_3, обладают в качестве полных групп движений группами* (75), ..., (82).

SUR LES CORRESPONDANCES SPÉCIALES ENTRE DES ESPACES PROJECTIFS. I

RÉSUMÉ

Soient deux espaces affines $A_3(x, y, z)$ et $E_3(u^1, u^2, u^3)$ entre lesquels est définie la correspondance (1). Les directions caractéristiques de la correspondance (1) sont les solutions du système (2).

Antérieurement [1], *l'auteur a appelé correspondance spéciale la correspondance entre les espaces A_3 et E_3, si les courbes* (2), *ayant y' et z' comme variables, ont des courbes communes.*

Si les courbes (2) *se décomposent en courbes C, C_1, respectivement C, C_2, l'auteur appelle correspondance spéciale sans points d'intersection la correspondance entre les espaces A_3 et E_3 pour lesquels les courbes C, C_1 et C_2, prises deux à deux, n'ont pas des points d'intersection. Correspondance spéciale à points communs non isolés, la correspondance pour laquelle les courbes C_1 et C_2 coupent la courbe C, mais non pas à l'extérieur de cette courbe. Et correspondance spéciale à points communs isolés, la correspondance pour laquelle les courbes C_1 et C_2 se coupent à l'extérieur de la courbe C, ces courbes pouvant rencontrer ou non la courbe C.*

Dans la première partie de son travail, l'auteur détermine les cas pour lesquels sont réalisés les trois types de correspondances spéciales définies ci-dessus.

Dans la seconde partie, il obtient les connexions projectives et constantes des espaces A_3, dans le cas de la correspondance spéciale sans points d'intersection, les transformations ponctuelles attachées à ces connexions et leurs groupes de mouvement.

Il obtient ainsi les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. *Le tenseur projectif constant* Π^i_{jk}, *qui détermine une correspondance spéciale sans points d'intersection entre les espaces* A_3 *et* E_3, *peut être ramené, par des changements de variables, à l'une des formes :*

[I] $\Pi^1_{12} = \Pi^3_{32} = \Pi^3_{22} = 1, \quad \Pi^2_{22} = -2;$

[II] $\Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = \Pi^3_{12} = -\Pi^2_{13} = 1, \quad \Pi^2_{11} = \Pi^3_{11} = \varepsilon \ (\varepsilon = 0, 1);$

[III] $\Pi^1_{12} = \Pi^2_{22} = \Pi^1_{13} = -\Pi^3_{33} = -\Pi^2_{33} = 1, \quad \Pi^3_{32} = -2,$
$\Pi^3_{22} = -3;$

[IV] $\Pi^1_{22} = \Pi^3_{22} = 1, \quad \Pi^3_{12} = \varepsilon;$

[V] $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^3_{12} = 1, \quad \Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = -2, \quad \Pi^2_{13} = -4;$

[VI] $\Pi^1_{11} = \Pi^1_{12} = \Pi^1_{13} = \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = -\Pi^2_{22} = -\Pi^2_{23} = 1,$
$\Pi^3_{33} = -2, \quad \Pi^3_{12} = \beta^2, \quad \Pi^3_{11} = \Pi^3_{31} = 2\beta^2, \quad \Pi^2_{21} = -(2\beta^2+1),$
$\Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = -(4\beta^2 + 1) \ (\beta \neq 0);$

[VII] $\Pi^1_{22} = -\Pi^1_{33} = -\Pi^2_{13} = \Pi^3_{12} = -\Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = 1;$

[VIII] $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = 1, \quad \Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = \Pi^2_{13} = -\Pi^3_{12} = \lambda$
$(\lambda = \pm 1);$

les composantes non écrites étant nulles.

THÉORÈME 2. *Les transformations ponctuelles attachées aux connexions projectives constantes, qui déterminent une correspondance spéciale sans points d'intersection entre les espaces* A_3 *et* E_3, *revêtent les formes* (*65*), ..., (*72*), *l'équivalence entre les espaces* A_3 *et* E_3 *étant globale dans le cas des transformations* (*66*), (*68*) *et* (*72*).

THÉORÈME 3. *Les transformations ponctuelles* (*65*), ..., (*72*), *qui déterminent des correspondances spéciales sans points d'intersection entre les espaces* A_3 *et* E_3, *ont comme groupes de mouvements totaux les groupes* (*75*), ..., (*82*).

BIBLIOGRAFIE

1. M. STOKA și G.G. VRĂNCEANU, *Corespondențe între două spații proiective cu caracteristicile confundate.* Studii și cercetări matematice, **X**, *1* (1958).
2. G. VRĂNCEANU, *Sul tensore associato ad una corrispondenza fra spazi proiettivi.* Bol. Un. Mat. Ital., **12**, 4 (1957).

ASUPRA COMPORTĂRII SOLUȚIILOR SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE CU PARAMETRU MIC PE LÎNGĂ DERIVATE

DE

HORIA BANEA

În această lucrare se studiază sistemele de ecuații diferențiale de forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \quad \mu \frac{dy}{dt} = F(x, y, t),$$

unde $\mu > 0$ este un parametru mic.

Deoarece membrul drept al ecuațiilor precedente depinde discontinuu de parametrul μ, acestor sisteme nu li se poate aplica teorema clasică de dependență continuă a soluțiilor față de parametru și nici metodele cunoscute de studiu pentru diferite proprietăți ale soluțiilor ca periodicitatea, comportarea asimptotică ș.a.

În cele ce urmează se studiază problema: în ce condiții stabilitatea asimptotică uniformă a soluției banale a sistemului degenerat — obținut pentru $\mu = 0$ — atrage stabilitatea asimptotică uniformă a soluției banale a sistemului inițial.

Se studiază diferite cazuri de sisteme de ecuații diferențiale cu parametru mic pe lîngă derivate. Lucrarea are două părți deosebite între ele după metoda de demonstrație utilizată. În prima parte demonstrațiile se bazează pe metoda a doua a lui Liapunov. În partea a doua, care tratează despre sistemele de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți, se utilizează noțiuni de algebră liniară, cele mai naturale pentru aceste sisteme. În lucrarea [1] rădăcinile ecuației caracteristice au fost evaluate în alte scopuri, cu altă metodă decît cea întrebuințată aici iar A. Halanay utilizînd această metodă a obținut ultimul rezultat (nepublicat) al lucrării de față.

Înrudită cu cele prezentate aici este lucrarea [2]; în ea se studiază comportarea asimptotică a soluției banale a unui sistem liniar de

ecuații diferențiale cu coeficienți variabili, cu parametrul μ atașat numai derivatei ultimei ecuații.

În general noțiunile utilizate aici sînt asemănătoare cu cele din lucrarea [3] a lui N. A. Tihonov. Ulterior același autor și alții au modificat unele din definiții, făcîndu-le mai generale.

★

I. Să considerăm sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x_1, \ldots, x_n, y, t), \\ \mu \frac{dy}{dt} &= F(x_1, \ldots, x_n, y, t), \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (1)$$

Presupunem că funcțiile f_i sînt definite în domeniul $D: |x_i| \leqslant a_i$, $|y| \leqslant b$, $t \geqslant t_0$ în care sînt continue în raport cu ansamblul variabilelor, mărginite în raport cu t, diferențiabile, cu derivate parțiale în raport cu x_i și y continue în raport cu ansamblul variabilelor și mărginite în raport cu t. Funcția F este definită în același domeniu, continuă în raport cu ansamblul variabilelor, mărginită în raport cu t; $\frac{\partial F}{\partial y}$ există, este continuă în raport cu y, uniform față de t; μ este un parametru mic pozitiv.

Sistemului (1) i se atașează „sistemul degenerat" obținut pentru $\mu = 0$:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n, t), t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2)$$

în care $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n, t)$ este rădăcina ecuației $F(x_1, \ldots, x_n, y, t) = 0$.

TEOREMA 1. *Dacă $y = 0$ este o rădăcină a ecuației*

$$F(x_1, \ldots, x_n, y, t) = 0$$

definită în D, care satisface la condiția

$$\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n, 0, t)}{\partial y} < -k^2$$

în domeniul $|x_i| \leqslant a_i$, $t \geqslant t_0$ [1]) *și sistemul degenerat admite soluția banală ca soluție asimptotic stabilă uniform în raport cu condițiile inițiale, atunci și sistemul inițial (1) pentru μ suficient de mic admite soluția banală ca soluție asimptotic stabilă uniform în raport cu condițiile inițiale.*

Demonstrația se face construind o funcție Liapunov.

Fie sistemul degenerat

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, 0, t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (3)$$

[1]) Condiția pusă asigură faptul că rădăcina $y = 0$ este stabilă în sensul lui Tihonov [3].

Din faptul că admite soluția banală ca soluție asimptotic stabilă uniform în raport cu condițiile inițiale, rezultă după o teoremă a lui Malkin că există o funcție Leapunov $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ pozitiv definită cu limita superioară infinit mică, cu derivate parțiale în raport cu x_i mărginite, și cu derivata (în virtutea sistemului (3)) negativ definită, adică :

$$\frac{\partial V(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n, 0, t) \leqslant$$

$$\leqslant - V_1(x_1, \ldots, x_n),$$

$V_1(x_1, \ldots, x_n)$ fiind o funcție pozitiv definită.

Vom alege pentru sistemul (1) funcția Leapunov $W(x_1, \ldots, x_n, y, t) = V(x_1, \ldots, x_n, t) + |y|$ care este evident pozitiv definită. Se vede ușor că are limita superioară infinit mică. Într-adevăr, fiind dat $\frac{\lambda}{2}$ se poate găsi ρ astfel ca $V(x_1, \ldots, x_n, t) \leqslant \frac{\lambda}{2}$ pentru $t \geqslant t_0$ și $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \rho^2$, iar $|y| \leqslant \frac{\lambda}{2}$ dacă $y^2 \leqslant \frac{\lambda^2}{4}$; dacă luăm $\rho_1 = \inf\left(\rho, \frac{\lambda}{2}\right)$ vom avea $W(x_1, \ldots, x_n, y, t) < \lambda$ dacă $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + y^2 \leqslant \rho_1^2$ și $t \geqslant t_0$.

Vom arăta că derivata funcției $W(x_1, \ldots, x_n, y, t)$ în virtutea sistemului (1) este negativ definită. Relativ la forma funcției W, să observăm că ea nu este derivabilă în raport cu y pentru $y = 0$.

Acest lucru nu infirmă rezultatul, deoarece în teorema de stabilitate asimptotică a lui Leapunov pe care o folosim, se întrebuințează de fapt derivata $\frac{d\overline{W}(t)}{dt}$, înțelegînd prin $\overline{W}(t)$ rezultatul înlocuirii soluției $x_1(t), \ldots, x_n(t), y(t)$ în funcția $W(x_1, \ldots, x_n, y, t)$. Funcția $\overline{W}(t)$ este derivabilă chiar în acele puncte t^* pentru care $y(t^*) = 0$. Într-adevăr :

$$\lim_{t \to t^*} \frac{|y(t)| - |y(t^*)|}{t - t^*} = \lim_{t \to t^*} \frac{|y(t)|}{t - t^*}$$

și folosind ultima ecuație a sistemului (1):

$$\mu \frac{dy}{dt} = F(x_1, \ldots, x_n, y, t),$$

în care membrul drept se anulează pentru $y = 0$, putem scrie

$$0 = - \lim_{t \to t^*} \left| \frac{y(t)}{t - t^*} \right| \leqslant \lim_{t \to t^*} \frac{|y(t)|}{t - t^*} \leqslant \lim_{t \to t^*} \left| \frac{y(t)}{t - t^*} \right| = 0. \qquad \text{c.c.t.d.}$$

Ținînd seamă de acestea, găsim

$$\frac{d\overline{W}(t)}{dt} = \frac{\partial V(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n, y, t) +$$

$$+ \frac{1}{\mu} \cdot \operatorname{sgn} y \cdot F(x_1, \ldots, x_n, y, t),$$

unde

$$\operatorname{sgn} y = \begin{cases} +1 & \text{dacă } y > 0 \\ 0 & \text{dacă } y = 0 \\ -1 & \text{dacă } y < 0 \end{cases}$$

sau

$$\frac{\partial V(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_i} [f_i(x_1, \ldots, x_n, y, t) -$$

$$- f_i(x_1, \ldots, x_n, 0, t)] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n, 0, t) +$$

$$+ \frac{1}{\mu} \operatorname{sgn} y \cdot y \cdot \frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n, \theta y, t)}{\partial y}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \quad (4)$$

Pentru y suficient de mic, $\dfrac{\partial F(x_1, \ldots, x_n, \theta y, t)}{\partial y}$ rămîne, din cauza continuității, negativă, deci:

$$\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n, \theta y, t)}{\partial y} \leqslant -m^2 \ ^{1})$$

Să punem

$$\sup_i \max_D \left| \frac{\partial V(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_i} \right| = M.$$

Să notăm cea mai mare dintre constantele Lipschitz ale funcțiilor f_i în raport cu y, prin L. Să observăm că ipotezele asigură existența acestor constante nedepinzînd de t.

Din relația (4) găsim

$$\frac{d\overline{W}(t)}{dt} \leqslant \frac{\partial V(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n, 0, t) +$$

$$+ nLM|y| - \frac{m^2}{\mu}|y|.$$

---

1) În toate evaluările pe care le vom face, vom considera variabilele cuprinse într-un același domeniu (intersecția domeniilor în care sînt satisfăcute toate condițiile de existență, continuitate etc.).

Prima parte a expresiei este negativ definită datorită ipotezei făcute asupra sistemului degenerat, iar ultimii doi termeni reprezintă o cantitate negativă dacă $\mu < \frac{m^2}{nLM}$.

După o cunoscută teoremă, soluția banală a sistemului (1) este asimptotic stabilă uniform în raport cu condițiile inițiale.

Teorema demonstrată admite unele extinderi la sisteme mai generale decît sistemul (1). Demonstrațiile fiind analoge, nu vom mai da toate detaliile. Condițiile de regularitate ale funcțiilor din membrii drepți ai ecuațiilor sînt analoge celor din prima teoremă și nu le vom mai menționa explicit pentru fiecare caz.

Să considerăm sistemul

$$\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}, t), \qquad (i=1, 2, \ldots, n_1) \\ &\mu\frac{dy_j}{dt} = F_j(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_j, t), \qquad (j=1, 2, \ldots, n_2), \end{aligned} \tag{5}$$

unde admitem că $F_j(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_j, t) = 0$ are rădăcina $y_j = 0$ satisfăcînd la relația

$$\frac{\partial F_j(x_1, \ldots, x_{n_1}, 0, t)}{\partial y_j} \leqslant -k_j^2\ ^{1}), \quad (j = 1, 2, \ldots, n_2).$$

Să alegem pentru sistemul (5) funcția Liapunov

$$W(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}, t) = V(x_1, \ldots, x_{n_1}, t) + \sum_{j=1}^{n_2} |y_j|,$$

unde funcția $V(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots y_{n_2}, t)$ este funcția Liapunov a sistemului degenerat

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_{n_1}, 0, \ldots, 0, t)$$

existentă în virtutea ipotezei că acest sistem admite soluția banală ca soluție asimptotic stabilă uniform în raport cu condițiile inițiale.

---

[1]) Condiția de stabilitate cerută de T i h o n o v în [3] este

$$\sum_{j=1}^{n_2} y_j \cdot F_j < 0$$

care în cazul diferențiabilității funcțiilor duce la condiția din text.

Calculînd derivata funcției $\overline{W}(t)$ vom găsi

$$\frac{d\overline{W}(t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial V}{\partial x_i} [f_i(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}, t) -$$

$$- f_i(x_1, \ldots, x_{n_1}, 0, \ldots, 0, t)] + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_{n_1}, 0, \ldots, 0, t) +$$

$$+ \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{n_2} \operatorname{sgn} y_j \cdot y_j \frac{\partial F_j}{\partial y_j},$$

derivatele $\frac{\partial F_j}{\partial y_j}$ fiind calculate în punctul $\theta_j y_j$.

Cu notații analoge cu cele precedente găsim

$$\frac{d\overline{W}(t)}{dt} \leqslant \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_{n_1}, 0, \ldots, 0, t) + n_1 ML \sum_{j=1}^{n_2} |y_j| -$$

$$- \frac{m^2}{\mu} \sum_{j=1}^{n_2} |y_j|$$

care pentru $\mu < \frac{m^2}{n_1 ML}$ este negativ definită.

Rezultatul precedent poate fi extins la sisteme de forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}, t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_1) \\ \mu \frac{dy_j}{dt} &= F_j(x_1, \ldots x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}, t), \qquad (j = 1, 2, \ldots, n_2), \end{aligned} \tag{6}$$

unde presupunem că $y_1 = y_2 = \ldots = y_{n_2} = 0$ reprezintă soluția sistemului

$$F_j(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}, t) = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n_2),$$

care satisface la condițiile

$$\frac{\partial F_j(x_1, \ldots, x_{n_1}, 0, \ldots, 0, t)}{\partial y_j} \leqslant - k_j^2 .$$

Vom presupune îndeplinită încă o condiție al cărui rost îl vom lămuri în cele ce urmează. Dacă notăm

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j} = a_{ij},$$

condiția de stabilitate pentru cazul precedent (dată în nota de la p. 241) revine la cerința ca forma pătratică $\sum_{i,j}^{1, n_2} a_{ij} y_i y_j$ cu coeficienți variabili

să fie negativ definită. În cazul de față în evaluările făcute asupra funcției $\frac{d\overline{W}(t)}{dt}$ va trebui să deducem că expresia

$$\operatorname{sgn} y_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots) + \operatorname{sgn} y_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots) + \ldots$$

este negativ definită. O condiție suficientă pentru ca acest lucru să fie îndeplinit este :

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n_2} a_{ij}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n_2),$$

ceea ce vom presupune îndeplinit pentru orice punct al domeniului considerat.

Teorema poate fi extinsă la sisteme de forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x_1, \ldots, x_n, y, z, t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ (\mu + \nu)\frac{dy}{dt} &= F(x_1, \ldots, x_n, y, z, t), \\ \mu\frac{dz}{dt} &= G(x_1, \ldots, x_n, y, z, t), \end{aligned} \tag{7}$$

pentru care presupunem că degenerează în două etape, întîi pentru $\mu = 0$ și apoi pentru $\nu = 0$.

Admitem că $G(x_1, \ldots, x_n, y, z, t) = 0$ admite rădăcina $z = 0$ care satisface relația $\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} \leqslant -k_1^2$ iar $F(x_1, \ldots, x_n, y, z, t) = 0$ are rădăcina $y = 0$ care satisface relația $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0} \leqslant -k_2^2$.

Sistemul degenerat

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, t)$$

admite soluția banală ca soluție asimptotic stabilă uniform în raport cu condițiile inițiale. Să considerăm atunci pentru sistemul inițial (7) funcția Leapunov

$$W(x_1, \ldots, x_n, y, z, t) = V(x_1, \ldots, x_n, t) + |y| + |z|,$$

unde $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ este funcția Leapunov a sistemului degenerat.

Calculînd derivata în virtutea sistemului (7) găsim

$$\frac{d\overline{W}(t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x_1, \ldots, x_n, y, z, t) + \frac{1}{\mu + \nu}\operatorname{sgn} y\, F(x_1, \ldots, x_n, y, z, t) + \frac{1}{\mu}\operatorname{sgn} z\, G(x_1, \ldots, x_n, y, z, t)$$

sau

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}[f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y,\ z,\ t)-f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ 0,\ 0,\ t)]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x_1,\ldots,x_n,0,0,t)+\frac{1}{\mu+\nu}\operatorname{sgn} y\ [F(x_1,\ \ldots,\ x_n,y,z,t)-$$

$$-F(x_1,\ \ldots,\ x_n,y,0,t)]+\frac{1}{\mu+\nu}\operatorname{sgn} y\,F(x_1,\ \ldots,\ x_n,y,0,t)+$$

$$+\frac{1}{\mu}\operatorname{sgn} z\,G(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y,\ z,\ t).$$

De aici

$$\frac{\mathrm{d}\overline{W}(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y,\ 0,\ 0,\ t)+nML(|y|+|z|)+$$

$$+\frac{\mathcal{L}}{\mu+\nu}|z|-\frac{m_1^2}{\mu+\nu}|y|-\frac{m_2^2}{\mu}|z|,$$

unde am notat: $M=\sup\limits_{i}\max\left|\dfrac{\partial V}{\partial x_i}\right|$; L cea mai mare dintre constantele Lipschitz ale funcțiilor f_i în raport cu y și z; $\mathcal{L}$ constanta Lipschitz a funcției F în raport cu z iar $m_1^2=\min\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|$ și $m_2^2=\min\left|\dfrac{\partial G}{\partial z}\right|$. Toate evaluările s-au făcut într-un domeniu D: $|x_i|\leqslant a_i$, $i=1,2,\ \ldots,\ n$, $|y|\leqslant b_1$, $|z|\leqslant b_2$, $t\geqslant t_0$.

Dacă alegem $\mu+\nu<\dfrac{m_1^2}{nLM}$ și apoi $\mu<\dfrac{m_2^2}{nML+\dfrac{\mathcal{L}}{\mu+\nu}}$, $\dfrac{\mathrm{d}\overline{W}(t)}{\mathrm{d}t}$ rezultă negativ definită.

Fie sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y,\ t),\qquad (i=1,2,\ \ldots,\ n),$$
$$\mu(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=F(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y,\ t), \tag{8}$$

unde $\mu(t)$ este o funcție continuă pozitivă care satisface relația

$$\lim_{t\to\infty}\mu(t)=0$$

Teorema rămîne valabilă cu mențiunea că t_0 este fixat prin cerința ca pentru $t\geqslant t_0$ să avem $\mu(t)\leqslant\dfrac{m^2}{nLM}$.

Teorema demonstrată are următoarea completare.

TEOREMA 2. *Dacă soluția banală a sistemului degenerat este uniform asimptotic stabilă în mare, atunci toate soluțiile sistemului inițial cu condiții inițiale în regiunea de influență*[1]) *a rădăcinii* $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n, t)$, *stabilă în sensul lui Tihonov, tind către soluția banală.*

Rezultatul se obține din combinarea unei teoreme a lui Tihonov[2]) cu teorema 1.

Ca să precizăm, fie $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$ punctul inițial al unei soluții a sistemului dat și $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (ultima componentă a soluției sistemului degenerat o considerăm $y = 0$), punctul inițial al soluției corespunzătoare a sistemului degenerat.

Să notăm prin D: $|x_i| \leqslant a_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $|y| \leqslant b$, $t \geqslant t_0$, domeniul în care există funcția $W(x_1, \ldots, x_n, t)$ pozitiv definită iar $\dfrac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}$ este negativ definită.

Fiind dat punctul $(t_0\, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ și $\varepsilon < \min\left(\dfrac{a_1}{2}, \ldots, \dfrac{a_2}{2}, b\right)$ putem găsi T astfel încît soluția sistemului degenerat, pe care să o notăm prin $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, să fie la o distanță mai mică decît ε de origine, dacă $t \geqslant t_0 + T$.

De asemenea fiind dat $\varepsilon > 0$, există μ_0 astfel încît pentru $\mu \leqslant \mu_0$ soluția sistemului inițial, pe care să o notăm prin $x_1(t, \mu), \ldots, x_n(t, \mu)$, $y(t, \mu)$, să satisfacă relațiile

$$|x_i(t, \mu) - x_i(t)| < \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad |y(t, \mu)| < \varepsilon$$

pentru $t \geqslant t_0 + T$ în particular la un moment dat $t_1 \geqslant t_0 + T$. Considerînd pe t_1 ca moment inițial, deducem că $|x_1(t_1, \mu)| \leqslant a_1, |y(t_1, \mu)| \leqslant b$ dar toate soluțiile cu aceste condiții inițiale tind către zero în virtutea teoremei 1.

TEOREMA 3. *Să considerăm sistemul*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= f(x, y) \\ \mu \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= F(x, y) \end{aligned} \tag{9}$$

pentru care presupunem că funcția f *este continuă în raport cu ansamblul variabilelor, lipschiziană în* y, *iar* F *este de clasă* C^1.

Dacă $F(x, y) = 0$ are rădăcina $y = \varphi(x)$ definită pentru $|x| \leqslant a$ cu proprietatea $\varphi(0) = 0$ și $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=\varphi(x)} \leqslant -k^2$, iar sistemul degenerat, care se

---

[1]) Vezi lucrarea [3].

[2]) Tihonov a demonstrat că soluțiile sistemului inițial cu condiții inițiale într-o anumită vecinătate a suprafeței $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n, t)$, numită regiune de influență, tind către soluțiile corespunzătoare ale sistemului degenerat pentru $t_0 < t < t_1$, $\mu < \mu_0$ dacă soluția $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n, t)$ este stabilă în sensul menționat.

reduce aici la o singură ecuație $\frac{dx}{dt} = f(x, \varphi(x))$, admite soluția banală ca soluție asimptotic stabilă, atunci și soluția banală a sistemului inițial (9) este asimptotic stabilă.

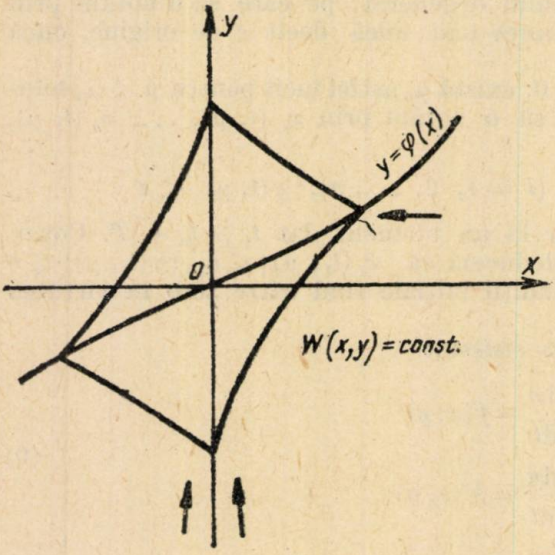
Din faptul că $x = 0$ este o soluție asimptotic stabilă pentru ecuația

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \varphi(x)),$$

rezultă că această ecuație admite o funcție Leapunov de forma $c^2|x|$. (Aceasta, pentru că dacă $x > 0$, avem $\frac{dx}{dt} < 0$ și invers). Alegem pentru sistemul (9) funcția

$$W(x, y) = c^2 |x| + |y - \varphi(x)|.$$

Vom calcula derivata $\frac{d\overline{W}(t)}{dt}$ în punctele în care există. $\overline{W}(t)$ nu este derivabilă în punctele în care $x(t) = 0$ sau $y(t) = \varphi(x(t))$. Vom face apel la demonstrația geometrică a teoremei de stabilitate a lui Leapunov. $W(x, y) = \text{const.}$ reprezintă o familie de curbe închise care se strîng spre origine, o dată cu descreșterea constantei. Din faptul că derivata $\frac{d\overline{W}(t)}{dt}$ e negativă în punctele în care există, deducem că curbele integrale taie curbele $W(x, y) = \text{const.}$, înspre interior (vezi figura). Este ușor de văzut că, în punctele în care $y = \varphi(x)$, avem $\frac{dy}{dx} = 0$, iar în punctele $x = 0$, factorul $\frac{1}{\mu}$ îndreaptă direcția cîmpului aproape de verticală.



Calculînd pe $\frac{d\overline{W}(t)}{dt}$ găsim

$$c^2 \operatorname{sgn} x f(x,y) + \operatorname{sgn}(y-\varphi(x))\frac{1}{\mu}F(x, y) - \operatorname{sgn}(y-\varphi(x))\frac{d\varphi}{dx}f(x,y). \quad (10)$$

Observăm că spre deosebire de cazurile precedente, aici

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x > 0, \\ -1 \text{ dacă } x < 0, \end{cases} \qquad \operatorname{sgn}(y - \varphi(x)) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } y > \varphi(x), \\ -1 \text{ dacă } y < \varphi(x), \end{cases}$$

pentru $x = 0$ sau $y = \varphi(x)$ expresia (10) neavînd sens.

Din (10) deducem

$$\frac{d\overline{W}(t)}{dt} = c^2 \operatorname{sgn} x\,[f(x, y) - f(x, \varphi(x))] + c^2 \operatorname{sgn} x f(x, \varphi(x)) +$$

$$+ \frac{1}{\mu} \operatorname{sgn}(y - \varphi(x))\, F(x, y) + \frac{\overline{\frac{\partial F}{\partial x}}}{\overline{\frac{\partial F}{\partial y}}} \operatorname{sgn}(y - \varphi(x))\,[f(x, y) - f(x, \varphi(x))] +$$

$$+ \frac{\overline{\frac{\partial F}{\partial x}}}{\overline{\frac{\partial F}{\partial y}}} \operatorname{sgn}(y - \varphi(x))\, f(x, \varphi(x)).$$

Să notăm prin L constanta Lipschitz a funcției f în raport cu y. Putem lua

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \leqslant -m^2$$

în D. Să punem

$$\max_D \left| \frac{\overline{\frac{\partial F}{\partial x}}}{\overline{\frac{\partial F}{\partial y}}} \right| = M.$$

Găsim atunci pentru $\frac{d\overline{W}(t)}{dt}$ evaluarea

$$\frac{d\overline{W}(t)}{dt} \leqslant c^2 L\,|y - \varphi(x)| + c^2 \operatorname{sgn} x f(x, \varphi(x)) - \frac{m^2}{\mu}|y - \varphi(x)| +$$

$$+ ML\,|y - \varphi(x)| + M\,|f(x, \varphi(x))| = (-c^2 + M)\,|f(x, \varphi(x))| +$$

$$+ \left(c^2 L + ML - \frac{m^2}{\mu}\right)|y - \varphi(x)|.$$

Alegem $c^2 > M$ și apoi $\mu < \frac{m^2}{L(c^2 + M)}$ ceea ce asigură faptul că $\frac{d\overline{W}(t)}{dt}$ este negativ definită.

Sînt posibile extinderi analoge cu cele ale teoremei 1. De asemenea este posibilă o completare de forma teoremei 2.

Aplicație. Să studiem comportarea soluțiilor unei ecuații propuse de R. B e l l m a n în [4].

Fie ecuația

$$\mu(t)\, y'' + y' + y = 0. \tag{11}$$

Punînd $x = y'$, vom găsi

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= x, \\ \mu(t)\frac{dx}{dt} &= -x - y. \end{aligned} \tag{11'}$$

Ecuația $-x - y = 0$ admite rădăcina $x = -y$ care satisface condiția $\frac{\partial(-x-y)}{\partial x} = -1$. Ecuația degenerată corespunzătoare este $\frac{dy}{dt} = -y$ care admite evident soluția banală ca soluție asimptotic stabilă. Rezultă că și soluția banală a sistemului inițial este asimptotic stabilă. Folosind o evaluare dată de M a l k i n, deducem că soluțiile sînt majorate de $Ae^{-\alpha t}$, unde A și α sînt constante pozitive. Putem evalua în acest caz și valoarea maximă a lui μ. Pentru acest sistem vom avea $L = 1$, $m = 1$, $M = 1$, $c^2 = 1 + \eta^2$. Deci $\mu < \frac{1}{2+\eta^2}$, unde η este arbitrar de mic.

Un alt sistem la care se poate aplica teorema 3 se întîlnește în lucrarea [5]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\ln P &= -\frac{\alpha}{\tau}T \\ \varepsilon\frac{dT}{dt} &= P - T - 1 \end{aligned} \tag{12}$$

pentru care se trage concluzia, în lucrarea menționată, că soluția $P = 1$, $T = 0$ este stabilă.

Să aplicăm teorema 3, făcînd schimbarea de variabilă $\ln P = U$ adică $P = e^U$.

Anulînd membrul drept al ultimei ecuații (12), obținem $T = e^U - 1$ și avem

$$\frac{\partial(e^U - T - 1)}{\partial T} = -1.$$

Ecuația degenerată este

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\alpha}{\tau}(e^U - 1)$$

care integrată dă soluția

$$U = -\ln\left(1 - Ce^{-\frac{\alpha}{\tau}t}\right)$$

ceea ce arată că soluția banală $U = 0$ este asimptotic stabilă, deci și soluția $U = 0$, $T = 0$, a sistemului inițial, respectiv $P = 1$, $T = 0$ este stabilă asimtotic.

Un alt sistem la care se pot aplica metode asemănătoare cu cele prezentate aici, pentru stabilirea comportării asimptotice a soluțiilor se întîlnește în lucrarea [6]:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = (1 - \lambda)\, x + \lambda \sin \psi + \beta,$$

$$\gamma \frac{dx}{d\tau} = -x + \sin \psi,$$

unde γ, λ, β sînt parametrii (γ poate fi făcut oricît de mic).

★

II. Să considerăm sistemul de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți [1])

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_j, && (i = 1,2, \ldots, n), \\ \mu \frac{dx_h}{dt} &= \sum_{k=1}^{m} a_{hk}\, x, && (h = n+1, \ldots, m). \end{aligned} \tag{13}$$

Pentru stabilirea comportării asimptotice a soluțiilor, vom evalua ecuația caracteristică atît pentru sistemul inițial cît și pentru cel degenerat.

Forma ecuațiilor caracteristice. Sistemul (13) admite ecuația caracteristică

$$\mu^{\frac{1}{m-n}} \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \ldots & a_{1\,n+1} & \ldots\ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} & \ldots & a_{2\,n+1} & \ldots\ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda & \ldots & a_{n\,n+1} & \ldots\ldots & a_{nm} \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \ldots & a_{n+1\,n} & a_{n+1\,n+1}-\lambda & \ldots & \ldots & a_{n+1\,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \ldots & a_{m\,n+1} & \ldots\ldots & a_{mm}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

[1]) Notațiile din partea a doua sînt independente de cele din partea întîi și în continuare nu se vor face mențiuni speciale.

Sau, dacă dezvoltăm şi neglijăm factorul $\frac{1}{\mu^{m-n}}$ punînd în evidenţă toţi termenii cu anumite particularităţi, vom obţine

$$\mu^{m-n}\lambda^m - \lambda^{m-1}[\mu^{m-n}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})+\mu^{m-n-1}(a_{n+1\,n+1}+\ldots a_{mm})]+$$
$$+\lambda^{m-2}[\mu^{m-n}\sum A_{k_1k_2}+\mu^{m-n-1}\sum A_{k_1k_1'}+\mu^{m-n-2}\sum A_{k_1'k_2'}]+$$
$$+\ldots\ldots+(-1)^{m-n}\lambda^n[\mu^{m-n}\sum A_{k_1k_2\ldots k_{m-n}}+\mu^{m-n-1}\sum A_{k_1k_2\ldots k_{m-n-1}k_1'}+$$
$$+\ldots+\mu\sum A_{k_1k_1'k_2'\ldots k_{m-n-1}'}+A^*_{k_1'k_2'\ldots k_{m-n}'}]+$$
$$+(-1)^{m-n+1}\lambda^{n-1}[\mu^{m-n}\sum A_{k_1k_2\ldots k_{m-n+1}}+\ldots\ldots+\sum A^*_{k_1k_1'k_2'\ldots k_{m-n}'}]+$$
$$+\ldots+(-1)^m\lambda^{m-n}[\mu^{m-n}A_{k_1k_2\ldots k_n}+\ldots+\sum A^*_{k_1\ldots k_{2n-m}k_1'k_2'\ldots k_{m-n}'}]+$$
$$+\ldots+(-1)^m A=0, \qquad (14)$$

unde $A=\det\|a_{sr}\|, (s,r=1,2,\ldots,m)$, iar $A_{k_1\ldots k_1'}\ldots$ minorii principali ai determinantului A, de ordin egal cu numărul total al indicilor; indicii k fac parte din mulţimea $1,2\ldots,n$, iar indicii k' din mulţimea $n+1, n+2,\ldots,m$; în determinanţii notaţi cu asterisc, indicii $k_1'\ldots k_{m-n}'$ sînt de fapt indicii $n+1,\ldots,m$.

Din membrii din dreapta ai ultimelor m-n ecuaţii ale sistemului (13) egalaţi cu zero, vom obţine, după regula lui Cramer:

$$x_\alpha=\frac{-x_1\begin{vmatrix} a_{n+1\,n+1}\cdots a_{n+1\,\alpha-1} & a_{n+1\,1}\cdots a_{n+1\,m}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\ a_{m\,n+1}\cdots a_{m\,\alpha-1} & a_{m\,1}\cdots a_{mm}\end{vmatrix}-\ldots-x_n\begin{vmatrix} a_{n+1}\cdots a_{n+1\,\alpha-1} & a_{n+1\,n}\cdots a_{n+1\,m}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\ a_{m\,n+1}\cdots a_{m\,\alpha-1} & a_{mn}\cdots a_{mm}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{n+1\,n+1}\cdots a_{n+1\,\alpha-1} & a_{n+1\,\alpha}\cdots a_{n+1\,m}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\ a_{m\,n+1}\cdots a_{m\,\alpha-1} & a_{m\,\alpha}\cdots a_{mm}\end{vmatrix}}.$$

$$(\alpha=1,2,\ldots,m).$$

Înlocuind aceste valori în primele n ecuaţii ale sistemului (13), obţinem

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_{n+1\,n+1}\cdots a_{n+1\,m}\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{m\,n+1}\cdots a_{mm}\end{vmatrix}}\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i\,n+1}\cdots a_{im}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n+1\,j} & a_{n+1\,n+1}\cdots a_{n+1\,m}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{mj}\cdots & a_{m\,n+1}\cdots a_{mm}\end{vmatrix}x_j, \qquad (15)$$

$$(i=1,2,\ldots,n).$$

Să notăm

$$A_{(m-n)} = \begin{vmatrix} a_{n+1\,n+1} & \dots & a_{n+1\,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m\,n+1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

și

$$B_{ij} = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i\,n+1} \dots a_{im} \\ a_{n+1\,j} & \\ \dots & A_{(m-n)} \\ a_{mj} & \end{vmatrix}.$$

Ecuația caracteristică a sistemului (15) va fi

$$\frac{1}{A^n_{(m-n)}} \begin{vmatrix} B_{11} - \lambda A_{(m-n)} & B_{12} \dots B_{1n} \\ \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} \dots B_{nn} - \lambda A_{(m-n)} \end{vmatrix} = 0$$

sau, neglijînd factorul nenul $\frac{1}{A^n_{(m-n)}}$,

$$A^n_{(m-n)} \lambda^n - A^{n-1}_{(m-n)} \lambda^{n-1} \sum B_{(1)} + A^{n-2}_{(m-n)} \lambda^{n-2} \sum B_{(2)} + \dots + \\ + A^{n-s}_{(m-n)} (-1)^s \lambda^{n-s} \sum B_{(s)} + \dots + (-1)^n B_{(n)} = 0, \tag{16}$$

unde $B_{(s)}$ reprezintă minorii principali de ordinul s ai determinantului

$$B_{(n)} = \det \| B_{ij} \| \qquad , (i,j = 1,2, \dots, n).$$

LEMA 1. *Pentru* $\mu = 0$, *ecuația* (*14*) *se reduce la ecuația* (*16*).

Va trebui să arătăm că aceleași puteri ale lui λ din ecuația (14) pentru $\mu = 0$ și ecuația (16) au aceiași coeficienți, sau eventual diferă printr-un factor constant.

În ecuația (14) (cu $\mu = 0$), λ^n are coeficientul $A_{(m-n)}$ iar în (16) coeficientul $A^n_{(m-n)}$. Deci pentru un s oarecare ($s \leqslant n$) va trebui să arătăm că

$$A^{n-s}_{(m-n)} \sum B_{(s)} = A^{n-1}_{(m-n)} \sum A_{k_1 k_2 \dots k_s k'_1 k'_2 \dots k'_{m-n}}$$

sau

$$\sum B_{(s)} = A^{s-1}_{(m-n)} \sum A_{k_1 k_2 \dots k_s\, n+1 \dots m}.$$

Va fi suficient să arătăm că unul oarecare dintre determinanții $B_{(s)}$, de exemplu cel format cu indicii $1, 2, \dots, s$, este egal cu $A^{s-1}_{(m-n)} A_{1\,2 \dots s\, n+1 \dots m}$.

Demonstrația se face prin inducție după s. Pentru $s = 1$, relația este evidentă pentru că rezultă din relația de definiție a lui B_{ij}.

Presupunînd relaţia adevărată pentru orice minor de ordinul $s-1$ (nu numai pentru minorii principali de ordinul $s-1$ ai determinantului $B_{(n)}$) al determinantului $B_{(n)}$, va trebui să arătăm că

$$A_{(m-n)}^{s-1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1s} & a_{1\,n+1}\ldots\ldots a_{1m}\\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2s} & a_{2\,n+1}\ldots\ldots a_{2m}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{s1} & a_{s2}\ldots a_{ss} & a_{s\,n+1}\ldots\ldots a_{sm}\\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2}\ldots a_{n+1\,s} & a_{n+1\,n+1}\ldots\ldots a_{n+1\,m}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{ms} & a_{m\,n+1}\ldots\ldots a_{mm}\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1\,n+1}\ldots a_{1m}\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_{n+1\,1} & \\ \ldots & A_{(m-n)}\\ a_{m1} & \end{vmatrix} & \ldots & \begin{vmatrix} a_{1s} & a_{1\,n+1}\ldots a_{1m}\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_{n+1\,s} & \\ \ldots & A_{(m-n)}\\ a_{ms} & \end{vmatrix}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \begin{vmatrix} a_{s1} & a_{s\,n+1}\ldots a_{sm}\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_{n+1\,1} & \\ \ldots & A_{(m-n)}\\ a_{m1} & \end{vmatrix} & \ldots & \begin{vmatrix} a_{ss} & a_{s\,n+1}\ldots a_{sm}\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_{s+1\,s} & \\ \ldots & A_{(m-n)}\\ a_{ms} & \end{vmatrix} \end{vmatrix} . \qquad (17)$$

Să notăm prin $D_{n+r\,p}$ minorul elementului $a_{1\,n+r}$ din determinantul B_{1p}, $(r=1,2,\ldots,m-n;\ p=1,2,\ldots,s)$, şi prin $\mathcal{B}_{ji}$ minorul elementului B_{ij} din determinantul din membrul drept din (17).

Să dezvoltăm determinantul din membrul drept din (17) după elementele primei linii, dezvoltînd şi determinanţii de pe această linie după elementele primei linii. Întrebuinţînd notaţiile făcute, vom obţine

$$[a_{11}A_{(m-n)} - a_{1\,n+1}D_{n+1\,1} + a_{1\,n+2}D_{n+2\,1} + \ldots + (-1)^{m-n}a_{1m}D_{m1}]\mathcal{B}_{11} -$$
$$-[a_{12}A_{(m-n)} - a_{1\,n+1}D_{n+1\,2} + a_{1\,n+2}D_{n+2\,2} + \ldots + (-1)^{m-n}a_{1m}D_{m2}]\mathcal{B}_{21} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{s-1}[a_{1s}A_{(m-n)}a_{1\,n+1}D_{n+1\,s} + a_{1\,n+2}D_{n+2\,s} + \ldots + (-1)^{m-n}a_{1m}D_{ms}]\mathcal{B}_{s1}.$$

Să adunăm după coloane. Vom obţine

$$A_{(m-n)}[a_{11}\mathcal{B}_{11} - a_{12}\mathcal{B}_{21} + \ldots + (-1)^{s-1}a_{1s}\mathcal{B}_{s1}] -$$
$$-a_{1\,n+1}[D_{n+1\,1}\mathcal{B}_{11} - D_{n+1\,2}\mathcal{B}_{21} + \ldots + (-1)^{s-1}D_{ms}\mathcal{B}_{s1}] + \ldots +$$
$$+(-1)^{m-n}a_{1m}[D_{m1}\mathcal{B}_{11} - D_{m2}\mathcal{B}_{21} + \ldots + (-1)^{s-1}D_{ms}\mathcal{B}_{s1}]. \qquad (18)$$

Să notăm prin $\mathcal{A}_{ji}$ minorul elementului a_{ij} al determinantului din membrul stîng al egalității (17). În relația (18) vom înlocui toți determinanții $\mathcal{B}$ prin determinanți $\mathcal{A}$ în baza presupunerii de inducție. Relația (18) devine

$$A_{(m-n)}A_{(m-n)}^{s-2}[a_{11}\mathcal{A}_{11} - a_{12}\mathcal{A}_{21} + \ldots + (-1)^{s-1}a_{1s}\mathcal{A}_{s1}] +$$

$$+(-1)^{s}a_{1\,n+1}A_{(m-n)}^{s-2}[D_{n+1\,1}\mathcal{A}_{11} - D_{n+1\,2}\mathcal{A}_{21} + \ldots + (-1)^{s-1}D_{ms}\mathcal{A}_{s1}] +$$

$$+\ldots+(-1)^{m-1}a_{1m}A_{(m-n)}^{s-2}[D_{m1}\mathcal{A}_{11} - D_{m2}\mathcal{A}_{21} + \ldots + (-1)^{s-1}D_{ms}\mathcal{A}_{s1}].$$

Rămîne să arătăm că coeficienții elementelor $a_{1\,n+r}$, $(r = 1,2,\ldots, m-n)$, sînt tocmai minorii corespunzători $\mathcal{A}_{n+r\,1}$. Adică de exemplu

$$D_{n+1\,1}\mathcal{A}_{11} - D_{n+1\,2}\mathcal{A}_{21} + \ldots + (-1)^{s-1}D_{ms}\mathcal{A}_{s1} = (-1)^{s-1}A_{(m-n)}\mathcal{A}_{n+1\,1}. \quad (19)$$

Să scriem detaliat această relație:

$$\begin{vmatrix} a_{n+1\,1} & a_{n+1\,n+2} & \ldots & a_{n+1\,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m\,n+2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2s} & a_{2\,n+1} & \ldots & a_{2m} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3s} & a_{3\,n+1} & \ldots & a_{3m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s2} & a_{s3} & \ldots & a_{ss} & a_{s\,n+1} & \ldots & a_{sm} \\ a_{n+1\,2} & a_{n+1\,3} & \ldots & a_{n+1\,s} & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & A_{(m-n)} & \\ a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{ms} & & & \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{n+1\,2} & a_{n+1\,n+2} & \ldots & a_{n+1\,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m2} & a_{m\,n+2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \ldots & a_{2s} & a_{2\,n+1} & \ldots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{33} & \ldots & a_{3s} & a_{3\,n+1} & \ldots & a_{3m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s3} & \ldots & a_{ss} & a_{s\,n+1} & \ldots & a_{sm} \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,3} & \ldots & a_{n+1\,s} & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & A_{(m-n)} & \\ a_{m1} & a_{m3} & \ldots & a_{ms} & & & \end{vmatrix} +$$

$$+\ldots+(-1)^{s-1}\begin{vmatrix} a_{n+1\,s} & a_{n+1\,n+2} & \ldots & a_{n+1\,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{ms} & a_{m\,n+2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,s-1} & a_{2\,n+1} & \ldots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3\,s-1} & a_{3\,n+1} & \ldots & a_{3m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{s\,s-1} & a_{s\,n+1} & \ldots & a_{sm} \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \ldots & a_{n+1\,s-1} & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & A_{(m-n)} & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m\,s-1} & & & \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{s-1} A_{(m-n)} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} & a_{2\,s+2} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3s} & a_{3\,s+2} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} & a_{s\,s+2} & \dots & a_{sm} \\ a_{s+1\,1} & a_{s+1\,2} & \dots & a_{s+1\,s} & a_{s+1\,s+2} & \dots & a_{s+1\,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ms} & a_{m\,s+2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \tag{20}$$

Observăm că membrul stîng al egalității (20) reprezintă dezvoltarea după regula lui Laplace a determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} & a_{2\,n+1} & \overbrace{a_{2\,n+2} \dots a_{2m}}^{\sigma} & \overbrace{0 \dots 0}^{\rho} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} & a_{3\,n+1} & a_{3\,n+2} \dots a_{3m} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & a_{s3} & \dots & a_{ss} & a_{s\,n+1} & a_{s\,n+2} \dots a_{sm} & 0 \dots 0 \\ \gamma\{ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & a_{n+1\,3} & \dots & a_{n+1\,s} & a_{n+1\,n+1} & a_{n+1\,n+2} \dots a_{n+1\,m} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{ms} & a_{m\,n+1} & a_{m\,n+2} \dots a_{mm} & 0 \dots 0 \\ \delta\{ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & a_{n+1\,3} & \dots & a_{n+1\,s} & 0 & 0 \dots 0 & a_{n+1\,n+2}\ a_{n+1\,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{ms} & 0 & 0 \dots 0 & a_{m\,n+2}\ a_{mm} \end{vmatrix}, \tag{21}$$

iar membrul drept al egalității (20) reprezintă dezvoltarea după regula lui Laplace a determinantului

$$(-1)^{m-n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} & a_{2\,n+2} & \dots & a_{2m} & 0 & 0 \dots 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} & a_{3\,n+2} & \dots & a_{3m} & 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & a_{s3} & \dots & a_{ss} & a_{s\,n+2} & \dots & a_{sm} & 0 & 0 \dots 0 \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & a_{n+1\,3} & \dots & a_{n+1\,s} & a_{n+1\,n+2} & \dots & a_{n+1\,m} & 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{ms} & a_{m\,n+2} & \dots & a_{mm} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & & 0 \dots 0 & & & & a_{n+1\,n+1} & a_{n+1\,n+2}\ a_{n+1\,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & & 0 \dots 0 & & & & a_{m\,n+1} & a_{m\,n+2} \dots a_{mm} \end{vmatrix} \tag{22}$$

după ultimele $m-n$ linii.

Să efectuăm asupra determinantului (21) următoarele operații:

a. Scădem din cele $m-n$ linii ale grupului δ cele $m-n$ linii ale grupului γ.

b. În determinantul astfel obținut adăugăm la cele $m-n-1$ coloane ale grupului σ cele $m-n-1$ coloane ale grupului ρ.

c. Permutăm coloana care precede grupul σ după ultima coloană a acestui grup (obținînd astfel semnul $(-1)^{m-n}$).

Ca rezultat obținem determinantul (22) în care în locul primei coloane de zerouri (pînă la linia m) apare coloana permutată. Acest determinant este evident egal cu determinantul (22).

Cu aceasta lema este complet demonstrată.

Definiție. *Vom spune că soluția sistemului degenerat este stabilă în sensul lui Tihonov, dacă toate rădăcinile ecuației*

$$| A_{(m-n)} - \lambda E | = 0$$

au părțile reale negative[1]. *Această condiție o vom nota în continuare prin T.*

LEMA 2. *Dacă este îndeplinită condiția T și dacă ecuația (16) are rădăcinile cu părți reale negative, atunci și ecuația (14) are rădăcinile cu părți reale negative, pentru $\mu > 0$ suficient de mic.*

În cele ce urmează, neintervenind forma de determinanți a coeficienților, vom simplifica notațiile.

Vom nota ecuația (16) prin

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n = 0, \tag{16'}$$

în care $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt pozitivi (condiție necesară pentru un polinom Hurwitz).

Să notăm în mod analog ecuația $| A_{(m-n)} - \lambda E | = 0$ prin

$$b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_{m-n}\lambda^{m-n} = 0 \tag{23}$$

unde $b_{m-n} = 1$ și $b_0 = a_n$. Coeficienții $b_0, b_1, \ldots, b_{m-n}$ sînt pozitivi (în virtutea condiției T).

Cu aceste notații, ecuația (14) devine

$$a_0 + (a_1 + \mu c_1) + (a_2 + \mu c_2)\lambda^2 + \ldots + (a_n + \mu c_n)\lambda^n + (\mu b_1 + \mu^2 c_{n+1})\lambda^{n+1} + \\ + (\mu^2 b_2 + \mu^3 c_{n+2})\lambda^{n+2} + \ldots + (\mu^{m-n-1} b_{m-n-1} + \mu^{m-n} c_{m-1})\lambda^{m-1} + \\ + \mu^{m-n}\lambda^m = 0. \tag{14'}$$

Este evident faptul că din îndeplinirea condițiilor lui Hurwitz pentru ecuația (16'):

$$a_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} > 0, \tag{24}$$

[1]) Noțiune echivalentă în acest caz cu noțiunea de „degenerare regulată" din lucrarea [1].

rezultă îndeplinirea primelor n condiții Hurwitz pentru ecuația (14') dacă $\mu > 0$ este suficient de mic. Într-adevăr, aceste condiții sînt

$$a_1 + \mu c_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 + \mu c_1 & a_0 \\ a_3 + \mu c_3 & a_2 + \mu c_2 \end{vmatrix} > 0, \ldots$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + \mu c_1 & a_0 & 0 \ldots & 0 \\ a_3 + \mu c_3 & a_2 + \mu c_2 & a_1 + \mu c_1 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & a_n + \mu c_n \end{vmatrix} > 0 \qquad (25)$$

și în dezvoltarea acestor determinanți toți termenii care apar în plus față de cei din relațiile (24) vor fi înmulțiți cu diferite puteri ale lui μ, deci pentru μ suficient de mic nu vor influența semnul.

Următoarele condiții se referă la determinanți de forma

$$\begin{vmatrix} a_1+\mu c_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3+\mu c_3 & a_2+\mu c_2 & a_1+\mu c_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & a_{n-1}+\mu c_{n-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \mu b_1+\mu^2 c_{n+1} & a_n+\mu c_n \ldots & a_{n-k+2}+\mu c_{n-k+2} \\ \ldots & \ldots & \mu^3 b_3+\mu^4 c_{n+3} & \mu^2 b_2+\mu^3 c_{n+2} \ldots & a_{n-k+4}+\mu c_{n-k+4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \mu^{2k-1} b_{2k+1}+\mu^{2k} c_{n+2k-1} & \ldots & \mu^k b_k+\mu^{k+1} c_{n+k} \end{vmatrix}$$

care trebuie să fie pozitivi. E suficient să facem următoarele observații:

a. În dezvoltarea acestui determinant după ultimele k linii, termenii care îl conțin pe μ la puterea cea mai mică se vor obține din înmulțirea determinantului din colțul din dreapta prin minorul său care e pozitiv, fiind tocmai determinantul ultim din relațiile (25).

b. Determinantul de ordinul k din dreapta jos, este pozitiv. Într-adevăr, să considerăm numai termenii care conțin cele mai mici puteri ale lui μ din fiecare element. Vom obține determinantul

$$\begin{vmatrix} \mu b_1 & a_n & a_{n-1} \ldots & a_{n-k+2} \\ \mu^3 b_3 & \mu^2 b_2 & \mu b_1 \ldots & a_{n-k+4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \mu^{2k-1} b_{2k-1} & \mu^{2k-2} b_{2k-2} & \mu^{2k-3} b_{2k-3} \ldots & \mu^k b_k \end{vmatrix}$$

(mărimile b cu indici mai mari decît m-n sînt nule).

Pentru ca toți termenii din dezvoltarea determinantului să conțină pe μ la aceeași putere $1+2+\ldots+k$, ar trebui ca elementele a_{n-j} să fie înmulțite cu μ^{-j}; în caz contrar produsele în care apar, vor conține pe μ la puteri mai mari. Rezultă că coeficientul puterii celei mai mici a lui

μ este tocmai determinantul lui Hurwitz de ordinul k al ecuației (23), care după ipoteză este pozitiv.

Din lemele demonstrate rezultă direct următoarea teoremă:

TEOREMA 4. *Dacă este îndeplinită condiția T și dacă soluția banală a sistemului (15) este asimptotic stabilă, atunci și soluția banală a sistemului (13) este asimptotic stabilă.*

Teorema se poate extinde la anumite sisteme neliniare. Să considerăm sistemul

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), && (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \mu \frac{dx_h}{dt} &= g_h(x_1, x_2, \ldots, x_m), && (h = n+1, n+2, \ldots m) \end{aligned} \tag{26}$$

în care funcțiile f_i și g_h satisfac anumite condiții de regularitate și relațiile $f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$ și $g_h(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Presupunem că putem rezolva cele $m-n$ ecuații obținute din egalarea cu zero a funcțiilor g_h în raport cu ultimele $m-n$ necunoscute, adică putem găsi funcțiile

$$x_\alpha = x_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \alpha = n+1, n+2, \ldots m$$

cu

$$x_\alpha(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Sistemul degenerat va fi în acest caz

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, x_m(x_1, \ldots, x_n)). \tag{27}$$

Sistemele de primă aproximație ale sistemelor (26) și (27) sînt

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + \ldots, && (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \mu \frac{dx_h}{dt} &= \sum_{k=1}^{m} a_{hk} x_k + \ldots, && (h = n+1, n+2, \ldots, m) \end{aligned}$$

respectiv

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{A_{(m-n)}} \sum_{j=1}^{m} B_{ij} x_j + \ldots,$$

unde am notat

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_j}, \quad a_{hk} = \frac{\partial g_h(0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_k}$$

restul notațiilor fiind cele precedente, iar adausurile conțin puteri ale variabilelor mai mari sau egale cu 2.

Se poate enunța următoarea teoremă :

TEOREMA 5. *Dacă este îndeplinită condiția T și dacă pentru sistemul degenerat are loc stabilitatea după prima aproximație, atunci pentru* $\mu>0$ *suficient de mic, la sistemul inițial (26) are loc stabilitatea după prima aproximație.*

Afirmația rezultă din lemele precedente.

Teoremele 4 și 5 se pot extinde la sisteme mai generale, în particular la sisteme care conțin parametrul μ și în membrii din dreapta ai ecuațiilor.

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

РЕЗЮМЕ

Изучаются системы дифференциальных уравнений содержащих малые параметры при производных вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \quad \mu \frac{dy}{dt} = F(x, y, t).$$

Главный результат состоит в определении условий, при которых асимптотическая устойчивость тривиального решения вырожденной системы вызывает асимптотическую устойчивость тривиального решения исходной системы.

Приводятся обобщения для различных систем.

Вторая часть занимается случаем системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Даются приложения.

SUR LE COMPORTEMENT DES SOLUTIONS DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DONT LES DÉRIVÉES SONT MUNIES D'UN PETIT PARAMÈTRE

RÉSUMÉ

On étudie des systèmes d'équations différentielles ayant un petit paramètre attaché aux dérivées, de la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \quad \mu \frac{dy}{dt} = F(x, y, t).$$

On établit les conditions qui font que la stabilité asymptotique de la solution banale du système «dégénéré» entraîne la stabilité asymptotique de la solution banale du système initial.

On généralise pour d'autres systèmes.

La deuxième partie s'occupe de l'étude des systèmes d'équations linéaires à coefficients constants.

On donne quelques applications.

BIBLIOGRAFIE

1. М. И. Вишик, Л. Н. Люстерник, *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.* Усп. мат. наук, **XII**, 5 (77) (1957).
2. Б. С. Разумихин, *Об устойчивости систем с малым параметром.* Прикл. мат. и мех. **XXI**, 4, 578 (1957).
3. А. Н. Тихонов, *О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра*, Мат. сб., **22** (**64**), 193—204) (1948).
4. R. Bellman, *Stability Theory of Differential Equation.*
5. W. K. Ergen, H. J. Lipkin, J. A. Nohel, *Applications of Liapunov's second Method in Reactor Dynamics.* J. Math. and Phys., (36), *1*, 36—48 (1957).
6. Ю. Н. Бакаев, П. И. Кузнецов, *К определению области устойчивости работы инерционной системы телевизионной синхронизации.* Радиотехника, **11**, 17—24, (1956).
7. M. Zlamal, *Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearer Differentialgleichung zweiter Ordnung.* Чех. мат. журнал, **1**, *6*(*81*), 75—91 (1957).

ASUPRA TORSIUNII BARELOR PRISMATICE CU SECȚIUNE DUBLU-CONEXĂ

DE

EMERIC DEUTSCH

1. SCURT ISTORIC

Problema torsiunii unor bare prismatice cu secțiune dublu-conexă a fost abordată încă la sfîrșitul secolului trecut de Greenhill [1], care a dat o soluție pentru cazul secțiunii mărginite de două elipse confocale, utilizînd coordonate curbilinii ortogonale și de Macdonald [2], care, folosind aceeași metodă, a dat o soluție pentru secțiunea mărginită de două cercuri excentrice. Soluțiile pot fi găsite în Love [3]. În 1921, Neményi [4] se ocupă de metode experimentale și numerice iar mai tîrziu Grindberg și Paschoud [5], Weinel [6] și apoi Engelmann [7] se ocupă din nou cu secțiunea mărginită de două cercuri excentrice.

În 1929, Mushelisvili [8], [9] rezolvă problema torsiunii cu ajutorul reprezentărilor conforme. În 1943 apare lucrarea lui Bartels [10], care tratează problema torsiunii barelor cu secțiune dublu-conexă, de asemenea cu ajutorul reprezentărilor conforme. Dintre cercetările mai recente cunoaștem lucrările lui Șerman și Norodețchi [11], Șerman [12], [13], Polya și Weinstein [14], Ugodcikov [15], [16], Iakovleva [17], [18], Abramian [19], Manea [20], Synge și Cahill [21], Dincă și Boicu [22].

2. INTRODUCERE

Fie

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \tag{1}$$

funcția complexă a torsiunii, corespunzătoare unui domeniu R dublu-conex, mărginit de curbele închise C_1 și C_2.

Să presupunem că se cunoaşte funcţia

$$z = \omega(\zeta), \tag{2}$$

care realizează reprezentarea conformă a domeniului R, pe coroana circulară $\rho_1 \leqslant |\zeta| \leqslant \rho_2$ a planului ζ.

În acest caz, se ştie [23] că funcţia complexă a torsiunii, exprimată în variabila ζ, anume

$$f(z) = f[\omega(\zeta)] = f_0(\zeta),$$

e determinată de condiţiile la limită

$$\mathcal{R}e \frac{1}{i} f_0(\zeta) = \frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} + c_q \quad \text{pe } \gamma_q, \qquad (q = 1, 2), \tag{3}$$

unde γ_q, $(q = 1,2)$, este cercul $|\zeta| = \rho_q$, $(q = 1,2)$, iar c_q, $(q = 1,2)$, sînt două constante, dintre care una este arbitrară.

Rigiditatea la torsiune este dată de formula

$$D = G(I_0 + D_0), \tag{4}$$

G fiind modulul de elasticitate transversală al materialului, iar

$$I_0 = I_{02} - I_{01}, \tag{5}$$

$$D_0 = D_{02} - D_{01}, \tag{6}$$

unde

$$I_{0q} = -\frac{i}{4} \int_{\gamma_q} \overline{\omega}^2(\overline{\zeta})\, \omega(\zeta)\, d\omega(\zeta), \qquad (q = 1,2) \tag{7}$$

şi

$$D_{0q} = -\frac{1}{4} \int_{\gamma_q} [f_0(\zeta) + \overline{f_0(\zeta)}]\, d[\omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)}], \qquad (q = 1,2). \tag{8}$$

Efortul complex este dat de

$$T_\rho - iT_\theta = \frac{\alpha G \zeta}{\rho |\omega'(\zeta)|} [f_0'(\zeta) - i\overline{\omega(\zeta)}\, \omega'(\zeta)], \tag{9}$$

unde α este unghiul de torsiune iar T_ρ şi T_θ sînt proiecţiile vectorului tensiunii tangenţiale într-un punct oarecare al domeniului R, pe tangentele la curbele $\theta = \text{const.}$ şi $\rho = \text{const.}$ din planul z, curbe, care corespund prin reprezentarea (2) semidreptei $\theta = \text{const.}$ respectiv cercului $\rho = \text{const.}$ din planul ζ. Evident, cercurilor $\rho = \rho_1$ şi $\rho = \rho_2$, corespund chiar curbele C_1 şi C_2.

Ne propunem să găsim funcţia complexă a torsiunii $f_0(\zeta)$, rigiditatea la torsiune D şi tensiunile tangenţiale T_ρ şi T_θ, în cazul cînd reprezentarea conformă (2) este cunoscută sub forma

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \zeta^k, \tag{10}$$

unde a_k, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ..)$, sînt coeficienţi cunoscuţi, în general complecşi.

3. FUNCȚIA COMPLEXĂ A TORSIUNII

Funcția complexă a torsiunii o căutăm sub forma

$$f_0(\zeta) = i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^k, \tag{11}$$

unde constantele b_k se determină cu ajutorul condițiilor (3).
Avem

$$\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \zeta^m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{a}_n \bar{\zeta}^n = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n+p}\,\bar{a}_n\,\rho^{2n+p}\,e^{ip\theta} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \bar{a}_{n+p}\,\rho^{2n+p}\,e^{-ip\theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \bar{a}_n \rho^{2n}. \tag{12}$$

Vom nota

$$\beta_p(\rho) = \rho^p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n+p}\,\bar{a}_n \rho^{2n}, \qquad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{13}$$

Cu această notație,

$$\rho^p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \bar{a}_{n+p}\,\rho^{2n} = \rho^p \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m-p}\,\bar{a}_m\,\rho^{2m-2p} = \beta_{-p}(\rho),$$

și deci relația (12) se poate scrie

$$\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_p(\rho)\,e^{ip\theta}. \tag{14}$$

Observăm că

$$\beta_{-p}(\rho) = \bar{\beta}_p(\rho), \tag{15}$$

relație utilă pentru calculul lui $\beta_{-p}(\rho)$, $(p = 1,2,\ldots)$.
Ținînd seamă de (11) și (14), condițiile la limită (3) devin

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \rho_q^k e^{ik\theta} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{b}_k \rho_q^k e^{-ik\theta} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_p(\rho_q)\,e^{ip\theta} + 2c_q, \ (q = 1,2), \tag{16}$$

unde am ținut seamă că pe γ_q avem $\zeta = \rho_q e^{i\theta}$.
Din (16), prin identificare, obținem

$$b_0 + \bar{b}_0 = \beta_0(\rho_1) + 2c_1, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} b_0 + \bar{b}_0 &= \beta_0(\rho_2) + 2c_2, \\ b_k \rho_1^k + \bar{b}_{-k} \rho_1^{-k} &= \beta_k(\rho_1), \\ b_k \rho_2^k + \bar{b}_{-k} \rho_2^{-k} &= \beta_k(\rho_2). \end{aligned} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{18}$$

Din (17), punînd $c_2 = 0$, găsim

$$\mathcal{R}e\, b_0 = \frac{1}{2}(b_0 + \bar{b}_0) = \frac{1}{2}\beta_0(\rho_2), \tag{19}$$

$$c_1 = \frac{\beta_0(\rho_2) - \beta_0(\rho_1)}{2}, \tag{20}$$

iar din ecuațiile (18)

$$b_k = \frac{\rho_2^k \beta_k(\rho_2) - \rho_1^k \beta_k(\rho_1)}{\rho_2^{2k} - \rho_1^{2k}}, \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{21}$$

Relațiile (19) și (21) determină funcția complexă a torsiunii, abstracție făcînd de o constantă aditivă reală.

4. RIGIDITATEA LA TORSIUNE

Pentru calculul lui I_0, folosim formulele (5) și (7). Avem pentru $\rho = \text{const.}$

$$\overline{\omega(\zeta)}\, \mathrm{d}\omega(\zeta) = i \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \bar{a}_m \rho^m e^{-im\theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_n \rho^n e^{in\theta}\, \mathrm{d}\theta =$$

$$= i\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (m+p)\, \bar{a}_m a_{m+p} \rho^{2m+p} e^{ip\theta} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\bar{a}_{n+p} a_n \rho^{2n+p} e^{-ip\theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_n \bar{a}_n \rho^{2n}\right) \mathrm{d}\theta.$$

Notăm

$$\gamma_p(\rho) = \rho^p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\bar{a}_{n+p} a_n \rho^{2n}, \qquad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{22}$$

Cu această notație,

$$\rho^p \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (m+p)\, \bar{a}_m a_{m+p} \rho^{2m} = \rho^p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\bar{a}_{n-p} a_n \rho^{2n-2p} = \gamma_{-p}(\rho)$$

și deci

$$\overline{\omega(\zeta)}\, \mathrm{d}\omega(\zeta) = i \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_{-p}(\rho)\, e^{ip\theta}\, \mathrm{d}\theta. \tag{23}$$

Pentru calculul funcțiilor $\gamma_p(\rho)$, $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, sînt utile următoarele relații, care se deduc cu ușurință,

$$\gamma_p(\rho) = \frac{1}{2}\left[\rho \frac{\mathrm{d}\bar{\beta}_p(\rho)}{\mathrm{d}\rho} - p\bar{\beta}_p(\rho)\right], \tag{24}$$

$$\gamma_{-p}(\rho) = \bar{\gamma}_p(\rho) + p\beta_p(\rho). \tag{25}$$

Ținînd seamă de (14) și (23), expresia lui I_{0q} se găsește din (7):

$$I_{0q} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_p(\rho_q)\, e^{ip\theta} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \gamma_{-r}(\rho_q)\, e^{ir\theta}\, d\theta, \qquad (q = 1,2)$$

sau

$$I_{0q} = \frac{\pi}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_p(\rho_q)\, \gamma_p(\rho_q), \qquad (q=1,2).$$

Avem deci, din (5),

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [\beta_p(\rho_2)\, \gamma_p(\rho_2) - \beta_p(\rho_1)\, \gamma_p(\rho_1)]. \qquad (26)$$

Pentru calculul lui D_0 folosim formulele (6) și (8). Avem

$$f_0(\zeta) + \overline{f_0(\zeta)} = i\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \rho^k e^{ik\theta} - \bar{b}_k\, \rho^k e^{-ik\theta}\right),$$

iar din (14), pentru $\rho = \text{const.}$,

$$d[\omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)}] = i \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p\beta_p(\rho) e^{ip\theta}\, d\theta.$$

Astfel, relația (8) devine

$$D_{0q} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k\, \rho_q^k e^{ik\theta} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{b}_k\, \rho_q^k e^{-ik\theta}\right) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p\beta_p(\rho_q)\, e^{ip\theta}\, d\theta$$

sau

$$D_{0q} = -\frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\,(b_k\, \rho_q^k - \bar{b}_{-k}\, \rho_q^{-k})\, \beta_{-k}(\rho_q), \qquad (q=1,2).$$

Avem deci, din (6),

$$D_0 = -\frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [k\,(b_k \rho_2^k - \bar{b}_{-k}\rho_2^{-k})\, \beta_{-k}(\rho_2) - k\,(b_k\, \rho_1^k - \bar{b}_{-k}\rho_1^{-k})\, \beta_{-k}(\rho_1)] =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k[b_k(\rho_2^k \beta_{-k}(\rho_2) - \rho_1^k \beta_{-k}(\rho_1)) - \bar{b}_{-k}(\rho_2^{-k}\beta_{-k}(\rho_2) - \rho_1^{-k}\beta_{-k}(\rho_1))] =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\,[b_k(\rho_2^k \bar{\beta}_k(\rho_2) - \rho_1^k \bar{\beta}_k(\rho_1)) - \bar{b}_{-k}(\rho_2^{-k}\, \beta_{-k}(\rho_2) - \rho_1^{-k}\, \beta_{-k}(\rho_1))],$$

unde am ținut seamă de relația (15). În virtutea relațiilor (21) putem scrie

$$D_0 = -\frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\,[b_k\, \bar{b}_k\, (\rho_2^{2k} - \rho_1^{2k}) - \bar{b}_{-k}\, b_{-k}\, (\rho_2^{-2k} - \rho_1^{-2k})]$$

sau

$$D_0 = -\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\rho_2^{2k} - \rho_1^{2k})\, k b_k \bar{b}_k. \tag{27}$$

Expresiile lui I_0 și D_0 din (26) respectiv (27), înlocuite în (4), ne dau rigiditatea la torsiune

$$D = \frac{\pi G}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\beta_k(\rho_2)\gamma_k(\rho_2) - \beta_k(\rho_1)\gamma_k(\rho_1) - 2(\rho_2^{2k} - \rho_1^{2k}) k b_k \bar{b}_k]. \tag{28}$$

5. TENSIUNILE TANGENȚIALE

Pentru calculul tensiunilor T_ρ și T_θ vom folosi formula (9). Avem

$$\rho^2 |\omega'(\zeta)|^2 = \rho^2\, \omega'(\zeta)\overline{\omega'(\zeta)} = \rho^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m a_m \zeta^{m-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \bar{a}_n \bar{\zeta}^{n-1} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} mn a_m \bar{a}_n \rho^{m+n} e^{i(m-n)\theta} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 a_n \bar{a}_n \rho^{2n} + \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n(n+p) a_{n+p} \bar{a}_n \rho^{2n+p} e^{ip\theta} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m(m+p) a_m \bar{a}_{m+p} \rho^{2m+p} e^{-ip\theta}.$$

Notăm

$$\delta_p(\rho) = \rho^p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n(n+p) \bar{a}_{n+p} a_n \rho^{2n}, \qquad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{29}$$

Avem atunci

$$\rho^p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n(n+p) a_{n+p} \bar{a}_n \rho^{2n} = \rho^p \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m(m-p) a_m \bar{a}_{m-p} \rho^{2m-2p} = \delta_{-p}(\rho)$$

și deci

$$|\omega'(\zeta)|^2 = \frac{1}{\rho^2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta_p(\rho) e^{-ip\theta}. \tag{30}$$

Observăm că

$$\delta_{-p}(\rho) = \overline{\delta}_p(\rho), \tag{31}$$

iar un calcul simplu ne arată că

$$\delta_p(\rho) = \frac{1}{2}\left[\rho \frac{d\gamma_p(\rho)}{d\rho} + p\gamma_p(\rho)\right] \tag{32}$$

sau, ținînd seamă de (24),

$$\delta_p(\rho) = \frac{1}{4}\left[\rho^2 \frac{d^2\bar{\beta}_p(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{d\bar{\beta}_p(\rho)}{d\rho} - p^2 \bar{\beta}_p(\rho)\right]. \tag{33}$$

Relațiile (31), (32) și (33) sînt utile pentru calculul funcțiilor $\delta_p(\rho)$, $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Ținînd seamă de (11) și (23), avem

$$\zeta f_0'(\zeta) - i\zeta\,\overline{\omega(\zeta)}\,\omega'(\zeta) = i\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[k b_k \rho^k - \gamma_{-k}(\rho)]\,e^{ik\theta} =$$

$$= -i\gamma_0(\rho) + i\sum_{k=1}^{+\infty}[k b_k \rho^k - \gamma_{-k}(\rho)]\,e^{ik\theta} + i\sum_{k=1}^{+\infty}[-k b_{-k}\rho^{-k} - \gamma_k(\rho)]e^{-ik\theta} =$$

$$= -i\gamma_0(\rho) + i\sum_{k=1}^{+\infty}[k(b_k \rho^k e^{ik\theta} - b_{-k}\rho^{-k}e^{-ik\theta}) - (\gamma_{-k}(\rho)e^{ik\theta} - \gamma_k(\rho)e^{-ik\theta}].$$

Dar, ținînd seamă de (25),

$$\gamma_{-k}(\rho)\,e^{ik\theta} + \gamma_k(\rho)\,e^{-ik\theta} = \bar{\gamma}_k(\rho)\,e^{ik\theta} + \gamma_k(\rho)\,e^{-ik\theta} + k\beta_k(\rho)\,e^{ik\theta}$$

și deci relația precedentă devine

$$\zeta f_0'(\zeta) - i\zeta\,\overline{\omega(\zeta)}\,\omega'(\xi) =$$

$$= -i\gamma_0(\rho) + i\sum_{k=1}^{+\infty} k(b_k \rho^k e^{ik\theta} - b_{-k}\rho^{-k}e^{-ik\theta} - \beta_k(\rho)e^{ik\theta}) -$$

$$- i\sum_{k=1}^{+\infty}(\bar{\gamma}_k(\rho)\,e^{ik\theta} + \gamma_k(\rho)\,e^{-ik\theta}).$$

De aici se deduce succesiv

$$\mathcal{R}e\,[\zeta f_0'(\zeta) - i\zeta\,\overline{\omega(\zeta)}\,\omega'(\zeta)] =$$

$$= -\mathcal{I}m\sum_{k=1}^{+\infty} k(b_k \rho^k e^{ik\theta} - b_{-k}\rho^{-k}e^{-ik\theta} - \beta_k(\rho)e^{ik\theta}) =$$

$$= -\mathcal{I}m\sum_{k=1}^{+\infty} k(b_k \rho^k + \bar{b}_{-k}\rho^{-k} - \beta_k(\rho))\,e^{ik\theta} =$$

$$= \mathcal{I}m\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\,e^{ik\theta}}{\rho^k(\rho_2^{2k} - \rho_1^{2k})}\begin{vmatrix} \rho_1^k\beta_k(\rho_1) & \rho^k\beta_k(\rho) & \rho_2^k\beta_k(\rho_2) \\ \rho_1^{2k} & \rho^{2k} & \rho_2^{2k} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \tag{34}$$

unde am înlocuit pe b_k și b_{-k} cu expresiile lor date de (21).

În mod asemănător găsim

$$\mathcal{I}m\ [\zeta f_0'(\zeta) - i\zeta\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)] = -\gamma_0(\rho) - \sum_{k=1}^{+\infty}(\bar{\gamma}_k(\rho)\,e^{ik\theta} + \gamma_k(\rho)\,e^{-ik\theta}) + \mathcal{R}e\sum_{k=1}^{+\infty} k\,(b_k\rho^k - \bar{b}_{-k}\rho^{-k} - \beta_k(\rho))\,e^{ik\theta} = -\gamma_0(\rho) - 2\,\mathcal{R}e\sum_{k=1}^{+\infty}\bar{\gamma}_k(\rho)\,e^{ik\theta} - \mathcal{R}e\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\,e^{ik\theta}}{\rho^k(\rho_2^{2k}-\rho_1^{2k})}\begin{vmatrix}\rho_1^k\beta_k(\rho_1) & \rho^k\beta_k(\rho) & \rho_2^k\beta_k(\rho_2)\\ \rho_1^{2k} & \rho^{2k} & \rho_2^{2k}\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}. \tag{35}$$

Din (9), (34) și (35) deducem acum

$$T_\rho = \frac{\alpha G}{\rho\,|\,\omega'(\zeta)\,|}\,\mathcal{I}m\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\,e^{ik\theta}}{\rho^k(\rho_2^{2k}-\rho_1^{2k})}\begin{vmatrix}\rho_1^k\beta_k(\rho_1) & \rho^k\beta_k(\rho) & \rho_2^k\beta_k(\rho_2)\\ \rho_1^{2k} & \rho^{2k} & \rho_2^{2k}\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}, \tag{36}$$

$$T_\theta = \frac{\alpha G}{\rho\,|\,\omega'(\zeta)\,|}\left\{\gamma_0(\rho) + 2\,\mathcal{R}e\sum_{k=1}^{+\infty}\bar{\gamma}_k(\rho)\,e^{ik\theta} + \mathcal{R}e\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\,e^{ik\theta}}{\rho^k(\rho_2^{2k}-\rho_1^{2k})}\begin{vmatrix}\rho_1^k\beta_k(\rho_1) & \rho^k\beta_k(\rho) & \rho_2^k\beta_k(\rho_2)\\ \rho_1^{2k} & \rho^{2k} & \rho_2^{2k}\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}\right\}, \tag{37}$$

unde $|\,\omega'(\xi)\,|$ este dat de relația (30).

Observăm că relația (36), pentru $\rho = \rho_1$ sau $\rho = \rho_2$, ne dă $T_\rho = 0$, adică în punctele frontierei $C_1 + C_2$, vectorul tensiunii tangențiale este tangent conturului respectiv, rezultat bine cunoscut.

6. CONCLUZII

Am găsit deci, pentru domeniul dublu-conex R, expresiile formale pentru funcția complexă a torsiunii, pentru rigiditatea la torsiune cît și pentru tensiunile tangențiale. Evident, formulele găsite pentru aceste mărimi pot fi aplicate nemijlocit, atunci cînd funcția (10) care realizează reprezentarea conformă se reduce la o expresie ce conține un număr finit de termeni sau poate fi aproximată printr-o asemenea expresie.

7. EXEMPLU

Să considerăm ca exemplu secțiunea mărginită de două elipse confocale.

Fie A_1, B_1 respectiv A_2, B_2, semiaxele a două elipse confocale. Notăm

$$k^2 = A_1^2 - B_1^2 = A_2^2 - B_2^2. \tag{38}$$

Funcția

$$z = \frac{k}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \tag{39}$$

realizează reprezentarea conformă a domeniului considerat, pe coroana circulară $\rho_1 \leqslant |\zeta| \leqslant \rho_2$, unde

$$\rho_q^2 = \frac{A_q + B_q}{A_q - B_q}, \qquad (q = 1,2). \tag{40}$$

Avem deci

$$a_1 = \frac{k}{2}, \quad a_{-1} = \frac{k}{2}, \quad a_j = 0 \quad \text{pentru } j \neq -1, 1.$$

Din (13) și (15) deducem

$$\beta_0(\rho) = \frac{k^2}{4}(\rho^2 + \rho^{-2}),$$

$$\beta_2(\rho) = \frac{k^2}{4},$$

$$\beta_{-2}(\rho) = \frac{k^2}{4},$$

$$\beta_j(\rho) = 0 \quad \text{pentru } j \neq 0, 2, -2.$$

Din formula (21) avem

$$b_2 = \frac{k^2}{4}\,\frac{1}{\rho_1^2 + \rho_2^2}, \quad b_{-2} = \frac{k^2}{4}\,\frac{\rho_1^2\,\rho_2^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2},$$

$$b_j = 0 \quad \text{pentru } j \neq 2, -2.$$

Funcția complexă a torsiunii este deci

$$f_0(\zeta) = \frac{i\,k^2}{4(\rho_1^2 + \rho_2^2)}\left[\zeta^2 + \frac{\rho_1^2\,\rho_2^2}{\zeta^2}\right] + \text{const.} \tag{41}$$

Din relațiile (24) și (25) deducem

$$\gamma_0(\rho) = \frac{k^2}{4}(\rho^2 - \rho^{-2}),$$

$$\gamma_2(\rho) = -\frac{k^2}{4},$$

$$\gamma_{-2}(\rho) = \frac{k^2}{4},$$

$$\gamma_j(\rho) = 0 \quad \text{pentru } j \neq 0, 2, -2.$$

Din (26) și (27) deducem

$$I_0 = \frac{\pi k^4}{32}(\rho_2^4 - \rho_1^4)\left(1 + \frac{1}{\rho_1^4 \rho_2^4}\right), \quad D_0 = -\frac{\pi k^4}{4}\frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_2^2 + \rho_1^2}$$

și deci din $D = G(I_0 + D_0)$,

$$D = \frac{\pi k^4 G}{32}(\rho_2^2 - \rho_1^2)\left[(\rho_1^2 + \rho_2^2)\left(1 + \frac{1}{\rho_1^4 \rho_2^4}\right) - \frac{8}{\rho_1^2 + \rho_2^2}\right]. \tag{42}$$

Din (31 și (32) avem

$$\delta_0(\rho) = \frac{k^2}{4}(\rho^2 + \rho^{-2}),$$

$$\delta_2(\rho) = -\frac{k^2}{4},$$

$$\delta_{-2}(\rho) = -\frac{k^2}{4},$$

$$\delta_j(\rho) = 0 \quad \text{pentru } j \neq 0, 2, -2,$$

iar din (30)

$$|\omega'(\zeta)|^2 = \frac{k^2}{4\rho^4}(\rho^4 + 1 - 2\rho^2 \cos 2\theta).$$

Avem

$$\begin{vmatrix} \rho_1^2 \beta_2(\rho_1) & \rho^2 \beta_2(\rho) & \rho_2^2 \beta_2(\rho_2) \\ \rho_1^4 & \rho^4 & \rho_2^4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{k^2}{4}(\rho^2 - \rho_1^2)(\rho_2^2 - \rho^2)(\rho_2^2 - \rho_1^2),$$

$$\begin{vmatrix} \rho_1^2 \beta_2(\rho_1) & \rho^2 \beta_2(\rho) & \rho_2^2 \beta_2(\rho_2) \\ \rho_1^4 & \rho^4 & \rho_2^4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{k^2}{4}(\rho_2^2 - \rho_1^2)(\rho_1^2 \rho_2^2 - \rho^4 + \rho^2 \rho_2^2 + \rho^2 \rho_1^2).$$

Deci din (36) și (37) rezultă

$$T_\rho = \alpha G k \frac{(\rho^2 - \rho_1^2)(\rho_2^2 - \rho^2) \sin 2\theta}{\rho(\rho_1^2 + \rho_2^2)\sqrt{1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta}},$$

$$T_\theta = \alpha G k \frac{(\rho_1^2 + \rho_2^2)(\rho^4 - 1) + 2(\rho_1^2 \rho_2^2 - \rho^4)\cos 2\theta}{2\rho(\rho_1^2 + \rho_2^2)\sqrt{1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta}}. \tag{43}$$

О КРУЧЕНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ДВУХСВЯЗНЫМ СЕЧЕНИЕМ

РЕЗЮМЕ

В работе решается задача о кручении призматического стержня, имеющего в качестве сечения двухсвязную область R.

Предполагается известной функция

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \zeta^k,$$

осуществляющая конформное отображение области R на круговое кольцо $\rho_1 \leqslant |\zeta| \leqslant \rho_2$.

Вводятся функции $\beta_p(\rho)$, $\gamma_p(\rho)$, $\delta_p(\rho)$ $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, определяемые (13), (22) и (29). Соотношения (15), (24), (25), (31), (32) и (33) облегчают вычисление этих функций.

Для комплексной функции кручения автор находит

$$f_0(\zeta) = i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^k,$$

где постоянные b_k определяются из соотношений (21), а для жесткости на кручение он получает

$$D = \frac{\pi G}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\beta_k(\rho_2)\gamma_k(\rho_2) - \beta_k(\rho_1)\gamma_k(\rho_1) - 2(\rho_2^{2k} - \rho_1^{2k}) k b_k \bar{b}_k];$$

для касательных напряжений получаются выражения (36) и (37), где $|\omega'(\zeta)|$ дано (30). Можно заметить, что при $\rho = \rho_1$ или $\rho = \rho_2$ имеем $T_\rho = 0$, что является хорошо известным результатом.

В качестве примера вычисления рассматривается случай области, ограниченной двумя конфокальными эллипсами с полуосями A_1, B_1 и A_2, B_2. В этом случае получаются известные выражения для комплексной функции кручения (41), для жесткости на кручение (42) и для касательных напряжений (43).

SUR LA TORSION DES BARRES PRISMATIQUES À SECTION DOUBLEMENT CONNEXE

RÉSUMÉ

L'auteur indique la solution du problème de la torsion d'une barre prismatique ayant comme section un domaine R doublement connexe.

Il suppose connue la fonction

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \zeta^k,$$

qui réalise la représentation conforme du domaine R sur une couronne circulaire $\rho_1 \leqslant |\zeta| \leqslant \rho_2$.

Il introduit les fonctions $\beta_p(\rho)$, $\gamma_p(\rho)$, $\delta_p(\rho)$, $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, définies par (13), (22) et (29). Les relations (15), (24), (25), (31), (32) et (33) facilitent le calcul de ces fonctions.

Pour la fonction complexe de la torsion, il trouve

$$f_0(\zeta) = i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^k,$$

où les constantes b_k sont déterminées à partir des relations (21). Pour la rigidité à la torsion, il trouve

$$D = \frac{\pi G}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k(\rho_2)\gamma_k(\rho_2) - \beta_k(\rho_1)\gamma_k(\rho_1) - 2(\rho_2^{2k} - \rho_1^{2k}) k b_k \bar{b}_k];$$

pour les tensions tangentielles, il trouve les expressions (36) et (37), où $|\omega'(\zeta)|$ est donné par (30). On constate que pour $\rho = \rho_1$, ou pour $\rho = \rho_2$, on a $T_\rho = 0$, ce qui est un résultat bien connu.

Comme exemple de calcul, l'auteur considère le cas d'un domaine borné par deux ellipses confocales ayant comme semi-axes A_1, B_1, respectivement A_2, B_2. Il retrouve les expressions, déjà connues, pour la fonction complexe de la torsion (41), pour la rigidité à la torsion (42) et pour les tensions tangentielles (43).

BIBLIOGRAFIE

1. A. G. GREENHILL, *Fluid Motion Between Confocal Elliptic Cylinders and Confocal Ellipsoids*. Quart. J. of. Math. Oxford Ser., **16**, 227—256 (1879).
2. H. M. MACDONALD, *On the Torsional Strenght of a Hollow Shaft*. Proc. Cambridge Philos. Soc., **8**, 62—68 (1893).
3. A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge, 1952.
4. P. NEMÉNYI, *Lösung des Torsionproblems für Stäbe mit mehrfach zusammenhängenden Querschnitt*. ZAMM, **1**, 364—367 (1921).
5. B. GRINDBERG, M. PASCHOUD, *Torsion d'un cylindre creux dont la section droite est limitée par deux cercles excentriques*. C. R. Paris, **182**, 759 (1926).
6. E. WEINEL, *Das Torsionproblem für den excentrischen Kreisring*. Ingenieur Archiv, **III**, 67—75 (1932).
7. F. ENGELMANN, *Verdrehung von Stäben mit einseitig ringförmigen Querschnitt*. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, **6**, 146—154 (1935).
8. N. I. MUSHELISVILI, *Sur le problème de torsion des cylindres élastiques isotropes*. Rendic. di Reali Accad. dei Lincei, 6 ser, **IX**, 295—300 (1929).
9. — *Zum Problem der Torsion der homogenen isotropen Prismen*. Изв. Тифлисского политехнич. ин-та, **I**, 1 — 20 (1929).
10. R. C. F. BARTELS, *Torsion of Hollow Cylinders*. Transactions of the American Math. Soc., **53**, *1*, 1—13 (1943).
11. Д. И. ШЕРМАН, М. З. НОРОДЕЦКИЙ, *О кручении некоторых призматических полых тел*. Инженерный сборник, **VI** (1950).
12. Д. И. ШЕРМАН, *О свойствах бесконечных систем уравнений в задачах кручения некоторых двухсвязных профилей*. Прикл. мат. и мех., **XVII**, *4*, 470 (1953).
13. Д. И. ШЕРМАН, *Об одном методе решения некоторых задач кручения, изгиба и плоской теории упругости для неодносвязных областей*. Прикл. Механика, **III**, *4*, 363—377 (1957).
14. G. POLYA, A. WEINSTEIN, *On the Torsional Rigidity of Multiply Connected cross-sections*. Ann. of Mathem., **2**, *52*, 154—163 (1950).

15. А. Г. Угодчиков, *Кручение полых призматических стержней.* Прикл. механика, **II**, *2*, 217—223 (1956).
16. — *Электромоделирование конформного преобразования кругового кольца на заданную двухсвязную область.* Украинский математический журнал, *3* (1955).
17. В. И. Яковлева, *О кручении некоторых полых призматических стержней.* Прикл. механика, **II**, *3*, 325—332 (1956).
18. — *О кручении полого призматического стержня эллиптического сечения.* Тр. Груз. политехн. ин-т., **42**, *1*, 107—112 (1956).
19. Б. Л. Абрамян, *Кручение и изгиб призматических стержней с полым прямоугольным сечением.* Прикл. мат. и мех., **XVI**, 265 (1950).
20. V. Manea, *Torsiunea arborelui gol cu caneluri radiale exterioare sau interioare.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *4*, 1035—1048 (1958).
21. T. L. Synge, W. F. Cahill, *The Torsion of a Hollow Square.* Quart. Appl. Math., **15**, *3*, 217—224 (1957).
22. FL. Dincă, N. Boicu, *Asupra torsiunii unor bare cilindrice cu secţiune dublu conexă.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *3*, 733 (1958).
23. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1954.
24. I. S. Sokolnikoff, *Mathematical theory of Elasticity.* Mc Graw-Hill, New York — London, 1946.
25. C. B. Biezeno, R. Grammel, *Engineering Dynamics*, vol. I, *Theory of Elasticity, Analytical and Experimental methods.* London and Glasgow, 1955.

MIȘCĂRI BRACHISTOCHRONE ALE RACHETELOR

DE

PETRE BRĂDEANU

Se consideră în planul vertical mișcarea unui corp cu masa variabilă, rachetă sau avion cu motor rachetă, și se presupune că secțiunea longitudinală precum și centrul de greutate se găsesc, în tot timpul mișcării, în acest plan.

Mișcarea rachetei, analogă mișcării unui corp solid liber (proiectil), se va compune din mișcarea centrului de greutate și oscilațiile axei longitudinale definite prin variația unghiului de atac α. Se neglijează deci mișcarea de precesie și efectele aerodinamice dependente de rotația rachetei. Pămîntul se presupune fix și plan iar condițiile meteorologice, la sol, normale.

Desigur că față de proiectilul de artilerie obișnuit racheta prezintă deosebiri esențiale datorită acțiunii tracțiunii reactive, a organelor de dirijare și variației masei. Acestea, la rîndul lor, produc apariția unui moment de rotație provocat de excentricitatea tracțiunii față de axa longitudinală, variația poziției centrului de greutate și a momentelor de inerție în timp, amortizarea oscilațiilor rachetei datorită jetului de gaze, modificarea sistemului de forțe și momente aerodinamice etc. În anumite condiții, sau chiar în general, unele din aceste efecte pot fi neglijate. Așa de pildă, se neglijează efectul acțiunii jetului asupra forțelor aerodinamice considerîndu-se că din punctul de vedere aerodinamic racheta se comportă ca un proiectil (regim aerodinamic staționar).

Această ultimă ipoteză simplificatoare se poate explica prin faptul că tracțiunea reactivă avînd un efect dinamic, și o valoare foarte mare față de rezistența parazitară a aerului, eventualele variații mici ale rezistenței (datorită jetului)ar avea un rol neînsemnat asupra mișcării rachetei. Relația, cunoscută, dintre lungimea de undă λ (care se poate măsura experimental) a oscilațiilor rachetei și coeficientul momentului aerodinamic nu indică, pentru acest coeficient, variații în urma acțiunii jetului.

Acțiunea jetului poate avea o oarecare influență sensibilă asupra structurii stratului limită ce se formează pe corpul rachetei modificînd întinderea regiunilor laminare și turbulente și prin aceasta schimbînd și valoarea rezistenței de frecare.

De asemenea, jetul de gaze anulează efectul de sucțiune și prin aceasta produce o descreștere a rezistenței cu 30%, pentru viteze mici, din valoarea rezistenței totale. La viteze mici însă, rezistența este și ea mică.

Noi vom presupune că forțele aerodinamice și de asemenea momentele aerodinamice nu depind, prin coeficienții respectivi, de acțiunea jetului de gaze și în consecință ele se vor calcula ca și în cazul proiectilului balistic.

Vom admite ipoteza că debitul de gaze corespunzător variației masei are o valoare finită pe partea activă a traiectoriei și o valoare foarte mică pe partea pasivă. Vom considera o variație continuă de masă, pe toată traiectoria, care aproximează variația reală fragmentar continuă. Vom neglija mișcarea centrului de greutate în corpul rachetei.

Considerăm că portanța L și rezistența frontală R sînt de forma

$$L = L\,[g\,(y),\ v,\ \alpha],$$
$$R = R\,[g\,(y),\ v,\ L] = -\,k\,H\,(y)\,\varphi\,(v,\ L)$$

pot avea cunoscutele expresii din aerodinamică

$$L = d^2 \rho v^2 f_L \sin \alpha, \tag{1}$$
$$R = d^2 \rho v^2 f_R, \tag{2}$$

unde d este diametrul rachetei, ρ densitatea aerului ($\rho = \gamma/g$), v viteza rachetei, α unghiul de atac iar f_L și f_R coeficienții aerodinamici care, după cum se știe, pot fi considerați constanți sau dependenți de numărul lui Mach și Reynolds.

Notăm cu Ox axa orizontală și cu Oy axa verticală a reperului planului vertical și presupunem $\rho = \rho\,(y)$, $g = g\,(y)$, unde g este accelerația gravitațională. Vom presupune că asupra rachetei acționează forța gravitațională

$$\vec{G} = m\,(t)\,\vec{g}\,(y).$$

Forța care joacă un rol hotărîtor în mișcarea rachetei este tracțiunea reactivă

$$\vec{\Phi} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{w}, \tag{3}$$

unde $\vec{w}$ este vectorul vitezei relative a jetului de gaze. Vom admite că tracțiunea depinde de viteza, înălțimea și timpul de zbor și că formează cu orizontala Ox unghiul β^* și cu axa longitudinală unghiul β. Notăm cu β_1 unghiul făcut de $\vec{w}$ cu $\vec{v}$ și considerăm că unghiul β^* deci și β (poziția tracțiunii în corpul rachetei) este dat sau urmează să fie determinat cu ajutorul unor condiții optime de zbor relativ la obținerea unei

energii mecanice maxime, unei distanțe (bătăi) maxime sau funcționări optime. Pe tangenta și normala la traiectoria centrului de greutate tractiunea $\vec{\Phi}$ are proiecțiile

$$\Phi_t = -\frac{dm}{dt} w(y, v) \cos \beta_1(\alpha, t),$$
$$\Phi_n = -\frac{dm}{dt} w(y, v) \cos \beta_2(\alpha, t), \tag{4}$$

unde

$$\beta_1 = \beta^* - \theta + \pi = \pi + (\beta + \alpha),$$
$$\beta_2 = \frac{\pi}{2} - (\beta^* - \theta) = \frac{\pi}{2} - (\beta + \alpha),$$

în care θ este unghiul de deviere a traiectoriei centrului de greutate de la orizontala Ox.

Portanța și rezistența frontală le considerăm aplicate în centrul de presiune C (intersecția axei centrale a sistemului de forțe aerodinamice

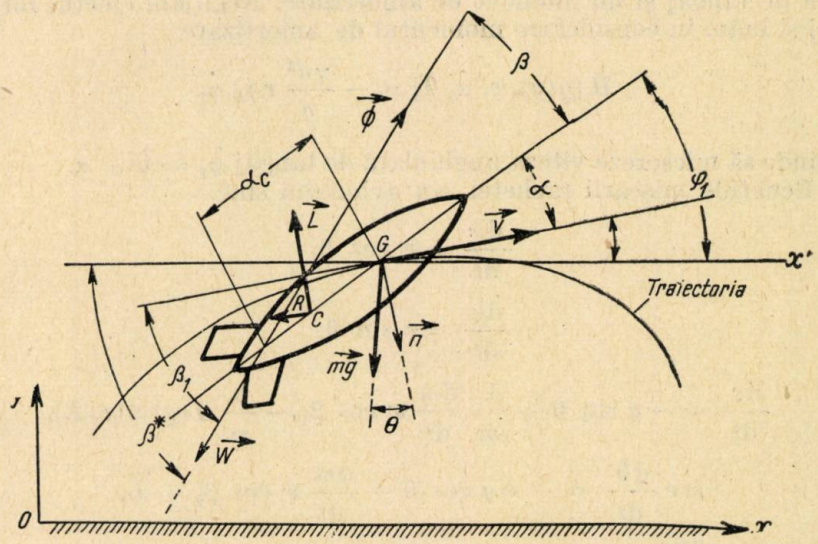


Fig. 1

cu axa longitudinală), care se află sub centrul de greutate la rachete cu ampenaj și deasupra centrului de greutate la rachete fără ampenaj. Momentul rezultant al acestor forțe față de centrul de greutate G este (fig. 1):

$$N_1 = N_1[v, \alpha, g(y)] = -L \cdot \overline{GC} \cos \alpha - R \cdot \overline{GC} \sin \alpha \tag{5}$$

care, în particular, are expresia

$$N_1 = - ed^2 \frac{\gamma}{g(y)} v^2 f_M \sin \alpha ; \ (e = \overline{GC}),$$

unde, după cum se vede,

$$f_M = f_L \cos \alpha + f_R. \tag{6}$$

Dacă $f_M > 0$ (rachete cu ampenaj), N_1 este un moment stabilizator (micşorează unghiul α), dacă $f_M < 0$ (rachete fără ampenaj), N_1 este un moment de răsturnare (măreşte unghiul α).

Momentul forţei de reacţie are valoarea

$$N_r = \pm \frac{dm}{dt} w d_1 = - \frac{dm}{dt} w(y, v) d_c \sin \beta, \tag{7}$$

unde d_1, variabil cu timpul, este distanţa de la G la direcţia tracţiunii iar d_c este distanţa de la centrul de greutate G la secţiunea critică a ajutajului rachetei.

În afară de aceste forţe şi momente, asupra rachetei mai acţionează o forţă de tangaj şi un moment de amortizare. Neglijăm efectul forţei de tangaj şi luăm în considerare momentul de amortizare

$$H[g(y), v, \dot{\alpha}, \dot{\theta}] = - \frac{\gamma d^4}{g} v f_H \dot{\varphi}_1 \tag{8}$$

care tinde să micşoreze viteza unghiulară de tangaj $\dot{\varphi}_1 = \dot{\theta} + \dot{\alpha}$.

Ecuaţiile mişcării rachetei sau avionului sînt

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \theta, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dt} = v \sin \theta, \tag{10}$$

$$\frac{dv}{dt} = - g \sin \theta + \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} w \cos \beta_1 - \frac{k}{m} H(y) \varphi(v, L), \tag{11}$$

$$mv \frac{d\theta}{dt} = - mg \cos \theta - \frac{dm}{dt} w \cos \beta_2 + L, \tag{12}$$

$$J(t)\left(\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\delta}{dt}\right) = N[g(y), v, \alpha, \delta, \gamma, \beta_1(\alpha, t), \beta_2(\alpha, t), w(y, v), m(t)], \tag{13}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma, \tag{14}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \delta, \tag{15}$$

unde N este momentul rezultant al tuturor forţelor considerate, faţă de centrul de greutate, iar J este momentul de inerţie al corpului rachetei faţă de axa de rotaţie (centru de greutate).

Funcţii necunoscute în acest sistem sînt $x(t)$, $y(t)$, $v(t)$, $\theta(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ şi $\delta(t)$. Problema pe care ne propunem s-o studiem constă în determinarea traiectoriei rachetei sau avionului cu timp minim de zbor şi ea ne conduce, din punctul de vedere matematic, la o problemă variaţională care se formulează astfel:

Să se găsească şapte funcţii necunoscute x, y, v, θ, α, γ, δ care satisfac condiţiile auxiliare (9)—(11), (13 — (15) în aşa fel ca integrala

$$\int_{(A)}^{(B)} \mathrm{d}t$$

să ia o valoare extremă (minimă); A şi B sînt puncte fixe prin care trec toate curbele din clasa (c_1) a liniilor admisibile (continue şi cu tangentă continuă) a acestei probleme variaţionale şi în care avem condiţii locale date.

Ecuaţiile lui Euler-Lagrange pentru o asemenea problemă variaţională condiţionată apar în calitate de condiţii necesare şi suficiente de extrem necondiţionat pentru integrala

$$\int_{(A)}^{(B)} \Phi \, \mathrm{d}t, \tag{A}$$

unde

$$\Phi = 1 + \lambda_1(\dot{x} - v\cos\theta) + \lambda_2(\dot{y} - v\sin\theta) +$$
$$+ \lambda_3\left[\dot{v} + g(y)\sin\theta - \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} w(y, v)\cos\beta_1(\alpha, t) + \frac{k}{m} H(y)\,\varphi(v, L)\right] +$$
$$+ \lambda_4(J\dot{\gamma} + J\dot{\delta} - N) + \lambda_5(\gamma - \dot{\theta}) + \lambda_6(\delta - \dot{\alpha}), \tag{16}$$

$\lambda_i(t)$ sînt multiplicatorii lui Lagrange. Problema revine deci la găsirea a şapte funcţii x, y, v, θ, α, γ, δ de timp care fac minimă integrala (A) şi la determinarea funcţiilor $\lambda_i(t)$.

Ecuaţiile lui Euler-Lagrange pentru variabilele x, y, v, θ, α, γ, δ au forma (portanţa L se elimină din ecuaţia (11) cu ajutorul ecuaţiei (12)):

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}t} = \lambda_3\left[\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\sin\theta - \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{\partial w}{\partial y}\cos\beta_1 + \frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y}\varphi + \frac{k}{m}H\frac{\partial\varphi}{\partial L}\left(m\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\cos\theta + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{\partial w}{\partial y}\cos\beta_2\right)\right] - \lambda_4\left(\frac{\partial N}{\partial g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} + \frac{\partial N}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\right), \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_3}{\mathrm{d}t} = -\lambda_1\cos\theta - \lambda_2\sin\theta + \lambda_3\left\{-\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{\partial w}{\partial v}\cos\beta_1 + \frac{k}{m}H\left[\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial\varphi}{\partial L}\left(m\dot{\theta} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{\partial w}{\partial v}\cos\beta_2\right)\right]\right\} - \lambda_4\left(\frac{\partial N}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right), \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda_5 - k\,H\,\frac{\partial\varphi}{\partial L}\,v\lambda_3\right) = -\,\lambda_1 v\,\sin\,\theta + \lambda_2 v\cos\theta - \lambda_3\Big(g\cos\theta - \\ - k\,Hg\,\frac{\partial\varphi}{\partial L}\sin\theta\Big), \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_6}{\mathrm{d}t} = \lambda_4\frac{\partial N}{\partial\alpha} - \lambda_3\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,w\left(\sin\beta_1\frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha} - k\,H\,\frac{\partial\varphi}{\partial L}\sin\beta_2\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha}\right) + \\ + \lambda_4\left(\frac{\partial N}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial N}{\partial\beta_2}\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha}\right), \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\lambda_4) = \lambda_5 - \lambda_4\frac{\partial N}{\partial\gamma} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\lambda_4) = \lambda_5 - \lambda_4\frac{\partial N}{\partial\gamma} \tag{22}$$

s au

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\lambda_4) = \lambda_6 - \lambda_4\frac{\partial N}{\lambda\delta} \qquad \lambda_6 - \lambda_4\frac{\partial N}{\partial\delta} = \lambda_5 - \lambda_4\frac{\partial N}{\partial\gamma}\,. \tag{23}$$

Ecuațiile (17) — (23) împreună cu condițiile (care pot fi considerate ecuații de legături neolonome ((9) — (15)) fără (12)) reprezintă un sistem de 13 ecuații diferențiale pentru cele 13 funcții necunoscute.

Integrala generală a sistemelor de ecuații (9) — (15), (17) — (23) introduce 13 constante de integrare care urmează să fie determinate cu condițiile la limită ale problemei. Se observă că sistemul (17) — (23) este omogen în raport cu multiplicatorii λ_i și în consecință unul dintre ei poate lua o valoare arbitrară (diferită de zero).

Cazuri particulare

1. Dacă nu se ia în considerare mișcarea în jurul centrului de greutate va trebui să lăsăm la o parte ecuațiile (13), (14), (15) și să facem $\lambda_4 = \lambda_5 = \\ = \lambda_6 = 0$.

Vom presupune că tracțiunea reactivă are în tot timpul mișcării direcția vitezei centrului de greutate și atunci vom avea $\cos\beta_1 = -1$, $\cos\beta_2 = 0$ și $\partial\beta_1/\partial\alpha = 0$, $\partial\beta_2/\partial\alpha = 0$.

Ecuațiile lui Lagrange (17) — (23) devin

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda_3}{m}\left(-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{\partial w}{\partial y} - k\,\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y}\,\varphi\right) - \lambda_3\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\left(\sin\theta + k\,H\,\frac{\partial\varphi}{\partial L}\cos\theta\right) = 0, \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda_3}{m}\left(-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{\partial w}{\partial v} - k\,H\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) - \lambda_3\,k\,H\,\frac{\partial\varphi}{\partial L}\dot{\theta} + \lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(k H v \frac{\partial \varphi}{\partial L} \lambda_3 \right) + g\lambda_3 \left(k H \frac{\partial \varphi}{\partial L} \sin\theta - \cos\theta \right) + v(\lambda_2 \cos\theta - \lambda_1 \sin\theta) = 0. \tag{27}$$

Dacă notăm tracțiunea și rezistența respectiv prin P și Q, putem scrie

$$P(v, y, t) = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} w(y, v)$$
$$Q(v, y, L) = k H(y) \varphi(v, L) \tag{28}$$

și sistemul de ecuații (24) — (27) coincide cu cel dat în lucrarea [1]. Cele opt ecuații ale problemei introduc opt constante de integrare care se vor determina cu condițiile la limită date; în punctul A se cunosc valorile (t, x, y, v, θ), în punctul B se cunosc valorile (x, y, v, θ).

Asupra sistemului de ecuații de mai sus se pot formula, așa după cum se remarcă și în lucrarea [1], și alte probleme ca: găsirea condițiilor care asigură o bătae maximă, înălțime maximă, viteză maximă, diferite probleme izoperimetrice și probleme brachistochrone, cu condiții de transversalitate, asupra manevrelor a două avioane care evoluează în același plan vertical.

2. Vom presupune că axa longitudinală și suportul forței de reacție coincid în fiecare moment cu direcția vitezei adică $\beta_1 = 180°$, $\beta_2 = 90°$, $\alpha = 0$, că H și g sînt constanți, că $\varphi(v, L) = v^2$ (efectul rezistenței induse este nul), că w este constant și atunci sistemul (24) — (27) devine

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \lambda_1 = c_1, \tag{29}$$

$$\dot{\lambda}_2 = 0, \quad \lambda_2 = c_2, \tag{30}$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\lambda_1 \cos\theta - \lambda_2 \sin\theta + 2\lambda_3 \frac{k}{m} H v, \tag{31}$$

$$0 = -\lambda_1 v \sin\theta + \lambda_2 \cos\theta \cdot v - g\lambda_3 \cos\theta, \tag{32}$$

adică

$$\dot{\lambda}_3 - 2kH\frac{v}{m}\lambda_3 = -(c_1 \cos\theta + c_2 \sin\theta), \tag{33}$$

$$g\lambda_3 \cos\theta = -v(c_1 \sin\theta - c_2 \cos\theta). \tag{34}$$

Dacă se elimină λ_3 între ecuațiile (33) — (34) se obține ecuația

$$\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(c_1 \operatorname{tg}\theta - c_2) v] = -\frac{2H}{g}\frac{k}{m}(c_1 \operatorname{tg}\theta - c_2) v^2 + c_1 \cos\theta + c_2 \sin\theta \tag{35}$$

la care mai atașăm ecuația (11). Se observă că ecuația (35) este omogenă în raport cu constantele c_1 și c_2, ceea ce înseamnă că ea depinde de o singură constantă $\mu = c_1/c_2$ (se poate lua c_2 arbitrar, de pildă $c_2 = 1$).

Dacă notăm

$$u = \frac{1}{g}(\mu \operatorname{tg} \theta - 1)v, \tag{36}$$

$$\alpha(\theta) = \frac{2g}{\mu \operatorname{tg} \theta - 1}, \quad \beta(\theta) = \mu \cos \theta + \sin \theta, \tag{37}$$

ecuațiile (35) și (11) devin

$$\dot{u} + \frac{kH}{m}\alpha(\theta)u^2 = \beta(\theta), \tag{38}$$

$$\dot{v} + \frac{kH}{m}v^2 = -g \sin \theta - \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}w \tag{39}$$

Integrarea ecuațiilor (38) — (39) conduce la integrala generală

$$\begin{aligned} v &= f(t, \mu, c_3, c_4), \\ \theta &= g(\mathrm{t}, \mu, c_3, c_4). \end{aligned} \tag{40}$$

Cunoscînd valorile (t_1, v_1, θ_1) corespunzătoare punctului A vom putea determina două constante de integrare (μ, c_3).

Prin înlocuirea în ecuațiile (9) și (10) a funcțiilor, acum cunoscute,

$$v = f(t, c_4), \ \theta = g(t, c_4), \tag{41}$$

se obține traiectoria centrului de greutate cu ajutorul ecuațiilor

$$\begin{aligned} x &= x(t, c_4, c_5), \\ y &= y(t, c_4, c_6). \end{aligned} \tag{42}$$

Ecuațiile (40) și (42) care conțin funcția m (masa) și funcția $\dot{m}$ pot fi considerate ca ecuații funcționale pentru determinarea unor regimuri optime de mișcare.

Constantele de integrare c_4, c_5 și c_6 se determină rezolvînd sistemul algebric

$$\begin{aligned} x_1 &= x(t_1, c_4, c_5) \\ y_1 &= y(t_1, c_4, c_6) \\ y_2 &= f^*(x_2, c_4, c_6) \end{aligned} \tag{43}$$

obținut din (42) cu ajutorul condițiilor la limită. Ecuațiile cu constantele astfel determinate reprezintă traiectoria brachistochronă a rachetei sau avionului. Practic, obținerea acestor ecuații este foarte complicată, de aceea eventuala aplicare a unor metode de integrare numerică ar putea da rezultate mulțumitoare.

Putem evita unele dificultăți apărute în metodele de integrare ale ecuațiilor (38) — (39) prin aflarea unei integrale prime.

În acest scop vom împărți membru cu membru ecuațiile (38) — (39) și vom ține seama de expresia funcției u. Se obține o ecuație de forma

$$-\frac{1}{g}\frac{\mu v}{\cos^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}v}=\frac{f_1\dot{m}+f_2 m+f_3}{mg\sin\theta+kHv^2+w\dot{m}}, \tag{44}$$

unde

$$f_1=\frac{w}{g}(\mu\ \mathrm{tg}\,\theta-1),\ f_2=\beta(\theta)+(\mu\,\mathrm{tg}\,\theta-1)\sin\theta;$$

$$f_3=\frac{kH}{g}v^2(\mu\mathrm{tg}\,\theta-1)-kH\alpha(\theta)u^2.$$

Să înmulțim ecuația (38) cu v și ecuația (39) cu u și să le scădem. Obținem ecuația

$$\frac{1}{g}m\frac{\mu v^2}{\cos^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=g_1\dot{m}+g_2 m+g_3, \tag{45}$$

unde

$$g_1=wu;\ g_2=v\beta(\theta)+gu\sin\theta;\ g_3=kHuv[v-\alpha(\theta)u].$$

Prin împărțirea ecuației (45) cu ecuația (39) găsim

$$-\frac{1}{g}\frac{\mu v^2}{\cos^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}v}=\frac{g_1\dot{m}+g_2 m+g_3}{mg\sin\theta+kHv^2+w\dot{m}}. \tag{45$_1$}$$

Din ecuațiile (44) și (45$_1$) rezultă

$$(vf_1-g_1)\dot{m}+(vf_2-g_2)m+vf_3-g_3=0. \tag{46}$$

Dacă masa rachetei variază liniar adică $m(t)=m_0(1-\alpha t)$ din (46) obținem

$$m_0\frac{vf_2-g_2}{vf_1-g_1}(1-\alpha t)+\frac{vf_3-g_3}{vf_1-g_1}=\alpha m_0=\text{const.} \tag{46$_1$}$$

Ecuația (46) reprezintă relația necesară dintre masă, viteză și unghiul de înclinare al rachetei pe o traiectorie brachistocronă.

Regim optim. Să găsim legea de variație a masei rachetei care, în ipotezele admise la punctul 2, face minimă funcționala (A). Cu alte cuvinte, să găsim variația optimă a masei pe o traiectorie brachistocronă a rachetei. Ecuația lui Euler relativă la variabila m este

$$m\frac{\mathrm{d}\lambda_3}{\mathrm{d}t}=-\frac{kH}{w}v^2\lambda_3 \tag{46$_2$}$$

la care mai adăugăm ecuațiile (33) — (34). Vom scădea din ecuația (46$_2$) ecuația (33) și obținem

$$kHv\left(2+\frac{v}{w}\right)\lambda_3-m(c_1\cos\theta+c_2\sin\theta)=0.$$

Între această ultimă ecuație și ecuația (34) vom elimina pe λ_3 și găsim

$$m = \frac{kH}{g} v^2 \left(2 + \frac{v}{w} \right) \frac{\cos\theta - \mu \sin\theta}{\mu \cos\theta + \sin\theta} \frac{1}{\cos\theta} . \qquad (46_3)$$

Cu ajutorul metodei de integrare indicate mai sus putem, în principiu, găsi funcțiile $v = v(t)$, $\theta = \theta(t)$ și determina constanta de integrare μ. Aceste expresii se înlocuiesc în ecuația (46_3) și se obține $m = m(t)$ în calitate de regim optim de funcționare a motorului rachetă pe o traiectorie brachistochronă a rachetei. După cum se vede, în cazul regimului optim, se poate stabili o relație bine determinată între masa, viteza și unghiul de înclinare a traiectoriei în fiecare punct al acestei traiectorii.

Constanta μ se poate determina, în cazul regimului optim, cu condițiile inițiale de plecare ale rachetei.

Observație. Dacă se presupune masa constantă sau de variație neglijabilă (segmentul pasiv al traiectoriei) se poate elimina timpul din ecuațiile (38)—(39) folosind ecuația (10). Prin aceasta v și θ devin funcții de y. De exemplu ecuația (39) devine

$$\frac{dv^2}{dy} + \frac{2k\,H}{m} \frac{1}{\sin\theta} v^2 = -2g \text{ sau } v^2 = e^{-2k_1 H \int \frac{dy}{\sin\theta}} \left(\text{const.} - 2g \int e^{2k_1 H \int \frac{dy}{\sin\theta}} dy \right)$$

$$\left(k_1 = \frac{k}{m} \right)$$

valoare care s-ar putea, eventual, folosi pentru a elimina variabila v în ecuația (38), ceea ce conduce de fapt la o ecuație integrală.

3. Să considerăm acum mișcarea unei rachete cu accelerație constantă în cîmpul gravitațional variabil al Pămîntului și să presupunem că tracțiunea reactivă variabilă are direcția radială ca și forța de atracție [2]. Vom presupune de asemenea că rezistența aerului este neglijabilă. În aceste ipoteze mișcarea rachetei este plană (planul determinat de vectorii poziției și vitezei inițiale). Vom nota cu r și θ coordonatele polare în planul mișcării cu O polul (centrul Pămîntului) și cu OA_0 axa polară. Poziția inițială de plecare este $A(r_0, \theta_0)$.

Aplicînd ecuația energiei cinetice obținem

$$v^2 = c^2 \left\{ \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right\} = \frac{2\mu}{r} + 2\,\alpha\, w\, r + h, \qquad (47)$$

unde s-au folosit expresiile (c este constanta ariilor):

$$\vec{F} = -\mu \frac{m}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{\Phi} = -\frac{dm}{dt} w \frac{\vec{r}}{r}, \quad -\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} w = \alpha w; \quad \left(w > 0, \frac{dm}{dt} < 0 \right) \qquad (48)$$

pentru forța de atracție, forța de reacție și accelerația reactivă și s-a notat cu h constanta energiei

$$h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} - 2\,\alpha\, w\, r_0. \qquad (49)$$

Să considerăm două puncte fixe A și B în planul mișcării și să aflăm timpul necesar rachetei să ajungă din A în B (r_1, θ_1).

Pentru aceasta se folosește ecuația (41) și se obține

$$T = \int_{(A)}^{(B)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2\alpha w r + h}} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\frac{r'^2 + r^2}{\frac{2\mu}{r} + 2\alpha w r + h}}\, \mathrm{d}\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} F(r, r')\, \mathrm{d}\theta. \tag{50}$$

Problema pe care o punem constă în determinarea traiectoriei $r = r(\theta)$ care face extremă (minimă) funcționala $T\,[r(\theta)]$. Condiția necesară și suficientă de extrem este ecuația lui Euler

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial r'}\right) = \frac{\partial F}{\partial r}. \tag{51}$$

În cadrul problemei noastre ecuația lui Euler devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \frac{r'}{\sqrt{(r^2 + r'^2)\left(\frac{2\mu}{r} + 2\alpha w r + h\right)}} = \tag{52}$$

$$= \frac{\alpha w r^2 + h r + 3\mu + \left(\frac{\mu}{r^2} - \alpha w\right) r'^2}{\sqrt{(r^2 + r'^2)\left(\frac{2\mu}{r} + 2\alpha w r + h\right)\left(\frac{2\mu}{r} + 2\alpha w r + h\right)}}$$

adică o ecuație diferențială de ordinul doi care nu conține variabila independentă. Ca o consecință a acestui fapt putem afla o integrală primă fără a efectua operații artificiale în structura acestei ecuații. În acest scop să observăm că nici funcția F nu depinde de θ și atunci luînd pe r ca variabilă independentă și pe θ ca funcție de r, putem scrie

$$T = \int_{r_0}^{r_1} F\left(r, \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}}\right) \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\, \mathrm{d}r = \int_{r_0}^{r_1} F^*(r, \theta')\, \mathrm{d}r. \tag{53}$$

Ținînd seamă de faptul că $\partial F^*/\partial\theta = 0$ și că

$$\frac{\partial r'}{\partial \theta'} = \frac{\partial}{\partial \theta'}\left(\frac{1}{\theta'}\right) = -\frac{1}{\theta'^2}; \quad \left(r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta},\ \theta' = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right)$$

ecuația lui Euler, după o primă operație de integrare, devine

$$F(r, r') - r' \frac{\partial F}{\partial r'} = c$$

(unde c este o constantă de integrare) adică

$$\sqrt{\frac{r^2 + r'^2}{\frac{2\mu}{r} + 2\alpha w r + h}} - \frac{r'^2}{\sqrt{(r^2 + r'^2)\left(\frac{2\mu}{r} + 2\alpha w r + h\right)}} = c. \tag{54}$$

Cu ajutorul substituției $(r'/r)^2 = y$, ecuația (54) poate fi adusă la forma

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r\sqrt{\frac{r^2}{c^2\left(\frac{2\mu}{r} + 2\alpha wr + h\right)} - 1}$$

a cărei integrală este

$$\theta = c\int_{r_0}^{r} \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{r^3}{2\alpha wr^2 + hr + 2\mu} - c^2}} + \theta_0. \tag{55}$$

Din această familie de curbe admisibile pentru extremul funcționalei T vom alege aceea care trece prin punctul B determinînd constanta c cu o asemenea condiție. Se găsește

$$\theta_1 = c\int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{r^3}{2\alpha wr^2 + hr + 2\mu} - c^2}} + \theta_0. \tag{56}$$

Ecuațiile (55) și (56) reprezintă ecuațiile traiectoriei brachistochrone și ele rezolvă, în această formă, complet problema.

Un calcul deja efectuat ne permite să evaluăm și derivata de ordinul doi a funcției F în raport cu r'. Avem

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r'^2} = \frac{r^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}\left(\frac{2\mu}{r} + 2\,\alpha wr + h\right)^{1/2}}. \tag{57}$$

Se vede că

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r'^2} > 0$$

și condiția necesară de minim a lui Legendre, în problema variațională propusă, este îndeplinită.

Calcul aproximativ. Vom considera regiunea dintre două cercuri concentrice avînd centrele în centrul Pămîntului și razele r_0 și r_1. Vom presupune că r_0 este suficient de mare pentru ca ipoteza referitoare la neglijarea rezistenței aerului să fie valabilă. Vom mai admite că diferența $r_1 - r_0$ este mică față de valoarea r_0 în așa fel ca aproximațiile pe care le vom face să fie de asemenea admisibile cu un grad de exactitate suficient de bun.

Vom căuta extremala funcționalei $T\,[r\,(\theta)]$ care leagă punctul $A(r_0, \theta_0)$ de punctul $B(r_1, \theta_1)$ aflate pe cele două cercuri.

Notăm $r_1 - r_0 = z$ şi considerăm că z este mic faţă de r_0 în aşa fel ca puterile superioare unităţii ale raportului $\frac{z}{r_0}$ să poată fi neglijate faţă de unitate.

În această ipoteză avem

$$\frac{1}{r} \approx 1 - \frac{z}{r_0},$$

$$\frac{2\alpha w}{r} + \frac{h}{r^2} + \frac{2\mu}{r^3} = \frac{2\alpha w}{r_0}\left(1 - \frac{z}{r_0}\right) + \frac{h}{r_0^2}\left(1 - 2\frac{z}{r_0}\right) + \frac{2\mu}{r_0^3}\left(1 - \frac{3z}{r_0}\right) =$$

$$= M - N\frac{z}{r_0},$$

unde

$$M = \frac{2\alpha w}{r_0} + \frac{h}{r_0^2} + \frac{2\mu}{r_0^3} = \frac{v_0^2}{r_0^2},$$

$$N = \frac{2\alpha w}{r_0} + \frac{2h}{r_0^2} + \frac{6\mu}{r_0^3} = \frac{2}{r_0^2}\left(v_0^2 + \frac{2\mu}{r_0}\right) - \frac{2\alpha w}{r_0}.$$

Ţinînd seama de aceste evaluări, formula (55) devine

$$\theta = c\int_{u0}^{u} \sqrt{\frac{M - Nu}{A + Bu}}\,\frac{du}{1-u} + \theta_0, \tag{58}$$

unde

$$A = 1 - c^2 M, \quad B = c^2 N, \quad u = \frac{z}{r_0}.$$

Integrala (58) se exprimă cu ajutorul funcţiilor elementare. Constanta de integrare c se va determina cu condiţia ca curba să treacă prin punctul $B(r_1, \theta_1)$.

În concluzie, remarcăm posibilitatea considerării, formulării şi scrierii ecuaţiilor unor probleme variaţionale relative la determinarea traiectoriei plane, cu timp minim de zbor, a unei rachete sau avion cu reacţie a cărui secţiune longitudinală se mişcă în planul vertical.

Această problemă brachistochronă conduce la ecuaţii diferenţiale neliniare complicate care, după cum se observă, pot fi reduse la tipuri de ecuaţii mai simple dacă se particularizează problema din punctul de vedere fizic. Aplicarea unor metode de integrare numerică ar putea da, eventual, rezultate practice satisfăcătoare.

Se observă că cazul neglijării rezistenţei aerului traiectoria brahistochronă a rachetei (centrului ei de greutate), cu tracţiune radială şi acceleraţie constantă se poate determina prin cvadraturi care, în urma admiterii unor aproximaţii acceptabile din punctul de vedere fizic, se pot exprima prin funcţii elementare.

În lucrare se reuşeşte, de asemenea, să se găsească o lege simplă de variaţie a masei (respectiv tracţiunii reactive), corespunzătoare regimului optim de funcţionare a motorului rachetă pe o traiectorie brachistochronă.

БРАХИСТОХРОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ

РЕЗЮМЕ

После краткого введения , в котором фиксируются допускаемые условия, выписываются уравнения движения в вертикальной плоскости продольного сечения ракеты или самолета с ракетным двигателем (9) — (15).

Затем формулируется задача определения брахистохронного движения, причем выписываются уравнения этой задачи в общем виде (17)—(23), к которым добавляются уравнения (9)—(15) в качестве вспомогательных условий (условия неголономных связей),

Рассматривается только движение центра тяжести (предполагаемого фиксированным в теле), допускается, что реактивная сила имеет направление скорости и получаются уравнения (24)—(28), совпадающие с уравнениями, полученными в работе [1].

Предполагается, что гравитационное поле постоянно, не учитывается действие индуцированного сопротивления (сопротивление принимается пропорциональным квадрату скорости), скорость выделения газов считается постоянной и задача сводится к решению уравнения (38)—(39) с соответствующими вспомогательными и граничными условиями. В этом случае указывается способ решения задачи, причем получается также первый интеграл и исследуется оптимальный режим работы двигателя; для изменения массы находится формула (463).

Далее рассматривается и решается задача определения брахистохронной траектории ракеты с постоянным ускорением и радиальной реактивной силой в переменном гравитационном поле земли.

MOUVEMENTS BRACHYSTOCHRONES DES FUSÉES

RÉSUMÉ

Après une courte introduction où sont précisées les hypothèses admises, on écrit les équations du mouvement, dans le plan vertical, de la section longitudinale d'une fusée ou d'un avion à fusée motrice (9) — (15).

On énonce ensuite le problème de la détermination du mouvement brachystochrone, en écrivant les équations de ce problème sous la forme générale (17) — (23) à laquelle on ajoute les équations (9) — (15) à titre de conditions auxiliaires (conditions de liaisons non holonomes).

On ne considère que le mouvement du centre de gravité (supposé fixe dans le corps), on admet que la traction réactive a la direction de la vitesse et on obtient les équations (24) — (28), qui coïncident avec les équations obtenues dans [1].

On suppose un champ gravitationnel constant, on néglige l'effet de la résistance induite, en prenant la résistance frontale proportionnelle au carré de la vitesse, et on considère constante la vitesse d'écoulement des gaz. Le problème se réduit alors à la recherche de la solution des équations (38) — (39), avec les conditions auxiliaires et à la limite correspondantes. On indique, pour ce cas, le procédé permettant de résoudre le problème, on obtient aussi une intégrale première, on étudie le régime de fonctionnement optimum du moteur, et l'on trouve pour la variation de la masse la formule (46_3).

Puis, on considère et on indique la solution du problème de la détermination de la trajectoire brachystochrone d'une fusée à accélération constante et à traction radiale dans le champ gravitationnel variable de la Terre.

BIBLIOGRAFIE

1. PLACIDO CICALA, ANGELO MIELE, *Brachistocronic Maneuvers of a Variabile Mass Aircraft in a Vertical Plane*. Journ. of the Aeron. Sci., **22**, *8* (1955).
2. PETRE BRĂDEANU, *Consideratii asupra traiectoriei rachetelor*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, *1* (1961).

GHEORGHE VRĂNCEANU, *Lecții de geometrie diferențială*, vol. III, Ed. Acad. R.P.R., București, 1960, 453 p.

Al treilea volum al cărții Academicianului G. V r ă n c e a n u conține cercetări moderne de geometrie diferențială globală în care autorul împreună cu elevii săi au adus contribuții importante.

Ca și în volumele precedente, conținutul este împărțit în șase capitole.

În primul capitol se tratează despre *proprietățile globale ale grupurilor lui Lie*. În primul paragraf se dau noțiunile fundamentale asupra grupurilor abstracte în general și asupra grupurilor continue în special și se arată cum unui grup continuu finit i se poate asocia o algebră de r numere hipercomplexe, algebra lui Lie atașată grupului. În legătură cu aceasta autorul determină formele canonice ale constantelor de structură ale unui grup G_r precum și numărul maxim de parametri pe care-l poate avea grupul său de izomorfie.

În următoarele două paragrafe se demonstrează cîteva proprietăți ale grupurilor ortogonale.

Se dau apoi în continuare rezultate fundamentale privind grupurile simple, grupurile semisimple și grupurile integrabile, multe din aceste rezultate fiind datorite marelui geometru francez E. C a r t a n.

În paragraful 7 autorul dă o demonstrație a cunoscutei teoreme a matematicianului sovietic L. A d o care arată că *orice grup al lui Lie admite o reprezentare liniară*.

Paragraful 8 al primului capitol conține rezultate relativ la grupurile liniare omogene iar în ultimul paragraf se demonstrează diferite proprietăți ale transformărilor unui grup generate de transformări infinitezimale.

Rezultatele acestui capitol sînt folosite în capitolele următoare.

Al doilea capitol al cărții se intitulează : *Conexiuni asociate grupurilor fundamentale*. La început se pune în evidență o proprietate tensorială caracteristică a conexiunii proiective π^i_{jk} și anume aceea că față de o transformare proiectivă de variabile, π^i_{jk} constituie componentele unui tensor de-al doilea ordin. Se arată apoi că invers, fiind dat sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$\pi'^{i}_{rs}\frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x'^{s}}{\partial x^{k}} = \pi^{s}_{jk}\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{s}}$$

acest sistem posedă ca soluții grupul proiectiv în n variabile. Se cercetează apoi în ce condiții conexiunea afină Γ^i_{jk} poate fi extinsă la tot spațiul proiectiv P_n.

În paragrafele 2 și 3 se arată că se pot atașa conexiuni analoage grupului conform și grupului simplectic și se cercetează în ce condiții conexiunea Γ^i_{jk} poate fi extinsă la tot spațiul sferic.

În paragraful 4 se trece la studiul corespondențelor între spații afine. Se arată că la o corespondență $u^i = u^i(x^1,\ldots,x^n)$ între punctele a două spații afine $A_n(x^1,\ldots,x^n)$ și $E_n(u^1,\ldots,u^n)$ se asociază în A_n un tensor Γ^i_{jk} (simetric în indicii inferiori) invariant față de transformările afine din E_n, componentele acestui tensor satisfăcînd ecuațiile

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk}\,\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\,\Gamma^s_{jk} = 0 \qquad (\alpha)$$

și reciproc la o soluție a ecuațiilor (α) se asociază o corespondență între spațiile afine A_n și E_n.

Se definesc apoi *direcțiile caracteristice* ale unei corespondențe ca direcții unite ale transformărilor pătratice $\rho dx'^i = \Gamma^i_{jk}\,dx^i\,dx^k$. Cu ajutorul unui tensor constant q^i_{jk} unei corespondențe i se poate atașa o algebră locală de numere hipercomplexe.

În paragraful 5 autorul introduce noțiunea de *grup de mișcare al unei corespondențe*. Fie date două corespondențe între două perechi de spații afine (A_n, E_n) și (A'_n, E'_n). Aceste două corespondențe se numesc echivalențe, dacă există o transformare afină de la variabilele x la x' și o transformare afină de la variabilele u la u', astfel încît să putem trece de la o corespondență la alta, deci la formulele $u^i = u'^i(x^1,\ldots,x^n)$ să corespundă formule analoage în variabilele accentuate. Dacă asemenea transformări există, atunci acestea formează un grup continuu, care se numește grupul de mișcare al corespondenței considerate.

Se demonstrează că o corespondență între două spații A_n și E_n ($n > 2$) poate avea un grup maxim cu n^2 parametri și acest maxim este atins de corespondențele pentru care algebrele locale sînt proiectiv euclidiene (tensorul q^i_{jk} este de forma $\delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j$). Dacă algebra locală nu este proiectiv euclidiană, grupul de mișcare are cel mult $n^2 - n + 2$ parametri și acest maxim este atins pentru algebrele cu două unități potențiale. Se mai arată că pentru o corespondență avînd o algebră cu p unități potențiale, grupul are cel mult $(n-p)^2 + 3n - p$ parametri, maximul fiind de asemenea atins.

În mod asemănător cu corespondențele între spații afine se definesc în paragraful 6 corespondențele între spații proiective; se găsesc multe rezultate analoage corespondențelor între spații afine. O teoremă importantă este cea care ne spune că grupul de mișcare al unei corespondențe între spații proiective P_n, E_n posedă cel mult $n^2 - n + 2$ parametri și acest maxim este atins de corespondențele echivalente cu transformările cremoniene întregi

$$u^1 = x^1,\ u^2 = x^2 - \frac{1}{2}(x^1)^2,\ u^\alpha = x^\alpha,\ (\alpha > 2).$$

În următoarele două paragrafe se studiază amănunțit corespondențele între plane proiective, dîndu-se o deosebită atenție corespondențelor cu caracteristice drepte. În acest studiu se utilizează cele mai recente lucrări ale școlii italiene de geometrie în frunte cu M. Villa.

În paragraful 9 se arată pe scurt cum pot fi considerate corespondențele între spații conforme.

În ultimul paragraf se expun cîteva proprietăți ale spațiilor de k ori extinse, aceste spații se pot defini pornind de la familiile de corespondențe dintre un spațiu $E_k(u^1,\ldots,u^k)$ și un spațiu $A_n(x^1,\ldots,x^n)$.

Capitolul al treilea tratează despre: *Spațiile A_n omogene*, adică spațiile cu conexiune afină care posedă un grup tranzitiv de mișcări (transformări în el însuși).

Se cercetează mai întîi structura grupurilor tranzitive care pot fi grupuri de mișcări într-un spațiu A_n. În special se pune în evidență structura grupurilor tranzitive ale spațiilor simetrice. Este de menționat și următoarea teoremă.

Dacă un spațiu A_n are un grup tranzitiv de mișcări, există un sistem de congruențe în A_n, față de care componentele tensorilor de curbură și torsiune precum și ale tensorilor lor derivați sînt constante.

Un rol important în studiul spațiilor omogene A_n îl joacă grupul lor de stabilitate. Se știe că într-un sistem de coordonate normale $x^1,\ldots,x^n$, grupul de stabilitate al originii este un subgrup al grupului centro-afin ; de o mare utilitate este forma canonică dată de J o r d a n pentru operatorul unei transformări infinitezimale oarecare a grupului centro-afin.

Un fapt interesant remarcat de autor este acela că dacă grupul de stabilitate al unui spațiu A_n omogen conține transformarea omotetică $x'^i = ax^i$, atunci spațiul este euclidian. Acest rezultat a fost extins de către referent care a arătat că există și alte tipuri de transformări cu această proprietate.

În paragraful 3 se consideră proprietățile spațiilor cu conexiune afină proiectiv euclidiene. Se studiază în primul rînd problema prelungirii conexiunii unui asemenea spațiu, la spațiul proiectiv întreg.

Se determină apoi pe o nouă cale, mai directă, spațiile A_n cu grup maxim G_{n^2}. (Aceste spații au fost considerate de autor încă din 1947 ca spații cu forma Pfaff invariantă diferențială totală exactă ; în același timp matematicianul sovietic I. P. E g o r o v a determinat aceste spații ca spații A_n cu grup maxim de mișcări). Se arată apoi că în cazul cînd spațiul A_n posedă o formă Pfaff invariantă, care nu este o diferențială totală exactă, grupul său de mișcări are cel mult n^2-n+1 parametri și acest maxim este atins. Generalizînd acest rezultat se demonstrează un rezultat datorit autorului că la fiecare formă Pfaff de clasă $2p$ și de speță p sau $p+1$ se poate asocia un spațiu A_n proiectiv euclidian avînd un grup de mișcări cu $(n+1)(n-2p)+2p^2+p$ respectiv $n(n-2p)+2p^2+p$ parametri ; aceste grupuri sînt grupuri maxime compatibile cu această formă, ca formă a lui Pfaff invariantă.

În sfîrșit se consideră spațiile pentru care forma pătratică $\pi = g_{jk}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k$ [1]) este de rang $m < n$ și se arată că în acest caz spațiul poate poseda un grup avînd cel mult $p = n^2 + \frac{m(m-1)}{2} + m(n-m)$ parametri și acest maxim este atins numai dacă forma pătratică π este metrica unui spațiu al lui Riemann V_m cu curbură constantă.

Aplicînd rezultatele obținute în primele două paragrafe, în paragraful 4 se determină spațiile A_2 omogene, printr-o metodă diferită de cea a lui J. L e v i n e și Ș t. P e t r e s c u care au făcut clasificări ale acestor spații.

În următoarele trei paragrafe se consideră problema determinării spațiilor A_3 neproiective cu grup de mișcări G_7. Ținînd seamă că un spațiu A_n neeuclidian are un grup de mișcare cu cel mult n^2 parametri, dacă este proiectiv și cu cel mult n^2-2n+5 parametri dacă nu este proiectiv, rezultă că un spațiu A_3 poate avea un grup cu cel mult 9 sau 8 parametri, după cum este sau nu proiectiv ; aceste spații au fost studiate în volumele anterioare. În paragraful 3 al capitolului trei s-au studiat spațiile proiective cu grup cu n^2-n+1 parametri, iar în volumul doi al acestor lecții s-a arătat că spațiile subproiective A_n au un grup cu cel mult n^2-2n+4 parametri ; pentru $n=3$, avem $n^2-n+1 = n^2-2n+4 = 7$. Determinarea tuturor spațiilor A_3 cu grup tranzitiv G_7 a fost făcută de referent, plecînd de la o

[1]) Se folosesc notațiile

$$g_{jk} = \frac{1}{2(n+1)}(\Gamma_{jk} + \Gamma_{kj}) ; \quad \Gamma_{jl} = \Gamma^i_{jil}$$

unde Γ^i_{jkl} sînt componentele tensorului de curbură.

clasificare a lui S. Lie a grupurilor centro-afine cu patru parametri și căutînd în fiecare caz să vadă dacă grupul G_4 corespunzător poate fi considerat cu grup de stabilitate al unui spațiu A_3 omogen ; rezultatele obținute arată că spațiile A_3 cu grup G_7 intră în una din categoriile menționate mai sus.

Autorul determină direct grupurile G_4 de stabilitate ale unui spațiu A_3 neproiectiv, utilizînd tensorul de curbură al spațiului. O dată determinat grupul de stabilitate se poate determina ușor grupul de mișcări ale spațiului și apoi folosind ecuațiile mișcărilor infinitezimale ale spațiului se pot găsi componentele conexiunii corespunzătoare.

Observînd că spațiile A_3 cu grup G_7 au proprietatea că toate componentele nenule ale conexiunii sînt funcții liniare, proprietate care aparține și spațiilor cu grup maxim (G_{n^2} respectiv G_{n^2-2n+5}), autorul arată că toate aceste spații fac parte dintr-o clasă generală de spații A_n omogene a căror componente nenule ale conexiunii sînt date de formulele

$$\Gamma^i_{11} = q^i_j x^j,\ \Gamma^a_{a1} = c_a,\ \Gamma^a_{1a} = k_a,\ \Gamma^1_{11} = 2c,\ (i, j = 2, \ldots, p ; a \neq 1),$$

unde q^i_j, c_a, k_a și c sînt constante.

Aceste spații sînt studiate în ultimul paragraf al capitolului.

Al patrulea capitol al cărții cuprinde rezultate relative la *spațiile riemanniene V_n omogene*. Și în cazul acestor spații un rol deosebit îl joacă grupul de stabilitate care este un subgrup al grupului rotațiilor. Se arată după E. Cartan cum se poate alege o bază normală de operatori ai grupului de stabilitate.

În paragraful 2 sînt studiate proprietățile grupurilor de mișcare ale spațiilor V_n simetrice. Se arată că dacă spațiul este ireductibil, grupul său de mișcări este sau simplu sau semisimplu.

În paragraful 3 se studiază spațiile proiectiv complexe care sînt spații simetrice de dimensiune pară $n = 2p$ al căror grup de stabilitate este grupul G_{p^2} care lasă invariantă o multiplicare liniară izotropă. În afară de rezultatele proprii, autorul pune în evidență și rezultatele elevului său C. Teleman.

În paragraful 4 se consideră spațiile simetrice de grupuri unitare. Sînt menționate în această direcție numeroase rezultate alr lui E. Cartan.

In paragraful 5 se studiază proprietățile geodezicelor spațiilor cu curbură constantă și ale spațiilor proiective complexe.

În ultimul paragraf se face clasificarea spațiilor V_4 omogene.

Capitolul al cincilea este intitulat : *Tensori strîmb simetrici și numere Betti*. Fiind dată o varietate orientabilă închisă dotată cu o metrică riemanniană peste tot pozitivă și de clasă rezultă din cercetările lui G. de Rahm și W. Hodge că numerele lui Betti ale varietății sînt egale cu numărul tensorilor strîmb simetrici armonic, ce se pot forma pe varietate.

În acest capitol se pune în evidență legătura dintre grupul de mișcare și tensorii strîmb simetrici insistîndu-se în mod special asupra tensorilor armonici.

Ultimul capitol tratează despre *grupurile de olonomie ale spațiilor cu conexiune afină*. Aceste grupuri, introduse de E. Cartan, au oarecum un caracter dual față de grupurile de mișcare, ele reducîndu-se la grupul identitate sau la un grup discret pentru spațiile euclidiene. Aceste grupuri sînt deci cu atît mai generale cu cît spațiul este general, adică mai diferit de spațiul euclidian.

După ce se definesc diferitele grupuri de olonomie, după o metodă utilizată de unul din elevii autorului, T. Hangan, se studiază proprietățile spațiilor A_n care posedă anumite grupuri de olonomie.

În paragraful 3 se face o clasificare a spațiilor A_2 după grupul lor de olonomie, iar în următoarele două paragrafe se determină spațiile A_n cu grup omogen de olonomie cu unul sau cu doi parametri.

În paragraful 6 se dau cîteva rezultate referitoare la spațiile V_n a căror grupuri de olonomie au direcții sau varietăți invariante, expunîndu-se rezultate ale matematicienilor japonezi S. Sasaki și Kentaro Yano.

În paragrafele 7 și 8 se dau noțiunile de spații de acoperire și spații de acoperire universală punîndu-se în evidență proprietățile importante a grupului Galois respectiv ale grupului lui Poincaré al acoperirii, utilizînd rezultate date de C. Teleman. Aceste rezultate sînt aplicate în paragraful următor la determinarea spațiilor riemanniene V_2, complecși cu curbură constantă și la stabilirea anumitor proprietăți ale grupurilor de olonomie ale spațiilor A_n local euclidiene.

În ultimul paragraf se consideră grupurile discrete ale planului afin și se arată că nu există grupuri discrete necomutative care să acționeze pe întreg planul afin, ceea ce demonstrează faptul că pe o suprafață închisă de gen $p \neq 1$ nu poate să existe o conexiune afină regulată.

O mică scăpare a autorului cred că este lipsa unui index bibliografic la sfîrșitul volumului (primele două volume conțin astfel de index-uri).

Trebuie să observăm că expunerea este peste tot sistematică și riguroasă ; de asemenea se remarcă preocuparea autorului de a pune în evidență contribuția remarcabilă pe care matematicienii romîni au adus-o în domeniile noi de geometrie diferențială.

Prin conținutul său, cît și prin metodele folosite, cartea lui G. Vrănceanu reprezintă o realizare de mare valoare, și ea trebuie consultată de toți cei care se preocupă de problemele noi ale geometriei diferențiale.

V. Dumitraș

IVO BABUŠKA, KAREL REKTORYS, FRANTIŠEK VYČICHLO, *Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme* (Teoria matematică a elasticității pentru probleme plane) Akad.-Verlag, Berlin, 1960, 478 + XII pag.

Acest volum, publicat inițial la Praga în 1954, a fost tradus în 1960 în limba germană, datorită interesului deosebit pe care-l prezintă. El a fost alcătuit în cadrul Institutului de matematică al Academiei de științe a Republicii Socialiste Cehoslovace și cuprinde o trecere în revistă a problemelor noi care se pun în cadrul teoriei elasticității plane.

Ediția germană a acestei lucrări cuprinde unele adăugiri, în ceea ce privește exemplele de calcul, față de ediția precedentă.

Într-un capitol introductiv se trec pe larg în revistă diferite aspecte ale problemei plane. După ce se face distincție între stare de tensiune plană și stare de deformație plană se studiază diversele forme pe care le poate avea un domeniu plan, precum și diversele proprități de conexiune. Apoi se arată posibilitățile de determinare ale stării de tensiune și ale stării de deformație, diferitele relații suplimentare care intervin în cazul liniar sau neliniar, precum și unele cazuri de integrare. Acest capitol cuprinde numai chestiuni clasice ; remarcăm expunerea clară și riguroasă a sa.

Capitolul al II-lea cuprinde formularea problemei plane, precum și diferitele moduri de rezolvare ale ei, prin intermediul funcției lui Airy sau folosind funcțiile de variabilă complexă. Se insistă asupra posibilității de a pune condiții pe contur în diferite cazuri și se arată influența unor încărcări locale, precum și modul lor de exprimare. Un studiu detaliat este consacrat domeniilor multiplu conexe. Se tratează și cîteva probleme clasice (de exemplu

cazul forțelor masice provenind din greutatea proprie sau a forțelor de inerție provenind dintr-o mișcare de rotație). De asemenea se arată particularitățile pe care le prezintă rezolvarea problemei plane pentru un domeniu infinit.

În capitolul al III-lea autorii prezintă rezvolvarea problemei în cazul unor domenii finite. Se tratează pe larg metodele de soluționare date de M u s h e l i ș v i l i și d e L a u r i c e l l a și Ș e r m a n. Se dau cîteva cazuri practice atît de stare de tensiune plană cît și de stare de deformație plană. Cu această ocazie se cercetează și limitele de valabilitate ale principiului lui B. de S t. V e n a n t. Se trec apoi în revistă diverse metode aproximative ce se pot aplica practic (în cazul unor contururi complicate de exemplu) și se precizează gradul de valabilitate al soluțiilor obținute.

Capitolul al IV-lea se ocupă de utilizarea metodei transformărilor conforme, reducînd problema dată la rezolvarea unei probleme analoge pe o circumferință, cu alte condiții la limită.

Ultimul capitol conține unele dezvoltări matematice, în special din domeniul funcțiilor de variabilă complexă, necesare înțelegerii și aplicării metodelor de calcul folosite în carte.

Lucrarea prezentată de autorii cehi are merite incontestabile. Aici sînt cuprinse cele mai noi studii în acest domeniu, bazate pe metoda funcțiilor de variabilă complexă. Considerăm ca o realizare deosebită faptul că autorii au căutat și au izbutit să lege cercetările clasice și personale întreprinse de probleme practice, căutînd să dea încontinuu exemple care să corespundă cu cele întîlnite în realitate. Figurile, care adesea lipsesc la lucrări de acest gen, sînt numeroase și ilustrează foarte bine textul corespunzător.

P. P. Teodorescu

RECTIFICARE

La lucrarea „Asupra definirii algebrelor booleene prin operații binare" [1]) de Sergiu Rudeanu apărută în Studii și cercetări matematice, t. XI, nr. 2, 451—467 (1960) se aduc următoarele rectificări:

În definiția 6 și lemele 1,2,4 se va citi „funcție booleană în sens restrîns" în loc de „funcție booleană". Lema 3 este adevărată în orice algebră booleană. Demonstrația teoremei 2 se face fără lemele 4,5.

Cu notațiile din definiția 4, spunem că algebra $\mathfrak{A}$ este dependentă (în sens restrîns) de $\mathfrak{B}$, dacă orice funcție din $\mathfrak{F}$ se obține prin suprapuneri (în sens restrîns) de funcții din $\mathfrak{G}$. În teorema 6 se va citi „dependente în sens restrîns" în loc de „echivalente în sens restrîns".

ИСПРАВЛЕНИЕ

В работу Серджиу Рудяну „Об определении булевых алгебр при помощи бинарных операций" [2]), напечатанную в „Studii și cercetări matematice, Acad. R.P.R." 1960, T. XI, N 2, стр. 451—467, вносятся следующие исправления.

В определении 6 и леммах, 1, 2 (вторая часть), 4 следует читать „булева функция в узком смысле", вместо „булева функция". Лемма 3 справедлива в любой булевой алгебре. Доказательство теоремы 2 проводится без леммы 4,5.

С обозначениями из определения 4, говорят, что алгебра $\mathfrak{A}$ зависима (в узком смысле) от $\mathfrak{B}$, если любая функция из $\mathfrak{F}$ получается при помощи суперпозиций (в узком смысле) функций из $\mathfrak{G}$. В теореме 6 следует читать „зависимы в узком смысле", вместо „эквивалентны в узком смысле".

NOTE RECTIFICATIVE

Veuillez rectifier de la manière suivante l'article intitulé *Asupra definirii algebrelor booleene prin operații binare* (Sur la définition des algèbres booléennes par des opérations binaires) [3]) par Sergiu Rudeanu, paru dans «Studii și cercetări matematice, Acad. R.P.R.», 1960, tome XI, nº 2, p. 451—467.

Dans la définition 6 et les lemmes 1, 2 (deuxième partie) et 4, lisez «fonction booléenne au sens restreint», au lieu de «fonction booléenne». Le lemme 3 est vrai pour toute algèbre booléenne.

La démonstration du théorème 2 sera faite sans recourir aux lemmes 4 et 5.

Conservant les notations de la définition 4, nous dirons que l'algèbre $\mathfrak{A}$ est dépendante (au sens restreint) de $\mathfrak{B}$ si toute fonction de $\mathfrak{F}$ s'obtient par des superpositions (au sens restreint) de fonctions de $\mathfrak{G}$. Dans le théorème 6 on lira «dépendantes au sens restreint» au lieu d'«équivalentes au sens restreint».

---

[1]) Aceeași lucrare a apărut în Rev. de math. pures et appl. nr. 1 (1961) corectată conform celor arătate în această rectificare.

[2]) Эта же работа была напечатана в исправленном виде в „Revue de math. pures et appl., Acad. R.P.R." 1961, Nº 1.

[3]) Ce même travail est paru dans la «Revue de Mathématiques pures et appliquées, Acad. R.P.R.», 1961, tome VI, n° 1, avec les corrections ci-dessus.

NOTĂ

La lucrarea „*O generalizare a ecuației Fredholm*“, apărută în Studii și cercetări matematice, **XI**, *2*, 1960, se aduc următoarele rectificări:

Pag.	rîndul	în loc de:	se va citi:
410	4	S^{ν}, $S^{(1)}$	$\underline{S}^{(\nu)}$, $\underline{S}^{(1)}$
„	4 de jos	$\Delta(\lambda, s, t)$	$-\underline{\Delta}(\lambda, s, t)$
415	6	$\int \frac{\underline{\Delta}'_{\lambda}(\lambda, s, t)}{\Delta(\lambda)} f(t)\, dt$	$\lambda \int \frac{\underline{\Delta}'_{\lambda}(\lambda, s, t)}{\Delta(\lambda)} f(t)\, dt$
417	11	$\int c(t)\, \underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s, t)\, dt$	$\sum_n \int c(t_n)\, \underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s, t_n)\, dt_n$
„	8 de jos	$\underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s_m, r_n) = 0$	$\sum_n \underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s_m, r_n) = 0$
418	12 „ „	$\int \frac{\underline{\Delta}^{(i+1)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s, t)}{\Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda)} f(t)\, dt$	$\lambda_0 \int \frac{\underline{\Delta}^{(i+1)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s, t)}{\Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda)} f(t)\, dt$
420	8	sînt identice	se exprimă, cînd $k = 0$, $\varphi(s)\, \Delta^{(i)}(\lambda_0) = (-1)^i \int \varphi(s, r_1 \ldots r_i) \times D\left(\lambda_0, \begin{matrix} r_1 \ldots r_i \\ r_1 \ldots r_i \end{matrix}\right) dr_1 \ldots dr_i$
420	9	$\Delta^{(j)}(s, r_n) = (-1)^i \sum D\left(\lambda_0, \begin{matrix} r_1 \ldots s \ldots r_i \\ r_1 \ldots r_n \ldots r_i \end{matrix}\right)$	$-\underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda_0}(\lambda, s, r_n) = (-1)^i \int D\left(\lambda_0, \begin{matrix} r_1 \ldots s \ldots r_i \\ r_1 \ldots r_n \ldots r_i \end{matrix}\right) \times dr_1 \ldots dr_{n-1}\, dr_{n+1} \ldots dr_i$
421	notă	$\frac{\lambda^n}{\Delta^{(i)}_{\lambda}(\lambda, s, r_n)} \int S_n(s, r)\, \underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda}(\lambda, r, r_n)\, dr$	$\frac{\lambda_0^n}{\underline{\Delta}^{(i)}_{n\lambda_0}(\lambda, s, r_q)} \int S_n(s, r)\, \underline{\Delta}^{(i)}_{n'\lambda_0}(\lambda, r, r_q)\, dr$
423	5	se adaugă:	$+ \sum_m \sum_{j=1}^{i_m} C_{mj}\, \varphi_{mj}(s, i_m)$

MÜSZAKI KÖNYVTÁR ORSZÁGOS 1883

F 1269 762

KAT

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

2

ANUL XII

1961

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

2

ANUL XII

1961

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — *redactor responsabil*; ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU; ACADEMICIAN GR. C. MOISIL; GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R.P.R.; N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; A. HALANAY.

Revista STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
apare de două ori pe an

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul XII, nr. 2 1961

SUMAR

Pag

G. VRĂNCEANU, Transformări pseudo-ortogonale şi spinori 319
MARCEL N. ROŞCULEŢ, Operatori integrali care generalizează ecuaţiile cu derivate parţiale. Formule de medie 337
A. HALANAY, Soluţii periodice la sistemele liniare cu întîrziere 367
SILVIU TELEMAN, Asupra primei probleme de vibraţii proprii ale unui corp elastic 393
E. BALAŞ şi P. IVĂNESCU, În legătură cu problema transporturilor. II. Probleme de transporturi cu parametri 413
E. BALAŞ şi P. IVĂNESCU, În legătură cu problema transporturilor. III. Problema transporturilor cu centre variabile 429
VALERIU ŞT. UDRESCU, O axiomatică a algebrei omologice relative a grupurilor discrete 437
PAUL CONSTANTINESCU, Asupra numărului de tipuri de funcţii booleene simetrice generalizate 449
MARIUS I. STOKA, Asupra corespondenţelor speciale între spaţiile proiective. II 457
I. VĂDUVA, Asupra spaţiilor cu conexiune afină constantă ataşate unor algebre reale 535
CRISTIAN TEODOSIU, Asupra rezolvării problemei plane a teoriei elasticităţii pentru domenii multiplu-conexe, cu ajutorul funcţiei lui Airy 543
SERGIU RUDEANU, Funcţii booleene şi funcţii Sheffer 553
V. ISTRĂŢESCU şi I. VĂDUVA, Produse de spaţii metrice statistice 567
MARTIN JURCHESCU, Suprafeţe riemanniene şi aplicaţii olomorfe 575

RECENZII 591

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome XII, n° 2 1961

SOMMAIRE

Page

G. VRĂNCEANU, Transformations pseudo-orthogonales et spineurs 319
MARCEL N. ROŞCULEŢ, Opérateurs intégraux qui généralisent les équations aux dérivées partielles. Formules de moyenne 337
A. HALANAY, Solutions périodiques des systèmes linéaires à retardement 367
SILVIU TELEMAN, Sur le premier problème de vibrations propres d'un corps élastique 393
E. BALAŞ and P. IVĂNESCU, On the transportation problem. II. Parametric transportation problems 413
E. BALAŞ and P. IVĂNESCU, On the transportation problem. III. Transportation problems with variable centres 429
VALERIU ŞT. UDRESCU, Axiomatique de l'algèbre homologique relative des groupes discrets 437
PAUL CONSTANTINESCU, On the number of types of generalized Boolean symmetric functions 449
MARIUS I. STOKA, Au sujet des correspondances spéciales entre espaces projectifs. II 457
I. VĂDUVA, Sur les espaces à connexion affine constante attachés à des algèbres réelles 535
CRISTIAN TEODOSIU, Sur la solution, à l'aide de la fonction d'Airy, du problème plan de la théorie de l'élasticité dans le cas des domaines multiplement connexes 543
SERGIU RUDEANU, Fonctions booléennes et fonctions de Sheffer 553
V. ISTRĂŢESCU et I. VĂDUVA, Produits d'espaces métriques statistiques 567
MARTIN JURCHESCU, Riemann surfaces and holomorphic maps 575

COMPTES RENDUS 591

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том. XII, № 2 1961

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Г. ВРЭНЧАНУ, Псевдо-ортогональные преобразования и спиноры 319
МАРЧЕЛ Н. РОШКУЛЕЦ, Интегральные операторы, обобщающие уравнения в частных производных. Формула среднего 337
А. ХАЛАНАЙ, Периодические решения линейных систем с запаздыванием 367
С. ТЕЛЕМАН, О первой задаче о собственных колебаниях упругого тела 393
Е. БАЛАШ и П. ИВЭНЕСКУ, О проблеме перевозок. II. Задачи перевозок с параметрами 413
Е. БАЛАШ и П. ИВЭНЕСКУ, О проблеме перевозок. III. Задачи перевозок с переменными центрами 429
В. УДРЕСКУ, Аксиоматика относительной гомологической алгебры дискретных групп 437
П. КОНСТАНТИНЕСКУ, О числе типов обобщенных симметрических булевых функций 449
М. СТОКА, О специальных соответствиях между проективными пространствами 457
И. ВЭДУВА, О пространствах постоянной аффинной связности, присоединенных к действительным алгебрам 535
К. ТЕОДОСИУ, О решении плоской задачи теории упругости для многосвязных областей при помощи функции Эйри 543
С. РУДЯНУ, Булевы функции и функции Шеффера 553
В. ИСТРЭТЕСКУ и И. ВЭДУВА, Произведение статистических метрических пространств 567
М. ЖУРКЕСКУ, Римановы поверхности и голоморфные отображения 575
РЕЦЕНЗИИ 591

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

TRANSFORMĂRI PSEUDO-ORTOGONALE ȘI SPINORI

DE

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU

Sînt binecunoscute proprietățile grupului ortogonal real, precum și proprietățile grupului ortogonal complex.

În ce privește proprietățile grupurilor pseudo-ortogonale reale, ele sînt puțin cunoscute și de obicei se consideră aceste grupuri, ca grupuri ortogonale complexe, prin introducerea unor coordonate imaginare.

Este însă interesant de a studia grupurile pseudo-ortogonale în real și studiul lor este uneori mai simplu decît acela al grupurilor ortogonale reale.

În ce privește grupurile pseudo-ortogonale complexe este evident că studiul lor coincide cu acela al grupurilor ortogonale complexe, însă este util uneori de a pleca de la grupuri pseudo-ortogonale complexe, rezultatele fiind mai simple, așa cum este cazul în teoria spinorilor, și deci în problema binecunoscută a reprezentării liniare a grupurilor ortogonale complexe.

Vom considera aici, în prima parte, transformările pseudo-ortogonale în trei variabile, deci transformările ce lasă invariantă o formă pătratică nedefinită în trei variabile.

În a doua parte vom găsi forma canonică la care se poate reduce o transformare pseudo-ortogonală infinitezimală în trei variabile. Vom arăta că există trei cazuri, în timp ce în cazul transformărilor ortogonale există un singur caz.

În a treia parte vom determina grupul pseudo-ortogonal în patru variabile ce păstrează o formă pătratică, avînd două pătrate pozitive și două pătrate negative, grup ce conține șase parametri.

În partea a patra vom da grupul ce conservă o varietate liniară nulă de dimensiune maximă a unei forme pătratice.

I. Fiind dată o formă pătratică nedefinită, în trei variabile, ea poate fi redusă la forma canonică

$$\pm (X^2 + Y^2 - Z^2). \tag{1}$$

Făcînd transformarea de variabile

$$x = X, \quad y = Y + Z, \quad z = Z - Y \tag{1'}$$

forma noastră pătratică devine

$$\pm (x^2 - y z). \tag{2}$$

Egalată cu ± 1, obţinem suprafaţa

$$x^2 - y z = 1 \tag{2'}$$

suprafaţă ce reprezintă în coordonate ortogonale x, y, z un hiperboloid de rotaţie cu o pînză, deci o cuadrică riglată real. Forma canonică (2') pune în evidenţă de altfel generatoarele situate în planele coordonate $y = 0$ şi $z = 0$, căci ecuaţia (2') admite soluţiile

$$x = \pm 1, \quad y = 0; \quad x = \pm 1, \quad z = 0. \tag{2''}$$

Să considerăm acum un grup liniar şi omogen definit de transformările

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \frac{\beta}{2} y + \frac{\gamma}{2} z \\ y' &= mx + ny + pz \\ z' &= hx + ky + gz. \end{aligned} \tag{3}$$

Pentru ca aceste transformări să păstreze forma canonică (2), trebuie să avem

$$\begin{aligned} &\alpha^2 - mh = 1, \quad \beta^2 - 4nk = 0 \\ &\gamma^2 - 4pg = 0, \quad \alpha\beta - mk - hn = 0 \\ &\alpha\gamma - mg - hp = 0, \quad \beta\gamma - 2ng - 2pk = -2. \end{aligned} \tag{4}$$

Să observăm că a doua şi a treia ecuaţie (4) ne dau

$$\beta^2\gamma^2 = 16\, ngpk.$$

Eliminînd produsul $\beta\gamma$ cu ajutorul ultimei ecuaţii (4) obţinem

$$1 + (ng - pk)^2 = 2\,(ng + pk). \tag{5}$$

Pe de altă parte, a patra şi a cincea ecuaţie (4) ne dau ecuaţiile

$$\begin{aligned} (ng - pk)\, m &= \alpha\,(\gamma n - \beta p) \\ (ng - pk)\, h &= \alpha\,(\beta g - \gamma k). \end{aligned} \tag{5'}$$

Înmulţind aceste ecuaţii membru cu membru, obţinem

$$(ng - pk)^2\, mh = \alpha^2\,[\beta\gamma\,(ng + pk) - \beta^2 pg - \gamma^2 nk].$$

Ţinînd seama de primele trei ecuaţii (4), care ne dau mh, β^2, γ^2, precum şi de ultima din aceste ecuaţii, care ne dă $\beta\gamma$, obţinem

$$(\alpha^2 - 1)(ng - pk)^2 = \alpha^2 [2(ng + pk)(ng + pk - 1) - 8nkpg]$$

ecuaţie care se scrie ţinînd seama de (5)

$$\alpha^2 = (ng - pk)^2. \tag{6}$$

Ecuaţia (6) împreună cu (5) ne dau

$$1 + \alpha^2 = 2(ng + pk). \tag{7}$$

Ţinînd seama de această formulă în ultima ecuaţie (4) obţinem

$$\alpha^2 - \beta\gamma = 1. \tag{8}$$

Avem deci teorema:

Pentru ca formulele (3) să reprezinte o transformare ce păstrează cuadrica (1), este necesar ca α, β, γ să fie coordonatele x, y, z ale unui punct al cuadricei unitate (2).

Pentru a găsi explicit coeficienţii transformării (3) să observăm că presupunînd $\alpha^2 \neq 1$, deci $\beta\gamma \neq 0$, ecuaţia (7), ecuaţia (6) şi a doua şi a treia ecuaţie (4) ne dau

$$\begin{aligned} n &= \frac{\alpha + \varepsilon}{2} a, \quad g = \frac{\alpha + \varepsilon}{2} \frac{1}{a} \quad (\varepsilon = \pm 1) \\ p &= \frac{\gamma^2}{2(\alpha + \varepsilon)} a, \quad k = \frac{\beta^2}{2(\alpha + \varepsilon)} \frac{1}{a} \end{aligned} \tag{9}$$

unde a este o cantitate oarecare nenulă.

În ce priveşte prima, a patra şi a cincea ecuaţie (4) ele sînt verificate dacă luăm

$$m = \gamma a, \quad h = \frac{\beta}{a}. \tag{10}$$

Rezultă deci, că la orice soluţie α, β, γ a ecuaţiei (8) pentru care $\beta\gamma \neq 0$, corespunde o infinitate de transformări (3), coeficienţii n, g, k, p, m, h ai acestora fiind definiţi de formulele (9) şi (10).

Prin urmare putem scrie transformările ce păstrează forma canonică (3) sub forma

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \frac{\beta}{2} y + \frac{\gamma}{2} z \\ y' &= a\left[\gamma x + \frac{\alpha + \varepsilon}{2} y + \frac{\gamma^2}{2(\alpha + \varepsilon)} z\right] (\varepsilon = \pm 1) \\ z' &= \frac{1}{a}\left[\beta x + \frac{\beta^2}{2(\alpha + \varepsilon)} y + \frac{\alpha + \varepsilon}{2} z\right] \end{aligned} \tag{11}$$

unde α, β, γ sînt legate de ecuaţia (8) şi $\alpha^2 - 1 = \beta\gamma \neq 0$.

În cazul $\alpha = 1$ sau $\alpha = -1$ ecuația (8) ne spune că sau β sau γ este zero. Dacă $\gamma = 0$ și $\alpha = 1$, putem scrie transformarea sub forma

$$x' = x + \frac{\beta}{2} y, \quad y' = ay$$
$$z' = \frac{1}{a}\left[\beta x + \frac{\beta^2}{4} y + z\right] \tag{11'}$$

unde β, a sînt parametri arbitrari și $a \neq 0$. Aceste transformări formează un grup cu doi parametri ce lasă invariantă generatoarea cuadricei (2) dată de ecuațiile $x = y = 0$. Ele se obțin din formulele (11) presupunînd $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = 1$. De asemenea, în cazul $\beta = 0$, $\alpha = 1$ obținem formulele

$$x' = x + \frac{\gamma}{2} z, \quad z' = az$$
$$y' = \frac{1}{a}\left(\gamma x + \frac{\gamma^2}{4} z + y\right) \tag{11''}$$

care ne dau grupul ce lasă invariantă generatoarea $X = Z = 0$ și avem formule analoage pentru $\alpha = -1$, cînd însă trebuie să luăm în (11) $\varepsilon = -1$.

Putem deci să considerăm formulele (11) ca formule ce ne dau grupul general pseudo-ortogonal cu convenția că în cazul $\alpha = 1$ să luăm $\varepsilon = 1$ și în cazul $\alpha = -1$ să luăm $\varepsilon = -1$.

Să observăm acum că determinantul Δ al transformării (3) se scrie

$$\Delta = \alpha(ng - pk) - \frac{\beta}{2}(mg - ph) + \frac{\gamma}{2}(mk - hn)$$

și acest determinant are pentru transformările (11) valoarea ε. Deci este pozitiv dacă $\varepsilon = 1$. Rezultă deci că transformările (11) pentru $\varepsilon = 1$ reprezintă transformările directe ale grupului pseudo-ortogonal real.

Să presupunem că $|\alpha| < 1$. Putem pune atunci

$$\alpha = \sin\theta, \quad \beta = b\cos\theta, \quad \gamma = -\frac{\cos\theta}{b}$$

și grupul de transformări directe (11) se scrie

$$x' = x\sin\theta + \frac{\cos\theta}{2}\left(by - \frac{z}{b}\right)$$
$$y' = a\left(-\frac{\cos\theta}{b} x + \frac{1+\sin\theta}{2} y + \frac{1-\sin\theta}{2b^2} z\right) \tag{12}$$
$$z' = \frac{1}{a}\left(b\cos\theta\, x + \frac{b^2(1-\sin\theta)}{2} y + \frac{1+\sin\theta}{2} z\right)$$

ce constituie un grup cu trei parametri θ, a, b.

Dacă $|\alpha| > 1$ atunci punînd $\alpha = \pm \operatorname{ch}\sigma$ putem lua $\beta = b \operatorname{sh}\sigma$, $\gamma = \dfrac{\operatorname{sh}\sigma}{b}$ şi grupul de transformări directe (11) se scrie

$$\begin{aligned} x' &= \pm x \operatorname{ch}\sigma + \frac{\operatorname{sh}\sigma}{2}\left(by + \frac{z}{b}\right), \\ y' &= a\left(\frac{\operatorname{sh}\sigma}{b}x + \frac{1 \pm \operatorname{ch}\sigma}{2}y - \frac{(1 \mp \operatorname{ch}\sigma)}{2b^2}z\right), \\ z' &= \frac{1}{a}\left(b \operatorname{sh}\sigma\, x - \frac{(1 \mp \operatorname{ch}\sigma)\, b^2}{2}y + \frac{1 \pm \operatorname{ch}\sigma}{2}z\right), \end{aligned} \tag{12'}$$

ce constituie de asemenea un grup cu trei parametri σ, a, b. Rezultă deci următoarea teoremă :

Grupul de transformări directe ce păstrează cuadrica (1) se compune fie din transformări ce păstrează generatoarele (11'), (11''), fie din transformările (12), (12').

Să observăm acum că transformările (12), (12') se deosebesc prin faptul că în cuadrica (8), coordonatele β, γ sînt de semne contrarii în primul caz şi de acelaşi semn în al doilea caz. Vom zice că formulele (12) reprezintă transformările eliptice ale grupului (11), în timp ce (12') sînt transformările hiperbolice, iar (11') sau (11'') sînt transformările parabolice.

Să observăm de asemenea, că aşa cum se constată uşor, formulele inverse ale formulelor (11) pentru $\varepsilon = 1$ sînt date de formulele

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' - \frac{\beta}{2a}y' - \frac{\gamma a}{2}z' \\ y &= -\gamma x' + \frac{1+\alpha}{2a}y' + \frac{\gamma^2}{2(1+\alpha)}az' \\ z &= -\beta x' + \frac{\beta^2}{2(1+\alpha)a}y' + \frac{1+\alpha}{2}az'. \end{aligned} \tag{12''}$$

Să considerăm acum spinorii din spaţiul euclidian E_3. Se ştie că presupunînd x_1, x_2, x_3 coordonate ortogonale reale sau complexe în E_3, deci fiind dată forma pătratică fundamentală

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

se obţine o soluţie a ecuaţiei $F = 0$, deci o direcţie nulă luînd

$$x_1 = \xi_0^2 - \xi_1^2,\ x_2 = i(\xi_0^2 + \xi_1^2),\ x_3 = -2\xi_0\xi_1 \tag{12'''}$$

şi ξ_0, ξ_1 se zice că constituie componentele unui spinor în spaţiul E_3 [1]. Să presupunem că facem transformarea de variabile

$$x = -x_3,\quad y = x_1 - ix_2,\quad z = -x_1 - ix_2.$$

În acest caz forma pătratică F devine $x^2 - yz$ și formulele (12''') iau forma simplă

$$x = 2\xi_0\xi_1, \quad y = 2\xi_0^2, \quad z = 2\xi_1^2. \tag{12^{IV}}$$

Ținînd seama de a doua formulă (11) rezultă că avem

$$\xi_0'^2 = a\left(\gamma\xi_0\xi_1 + \frac{\alpha+\varepsilon}{2}\xi_0^2 + \frac{\gamma^2}{2(\alpha+\varepsilon)}\xi_1^2\right).$$

Ținînd seama însă de faptul că membrul al doilea este un pătrat perfect, putem scrie

$$\xi_0' = \varepsilon'\left(\sqrt{\frac{a(\alpha+\varepsilon)}{2}}\xi_0 + \sqrt{\frac{a}{2(\alpha+\varepsilon)}}\gamma\xi_1\right), \quad \varepsilon' = \pm 1.$$

De asemenea ultima formulă (11) ne arată că avem

$$\xi_1' = \varepsilon''\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a(\alpha+\varepsilon)}}\xi_0 + \sqrt{\frac{\alpha+\varepsilon}{2a}}\xi_1\right), \quad \varepsilon'' = \pm 1.$$

Ținînd seama de prima formulă (11) rezultă că avem $\varepsilon'\varepsilon'' = 1$ deci ε' și ε'' au același semn. Putem deci scrie formulele de transformare a spinorului

$$\begin{aligned} \xi_0' &= \pm\left[\sqrt{\frac{a(\alpha+\varepsilon)}{2}}\xi_0 + \sqrt{\frac{a}{2(\alpha+\varepsilon)}}\gamma\xi_1\right] \\ \xi_1' &= \pm\left[\frac{\beta}{\sqrt{2a(\alpha+\varepsilon)}}\xi_0 + \sqrt{\frac{\alpha+\varepsilon}{2a}}\xi_1\right] \end{aligned} \tag{13}$$

și deci spinorul este determinat abstracție făcînd de semn, proprietate binecunoscută.

Formulele (13) ne arată că la o transformare pseudo-ortogonală (11) corespunde o transformare liniară a spinorului, determinantul acestei transformări fiind egal cu ε. În adevăr notînd cu $\mathfrak{D}$ determinantul transformării (13) avem

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2}\left(\alpha + \varepsilon - \frac{\beta\gamma}{\alpha+\varepsilon}\right) = \varepsilon.$$

Invers fiind dată o transformare liniară unimodulară a spinorului

$$\begin{aligned} \xi_0' &= \rho\xi_0 + \lambda\xi_1 \\ \xi_1' &= \varphi\xi_0 + \psi\xi_1 \end{aligned} \qquad \rho\psi - \lambda\varphi = \varepsilon \tag{13'}$$

corespunde o transformare pseudo-ortogonală prin formulele

$$\rho = \pm\sqrt{\frac{a(\alpha+\varepsilon)}{2}}, \quad \lambda = \pm\gamma\sqrt{\frac{a}{2(\alpha+\varepsilon)}}$$

$$\varphi = \pm\frac{\beta}{\sqrt{2(\alpha+\varepsilon)a}}, \quad \psi = \pm\sqrt{\frac{\alpha+\varepsilon}{2a}}$$

care ne dau

$$\beta = 2\rho\varphi, \quad \gamma = 2\lambda\psi$$
$$a = \frac{\rho}{\psi}, \quad \alpha + \varepsilon = 2\varphi\psi. \tag{13''}$$

Să observăm acum că transformările pseudo-ortogonale (11) sînt transformări reale, dacă cantităţile α, β, γ, a sînt reale, în timp ce transformarea (13) este reală dacă $a(\alpha + \varepsilon)$ este o cantitate pozitivă. Presupunînd că $a(\alpha + \varepsilon)$ este o cantitate pozitivă şi că luăm în considerare numai transformările directe deci $\varepsilon = 1$, rezultă atunci că la orice transformare pseudo-ortogonală reală cu $a(1 + \alpha) > 0$, corespunde o transformare spinorială reală (13). Invers la orice transformare liniară unimodulară (13'), reală unimodulară, corespunde o transformare pseudo-ortogonală reală.

În general formulele (13) definesc deci o reprezentare liniară a grupului pseudo-ortogonal complex şi deci şi o reprezentare liniară a grupului ortogonal complex.

Este evident că fiind dat un număr întreg pozitiv p, cantităţile

$$\xi_0^p, \quad \xi_0^{p-1}\xi_1, \quad \ldots, \quad \xi_1^p$$

suferă o transformare liniară, atunci cînd variabilele x, y, z suferă o transformare pseudo-ortogonală reală sau complexă. Avem deci o infinitate numerabilă de reprezentări liniare ale grupului ortogonal, proprietate binecunoscută.

II. Să presupunem acum că avem un tensor mixt b_j^i şi că notăm cu α_j^i coeficienţii formulelor (11). Avem atunci ca formule de transformare a tensorului mixt

$$b_r'^i\,\alpha_j^r = b_j^h\,\alpha_h^i.$$

Multiplicînd cu β_s^k, unde β_s^k sînt reciprocii determinantului $|\alpha_j^i|$, deci în cazul nostru coeficienţii formulelor (13), obţinem

$$b_s'^i = b_k^h\,\alpha_h^i\,\beta_s^k.$$

Să presupunem că tensorul b_k^h este tensorul unei transformări infinitezimale

$$x' = x + b_1^1 x + b_2^1 y + b_3^1 z$$
$$y' = y + b_1^2 x + b_2^2 y + b_3^2 z$$
$$z' = z + b_1^3 x + b_2^3 y + b_3^3 z$$

transformare ce lasă forma pătratică (2) neschimbată. Trebuie să avem deci

$$2x(b_1^1 x + b_2^1 y + b_3^1 z) - y(b_1^3 x + b_2^3 y + b_3^3 z) - z(b_1^2 x + b_2^2 y + b_3^2 z) = 0$$

ceea ce ne dă condițiile

$$b_1^1 = b_2^3 = b_3^2 = 0, \quad b_2^2 + b_3^3 = 0, \quad 2b_2^1 - b_1^3 = 0, \quad 2b_3^1 - b_1^2 = 0.$$

Avem deci pentru b'^1_2, b'^2_1 formulele de transformare

$$b'^1_2 = b_2^1(\alpha_1^1\beta_2^2 + 2\alpha_3^1\beta_2^1) + b_1^2\left(\alpha_2^1\beta_2^1 + \frac{1}{2}\alpha_1^1\beta_2^3\right) + b_3^3(\alpha_3^1\beta_2^3 - \alpha_2^1\beta_2^2)$$

$$b'^2_1 = b_2^1(\alpha_1^2\beta_1^2 + 2\alpha_3^2\beta_1^1) + b_1^2\left(\alpha_2^2\beta_1^1 + \frac{1}{2}\alpha_1^2\beta_1^3\right) + b_3^3(\alpha_3^2\beta_1^3 - \alpha_2^2\beta_1^2).$$

Făcînd calculele, deci ținînd seama că α_j^i sînt coeficienții formulelor (11) și β_j^i ai formulelor (12''), adică

$$\alpha_1^1 = \alpha, \quad \alpha_2^1 = \frac{\beta}{2}, \quad \alpha_3^1 = \frac{\gamma}{2}, \ldots$$

$$\beta_1^1 = \alpha, \quad \beta_2^1 = -\frac{\beta}{2a}, \quad \beta_3^1 = -\frac{\gamma a}{2}, \ldots$$

rezultă formulele

$$\begin{aligned} b'^1_2 &= \frac{1}{a}\left[b_2^1\frac{1+\alpha}{2} - b_1^2\frac{\beta^2}{4(1+\alpha)} + b_3^3\frac{\beta}{2}\right] \\ b'^2_1 &= a\left[-b_2^1\frac{\gamma^2}{1+\alpha} + b_1^2\frac{1+\alpha}{2} + b_3^3\gamma\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

De asemenea avem formula

$$b'^3_3 = \alpha b_3^3 + \frac{\beta}{2}b_1^2 - \gamma b_2^1. \tag{14'}$$

Formulele (14), (14') ne arată că dacă punem

$$A = b_3^3, \quad B = b_1^2, \quad C = -2b_2^1$$

cantitățile A, B, C constituie față de transformările (11) un vector contravariant. Rezultă deci că o transformare infinitezimală ce lasă invariantă forma pătratică (2) se scrie

$$\mathfrak{U} = A\left(z\frac{\partial f}{\partial z} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + B\left(x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}z\frac{\partial f}{\partial x}\right) - C\left(\frac{1}{2}y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial z}\right) \tag{15}$$

unde A, B, C sînt componentele unui vector contravariant. Rezultă deci că lungimea l a acestui vector dată de formula

$$l^2 = A^2 - BC \tag{15'}$$

este un invariant față de transformările (11).

Să vedem în ce condiţii putem anula una din componentele B, C, de exemplu B. În acest caz, ultima ecuaţie (14) ne spune atunci că trebuie să alegem γ, α aşa fel ca să avem

$$B(1+\alpha)^2 + 2A\gamma(1+\alpha) + C\gamma^2 = 0. \tag{16}$$

Această ecuaţie este o formă pătratică în $1+\alpha$ şi γ. Pentru a avea soluţii reale în α, γ trebuie ca realizantul l^2 dat de formula (15′) să fie pozitiv sau zero, deci ca lungimea vectorului A, B, C să fie reală.

Să presupunem că am anulat C. În acest caz primele formule (14) ne arată că C continuă să fie zero dacă $\beta = 0$, deci dacă transformarea este de forma (11″). Avem prin urmare

$$B' = a\left(B + \frac{A}{2}\gamma\right), \quad A' = A.$$

Rezultă deci că sau $A = 0$ şi atunci $l = 0$, sau $A \neq 0$ şi deci $l^2 = A^2 \neq 0$ şi atunci putem reduce şi B' la zero.

Avem deci teorema:

Dacă lungimea l a vectorului A, B, C al transformării (15) este reală putem reduce $\mathfrak{U}$ la una din formele canonice

$$z\frac{\partial f}{\partial z} - y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y} + 2z\frac{\partial f}{\partial x} \tag{17}$$

după cum $l \neq 0$ sau $l = 0$.

Să arătăm acum că putem reduce întotdeauna A la zero. În adevăr, să presupunem că una din cantităţile B, C nu este nulă, de exemplu C. Atunci printr-o transformare (11″) avem

$$A' = A + \frac{\gamma}{2}C$$

şi deci putem anula A'. Dacă $B = C = 0$ atunci A nu este evident zero, astfel că printr-o transformare (11′) de exemplu, rezultă $C' = -\frac{1}{a}\frac{A}{2}\beta$ şi deci C' nu este zero şi ne reducem la cazul considerat mai sus.

Să presupunem deci că avem $A = 0$. Formulele (14), (14′) se scriu atunci

$$\begin{aligned} A' &= \frac{\beta}{2}B + \frac{\gamma}{2}C \\ B' &= \frac{a}{2}\left[(\alpha+1)B + \frac{\gamma^2}{\alpha+1}C\right] \\ C' &= \frac{1}{2a}\left[\frac{\beta^2}{\alpha+1}B + (\alpha+1)C\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Rezultă că A' va fi şi el zero dacă avem

$$\beta B + \gamma C = 0.$$

Dacă B sau C este zero sîntem în cazul considerat mai sus şi deci trebuie să luăm γ sau β egal cu zero.

Dacă $B \neq 0$, $C \neq 0$ această ecuaţie are formele

$$b B - \frac{C}{b} = 0, \quad b B + \frac{C}{b} = 0 \tag{19}$$

după cum utilizăm o transformare eliptică (12) sau o transformare hiperbolică (12′). A doua poate fi verificată cu valori reale ale lui b dacă B, C sînt de semne contrarii, în timp ce prima poate fi verificată dacă B, C au acelaşi semn.

Să presupunem că sîntem în primul caz, deci că $b\,c > 0$, deci că l este imaginar. Avem atunci $C = B\,b^2$ şi ultimele formule (18), ţinînd seama de formulele (12), se scriu

$$B' = a\,B, \quad C' = \frac{b^2}{a} B. \tag{20}$$

Putem deci să presupunem că avem $B' = C'$, căci aceasta revine a alege $b = a$. În mod analog în al doilea caz printr-o transformare hiperbolică putem alege $B' = -C'$.

Avem deci teorema:

Putem întotdeauna să reducem transformarea $\mathfrak{U}$ *la forma canonică*

$$\mathfrak{U} = x \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} z \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \left[x \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2} y \frac{\partial f}{\partial x} \right] \tag{21}$$

unde ε *este egal cu* $+1, -1$ *sau zero.*

Dacă utilizăm coordonate X, Y, Z, date de formulele (1′) este uşor de văzut că avem

$$\mathfrak{U} = \frac{\partial f}{\partial X} [Y(\varepsilon - 1) + Z(\varepsilon + 1)] + X \left[\frac{\partial f}{\partial Y} (1 - \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial Z} (1 + \varepsilon) \right] \tag{22}$$

şi avem deci cazul

$$\mathfrak{U} = X \frac{\partial f}{\partial Y} - Y \frac{\partial f}{\partial X} \tag{23}$$

dacă $\varepsilon = -1$. Dacă $\varepsilon = 1$ putem lua

$$\mathfrak{U} = X \frac{\partial f}{\partial Z} + Z \frac{\partial f}{\partial X} \tag{24}$$

şi în sfîrşit avem

$$\mathfrak{U} = \frac{\partial f}{\partial X} (Z - Y) + X \left(\frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial Z} \right) \tag{25}$$

dacă $\varepsilon = 0$.

Se vede uşor că (23) reprezintă o rotaţie în variabilele X, Y deci avem ca formule de transformare

$$X' = X\cos\alpha + Y\sin\alpha,\quad Y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha,\quad Z' = Z \tag{26}$$

în timp ce (24) reprezintă o pseudo-rotaţie (o transformare hiperbolică)

$$X' = X\,\mathrm{ch}\,\alpha + Z\,\mathrm{sh}\,\alpha,\quad Z' = X\,\mathrm{sh}\,\alpha + Z\,\mathrm{ch}\,\alpha,\quad Y' = Y. \tag{27}$$

În ce priveşte cazul (25), ţinînd seama de formula (21) pentru $\varepsilon = 0$, rezultă că operatorul $\mathfrak{U}$ defineşte o transformare ce lasă variabila Z neschimbată şi deci avem o transformare (11″) cu $a = 1$ deci în variabilele X, Y, Z o transformare de forma

$$\begin{aligned} X' &= X + \frac{\gamma}{2}(Z - Y)\\ Y' &= \frac{\gamma}{2}X + \frac{8-\gamma^2}{8}Y + \frac{\gamma^2}{8}Z\\ Z' &= \frac{\gamma}{2}X - \frac{\gamma^2}{8}Y + \frac{8+\gamma^2}{8}Z. \end{aligned} \tag{28}$$

Avem deci teorema:

O transformare infinitezimală în spaţiul pseudo-euclidian în care lungimile sînt definite de formula (1), poate fi considerată sau cu o rotaţie (26) sau cu o pseudo-rotaţie (27) sau cu o transformare (28) ce păstrează una din generatoare.

Menţionăm că în cazul transformărilor ortogonale în trei variabile orice transformare infinitezimală este o rotaţie, deci avem un singur caz dat de formula (23).

III. Să considerăm acum o formă pătratică în patru variabile cu două pătrate pozitive şi două pătrate negative

$$\varphi = X^2 + Y^2 - U^2 - V^2. \tag{29}$$

Printr-o transformare de variabile de forma

$$\begin{aligned} x &= X + U,\quad y = X - U\\ u &= Y + V,\quad v = Y - V \end{aligned} \tag{30}$$

o asemenea formă se poate scrie evident sub forma canonică

$$\varphi = xy + uv. \tag{31}$$

Fie atunci

$$\begin{aligned} x &= a_1^1 x' + a_2^1 y' + a_3^1 u' + a_4^1 v'\\ y &= a_1^2 x' + a_2^2 y' + a_3^2 u' + a_4^2 v'\\ u &= a_1^3 x' + a_2^3 y' + a_3^3 u' + a_4^3 v'\\ v &= a_1^4 x' + a_2^4 y' + a_3^4 u' + a_4^4 v' \end{aligned} \tag{32}$$

o transformare care lasă invariantă forma (31). Impunînd condițiile ca să fie nuli coeficienții în x'^2, y'^2, u'^2, v'^2 avem condițiile

$$\begin{aligned} a_1^1 a_1^2 + a_1^3 a_1^4 &= 0, \quad a_2^1 a_2^2 + a_2^3 a_2^4 = 0 \\ a_3^1 a_3^2 + a_3^3 a_3^4 &= 0, \quad a_4^1 a_4^2 + a_4^3 a_4^4 = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

De asemenea, scriind că termenii în $x'u'$, $x'v'$, $y'u'$, $y'v'$ sînt nuli, avem condițiile

$$\begin{aligned} a_1^1 a_3^2 + a_3^1 a_1^2 + a_1^3 a_3^4 + a_3^3 a_1^4 &= 0 \\ a_1^1 a_4^2 + a_4^1 a_1^2 + a_1^3 a_4^4 + a_4^3 a_1^4 &= 0 \\ a_2^1 a_3^2 + a_3^1 a_2^2 + a_2^3 a_3^4 + a_3^3 a_2^4 &= 0 \\ a_2^1 a_4^2 + a_4^1 a_2^2 + a_2^3 a_4^4 + a_4^3 a_2^4 &= 0. \end{aligned} \tag{34}$$

În sfîrșit, scriind că termenii în $x'y'$ și $u'v'$ au coeficienții egali cu unitatea, avem

$$\begin{aligned} a_1^1 a_2^2 + a_2^1 a_1^2 + a_1^3 a_2^4 + a_2^3 a_1^4 &= 1 \\ a_3^1 a_4^2 + a_4^1 a_3^2 + a_3^3 a_4^4 + a_4^3 a_3^4 &= 1. \end{aligned} \tag{35}$$

Să presupunem că transformarea (32) se poate reduce prin continuitate la transformarea identică. Putem presupune prin urmare că a_i^i sînt diferiți de zero, deci că putem rezolva ecuațiile (33) sub forma

$$\begin{aligned} a_1^2 &= -\frac{a_1^3 a_1^4}{a_1^1}, \quad a_2^1 = -\frac{a_2^3 a_2^4}{a_2^2} \\ a_3^4 &= -\frac{a_3^1 a_3^2}{a_3^3}, \quad a_4^3 = -\frac{a_4^1 a_4^2}{a_4^4}. \end{aligned} \tag{36}$$

Ținînd seama de aceste formule în prima formulă (34), obținem

$$(a_1^1 a_3^2 + a_3^3 a_1^4)(a_1^1 a_3^3 - a_3^1 a_1^3) = 0.$$

Cum paranteza a doua a acestei formule tinde către 1 cînd transformarea (32) tinde la transformarea identică, rezultă că trebuie să presupunem prima paranteză nulă. Considerații analoage pentru toate ecuațiile (34) ne conduc la ecuațiile

$$\begin{aligned} a_1^1 a_3^2 + a_3^3 a_1^4 &= 0, \quad a_1^1 a_4^2 + a_1^3 a_4^4 = 0 \\ a_2^2 a_3^1 + a_3^3 a_2^4 &= 0, \quad a_2^2 a_4^1 + a_4^4 a_2^3 = 0 \end{aligned} \tag{37}$$

ecuații care ne conduc la formulele

$$\begin{aligned} a_3^2 &= t\, a_3^3, \quad a_1^4 = -t\, a_1^1 \\ a_1^3 &= m\, a_1^1, \quad a_4^2 = -m\, a_4^4 \\ a_3^1 &= n\, a_3^3, \quad a_2^4 = -n\, a_2^2 \\ a_2^3 &= p\, a_2^2, \quad a_4^1 = -p\, a_4^4 \end{aligned} \tag{38}$$

unde t, m, n, p sînt cantităţi oarecare, formule care verifică şi ecuaţiile (34). Putem deci considera ca soluţii ale ecuaţiilor (33), (34) formulele (38) şi formulele (36) în care se ţine seama de formulele (38), deci formulele

$$\begin{aligned} a_1^2 &= m\,t\,a_1^1, \quad a_2^1 = n\,p\,a_2^2 \\ a_3^4 &= -\,n\,t\,a_3^3, \quad a_4^3 = -\,m\,p\,a_4^4. \end{aligned} \tag{38'}$$

Dacă ţinem seama de formulele (38), (38') în formulele (35), aceste formule se scriu

$$a_1^1 a_2^2 (1 - mn)(1 - pt) = 1, \quad a_3^3 a_4^4 (1 - mn)(1 - pt) = 1. \tag{38''}$$

Aceste formule ne arată că trebuie să presupunem

$$1 - mn \neq 0, \quad 1 - pt \neq 0 \tag{39}$$

şi atunci putem determina a_1^1, a_2^2, a_3^3, a_4^4 prin formulele

$$\begin{aligned} a_1^1 &= Me^{\rho}, \quad a_2^2 = Me^{-\rho} \\ a_3^3 &= Me^{\lambda}, \quad a_4^4 = Me^{-\lambda} \end{aligned} \tag{39'}$$

unde ρ, λ sînt cantităţi oarecare iar M este definit de formula

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1 - mn)(1 - pt)}}. \tag{39''}$$

Avem deci următoarea teoremă:

Grupul de transformări în ea însăşi a formei pătratice (31) este dat de formulele

$$\begin{aligned} x &= M(e^{\rho}x' + n\,p\,e^{-\rho}y' + n\,e^{\lambda}u' - p\,e^{-\lambda}v') \\ y &= M(m\,t\,e^{\rho}x' + e^{-\rho}y' + t\,e^{\lambda}u' - m\,e^{-\lambda}v') \\ u &= M(m\,e^{\rho}x' + p\,e^{-\rho}y' + e^{\lambda}u' - m\,p\,e^{-\lambda}v') \\ v &= M(-t\,e^{\rho}x' - n\,e^{-\rho}y' - n\,t\,e^{\lambda}u' + e^{-\lambda}v') \end{aligned} \tag{40}$$

unde m, n, t, p sînt constante aşa fel ca $mn \neq 1$, $pt \neq 1$; ρ, λ sînt constante oarecare, iar M este definit de formula (39'').

Să observăm acum că dacă presupunem $p = 0$ formulele (40) ne dau

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1 - mn}}[e^{\rho}x' + n\,e^{\lambda}u'] \\ y &= \frac{1}{\sqrt{1 - mn}}[m\,t\,e^{\rho}x' + e^{-\rho}y' + t\,e^{\lambda}u' - m\,e^{-\lambda}v'] \\ u &= \frac{1}{\sqrt{1 - mn}}[m\,e^{\rho}x' + e^{\lambda}u'] \\ v &= \frac{1}{\sqrt{1 - mn}}[-t\,e^{\rho}x' - n\,e^{-\rho}y' - n\,t\,e^{\lambda}u' + e^{-\lambda}v'] \end{aligned} \tag{40'}$$

și prin urmare avem un grup cu cinci parametri care păstrează planul nul $x = u = 0$.

Dacă avem și $n = 0$ obținem grupul cu patru parametri

$$x = e^{\rho}x', \quad y = mte^{\rho}x' + e^{-\rho}y' + e^{\lambda}u' - me^{-\lambda}v'$$

$$u = me^{\rho}x' + e^{\lambda}u', \quad v = -te^{\rho}x' + e^{-\lambda}v'$$

ce păstrează hiperplanul $x = 0$.

Să observăm acum că un spinor din spațiul euclidian E_4 având ca formă fundamentală (31) are drept componente $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_{12} = \xi$, ce definesc varietățile nule ale formei (31) prin ecuațiile

$$\begin{aligned} \xi_1 x + \xi_2 u &= 0 \\ \xi_0 y - \xi u &= 0 \\ \xi_0 v + \xi x &= 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Ținînd seama în prima din aceste ecuații de formulele (40) obținem

$$\xi_1 (e^{\rho}x' + npe^{-\rho}y' + ne^{\lambda}u' - pe^{-\lambda}v') + \\ + \xi_2 (me^{\rho}x' + pe^{-\rho}y' + e^{\lambda}u' - mpe^{-\lambda}v') = 0.$$

Înmulțind cu ξ_0' și ținînd seama de ecuațiie (41), în variabile accentuate obținem

$$x' (\xi_1\xi_0' e^{\rho} + pe^{-\lambda}\xi_1\xi' + me^{\rho}\xi_2\xi_0' + mpe^{-\lambda}\xi_2\xi') + \\ + u' (ne^{\lambda}\xi_1\xi_0' + npe^{-\rho}\xi_1\xi' + e^{\lambda}\xi_2\xi_0' + pe^{-\rho}\xi_2\xi') = 0.$$

Aceste ecuații se pot încă scrie

$$[e^{\rho}x' (\xi_1 + m\xi_2) + e^{\lambda}u' (\xi_1 n + \xi_2)] [\xi_0' + pe^{-\lambda-\rho}\xi'] = 0$$

astfel că împărțind cu $\xi_0' + pe^{-\lambda-\rho}\xi'$ și ținînd seama că avem $\xi_1' x' + \xi_2' u' = 0$, rezultă că putem lua

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \frac{ke^{\alpha}}{\sqrt{1-mn}} (\xi_1 + m\xi_2), \quad \left(\alpha = \frac{\rho - \lambda}{2}\right) \\ \xi_2' &= \frac{ke^{-\alpha}}{\sqrt{1-mn}} (n\xi_1 + \xi_2) \end{aligned} \tag{41'}$$

unde k este un factor de proporționalitate.

Să observăm acum că ecuațiile (41) ne definesc x, y, u, v abstracție făcînd de un factor de proporționalitate, prin formulele

$$x = -\xi_0\xi_2, \quad u = \xi_1\xi_0, \quad y = \xi_1\xi, \quad v = \xi\xi_2. \tag{41''}$$

Să considerăm atunci cantităţile

$$-x + nu = \xi_0 (n\xi_1 + \xi_2)$$
$$y + mv = \xi\ (\xi_1 + m\xi_2).$$

Ţinînd seama de formulele (40) obţinem

$$-x + nu = M(-e^{\rho}x' + pe^{-\lambda}v')(1 - mn)$$
$$y + mv = M(e^{-\rho}y' + te^{\lambda}u')(1 - mn)$$

astfel că ţinînd seama şi de formulele (41′) obţinem

$$\xi_0 = \frac{k}{\sqrt{1 - pt}}[e^{\beta}\xi_0' + pe^{-\beta}\xi'], \qquad \left[\beta = \frac{\rho + \lambda}{2}\right]$$
$$\xi = \frac{k}{\sqrt{1 - pt}}[te^{\beta}\xi_0' + e^{-\beta}\xi'].$$

Inversînd aceste formule, obţinem formulele

$$\xi_0' = \frac{e^{-\beta}}{k\sqrt{1 - pt}}(\xi_0 - p\xi)$$
$$\xi' = \frac{e^{\beta}}{k\sqrt{1 - pt}}(-\xi_0 t + \xi]. \tag{42}$$

Ecuaţiile (41′) şi (42) ne arată că transformarea (40) are drept consecinţă o transformare a componentelor ξ_1, ξ_2 şi a componentelor ξ_0, ξ separat.

Luînd $k = 1$, fiecare din transformările (41′) şi (42) sînt transformări unimodulare, deci grupul pseudo-ortogonal în E_4 este produsul direct a două grupuri cu trei parametri ce sînt grupuri unimodulare în două variabile. Rezultă atunci că se pot obţine reprezentări liniare ale grupului pseudo-ortogonal din E_4 considerînd polinoame de grad p în ξ_1, ξ_2 şi polinoame de grad q în ξ_0, ξ, proprietate binecunoscută.

IV. Să considerăm acum o formă pătratică în $2n$ variabile ce se reduce la n pătrate pozitive şi n pătrate negative. O asemenea formă se poate evident scrie sub forma canonică

$$\varphi = x^i x^{n+i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{43}$$

Să arătăm că putem obţine explicit grupul ce lasă invariantă această formă şi conservă de asemenea multiplicitatea liniară nulă de dimensiune maximă

$$x^i = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

În adevăr, acest grup este dat de formulele de forma

$$\begin{aligned} x^i &= a^i_j\, x'^j \\ x^{n+i} &= b^i_k\, x'^k + c^i_k\, x'^{n+k} \end{aligned} \tag{43'}$$

în care constantele a^i_j, b^i_j, c^i_j sînt legate de relațiile

$$a^i_j c^i_k = \delta^i_k, \quad a^i_j b^i_k + a^i_k b^i_j = 0. \tag{43''}$$

Aceste formule ne arată că date fiind a^i_j, rezultă univoc determinate c^i_j, deoarece determinantul $|a^i_j|$ trebuie să fie diferit de zero. Rezultă de asemenea că determinantul $|c^i_j|$ este diferit de zero și că avem $c^i_j = \bar{a}^j_i$ unde $\bar{a}^j_i$ sînt reciprocii determinantului a^i_j. Dacă punem

$$m^j_k = a^i_j b^i_k, \qquad b^i_k = \bar{a}^s_j m^s_k$$

atunci ultimele formule (43') se scriu

$$m^j_k + m^k_j = 0$$

deci cantitățile m^j_k sînt strîmb simetrice.

Formulele (43'), (43'') definesc deci un grup cu $n^2 + \dfrac{n(n-1)}{2}$ parametri și avem teorema:

Grupul ce păstrează o varietate nulă de dimensiune maximă a formei (42) conține $n^2 + \dfrac{n(n-1)}{2}$ *parametri și poate fi dat de formulele*

$$x^i = a^i_j x'^j, \quad x^{n+i} = \bar{a}^k_i (x'^{n+k} + m^k_j x^j) \tag{44}$$

unde $\bar{a}^k_i$ *sînt reciprocii determinantului* $|a^i_j|$, *iar* m^k_j *sînt cantități strîmb simetrice în indicii* k, j.

În ce privește grupul total al formei pătratice (43), el are același număr de parametri, ca și grupul ortogonal în $2n$ variabile, deci $n(2n-1)$ parametri. Grupul ce lasă o varietate nulă de dimensiune maximă invariantă, are deci cu $\dfrac{n(n-1)}{2}$ parametri mai puțin decît grupul general al formei pătratice (43).

Să considerăm acum cazul general în care forma pătratică are un număr oarecare de pătrate pozitive și un număr oarecare de pătrate negative. Schimbînd eventual semnul formei pătratice putem presupune că numărul pătratelor negative nu întrece numărul pătratelor pozitive. Vom presupune deci că avem $n + p$ pătrate pozitive și n pătrate negative cu $n \geqslant 0$, $p \geqslant 0$ și că am redus forma pătratică la forma canonică

$$\varphi = (x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2 + 2\, y^i y^{n+i}, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{45}$$

Să considerăm grupul care păstrează varietatea nulă de dimensiune maximă

$$x^1 = \ldots = x^p = y^1 = \ldots = y^n = 0.$$

Acest grup se scrie sub forma

$$\begin{aligned} x^\alpha &= a^\alpha_\beta x'^\beta + a^\alpha_i y'^i \\ y^i &= a^i_\beta x'^\beta + a^i_k y'^k \\ y^{n+i} &= b^i_\beta x'^\beta + b^i_k y'^k + c^i_k y'^{n+k}. \end{aligned} \tag{46}$$

Este uşor de văzut însă că acest grup conservă forma (45) numai dacă avem condiţiile

$$a^i_\beta = 0, \quad a^i_j c^i_k = \delta^j_k, \quad a^\alpha_\beta a^\alpha_\gamma = \delta^\beta_\gamma$$

$$a^i_j b^i_k + a^i_k b^i_j + a^\alpha_j b^\alpha_k = 0, \quad a^i_j b^i_\beta + a^\alpha_\beta a^\alpha_j = 0.$$

Ţinînd seama de faptul că determinantul $|a^i_j|$ trebuie să fie diferit de zero avem $c^i_k = \overline{a}^k_i$ şi dacă punem $b^i_k = \overline{a}^s_i m^s_k$ obţinem relaţiile

$$a^\alpha_\beta a^\alpha_\gamma = \delta^\beta_\gamma, \quad b^i_\beta = -a^\alpha_j a^\alpha_\beta \overline{a}^i_j, \quad m^j_k + m^k_j + a^\alpha_j a^\alpha_k = 0.$$

Aceste formule ne spun că grupul formei (45), ce păstrează o varietate nulă maximală, posedă

$$n^2 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} + pn$$

parametri. Pentru $p = 1$, $n = 1$ regăsim grupurile cu doi parametri (11′), (11″).

ПСЕВДО-ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И СПИНОРЫ

РЕЗЮМЕ

Определяются псевдо-ортогональные преобразования от трех переменных, образующие трехпараметрическую группу, и показывается, при помощи спиноров в пространстве E_3, как можно получить линейное представление этой группы при помощи унимодулярной группы $\mathcal{G}_3$ от двух переменных. Во второй части работы рассматривается приведение к каноническому виду псевдо-ортогонального бесконечно малого преобразования. В третьей части даются преобразования псевдо-ортогональной группы, оставляющие инвариантной квадратичную форму, состоящую из двух положительных и двух отрицательных квадратов и показывается простым способом, при помощи спиноров в пространстве E_4, что эта группа является прямым произведением двух унимодулярных групп $\mathcal{G}_3$.

Наконец в четвертой части рассматривается для произвольной индефинитной квадратичной формы группа, оставляющая инвариантной нулевое многообразие максимального порядка, и показывается, что эта группа содержит

$$n^2 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} + pn$$

параметров, если данная форма содержит $n+p$ положительных и n отрицательных квадратов.

TRANSFORMATIONS PSEUDO-ORTHOGONALES ET SPINEURS

RÉSUMÉ

On détermine les transformations pseudo-orthogonales, dans trois variables, transformations qui constituent un groupe à trois paramètres, et l'on montre à l'aide des spineurs dans l'espace E_3, comment on peut avoir une représentation linéaire de ce groupe, par un groupe unimodulaire $\mathcal{G}_3$ à deux variables. On considère dans la deuxième partie la réduction à la forme canonique d'une transformation infinitésimale pseudo-orthogonale.

Dans la troisième partie on donne les transformations du groupe pseudo-orthogonal qui conserve une forme quadratique formée de deux carrés positifs et de deux carrés négatifs et on montre d'une manière simple à l'aide des spineurs dans l'espace E_4 que ce groupe est le produit direct de deux groupes unimodulaires $\mathcal{G}_3$.

Enfin, dans la quatrième partie on considère pour une forme quadratique indéfinie quelconque, le groupe qui conserve une variété nulle d'ordre maximum et l'on montre que ce groupe contient

$$n^2 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} + pn$$

paramètres si la forme contient $n+p$ carrés positifs et n carrés négatifs.

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs*. I. Hermann, 1938, 52.

OPERATORI INTEGRALI CARE GENERALIZEAZĂ ECUAȚIILE CU DERIVATE PARȚIALE. FORMULE DE MEDIE

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

Introducere. În primul capitol al acestei lucrări se asociază unei ecuații cu derivate parțiale liniare sau nu, cu coeficienți variabili, un operator integral, operator care se substituie ecuației diferențiale dacă funcția căreia i se aplică îndeplinește anumite condiții de derivabilitate, iar în caz contrar o generalizează. Soluțiile care verifică operatorul integral asociat pot fi considerate generalizări ale soluțiilor ecuației cu derivate parțiale respective. Mai precis, fie ecuația cu derivate parțiale, liniară cu coeficienți variabili

$$E_n(u) \equiv \sum_{k=0}^{n} X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} = 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = k, (\lambda)$$

cu $X(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ și $S_p(r)$ o familie de suprafețe

$$x_i = a_i + r\,\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m), \quad i = 1,2, \ldots, p$$

$x_i \to a_i$ cînd $r \to 0$ pentru orice $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \Delta_m$. Se arată, între alte rezultate, în primul capitol, că putem găsi totdeauna o funcție pondere $A(a; \xi)$ încît pentru orice $u(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ $(n+1)$ - derivabilă în D_p (corespunzător lui Δ_m) să avem

$$E_n(u) \equiv \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_p(1)} A(a; \xi)\, u[a + r\,\varphi(\xi)]\, d\sigma_p \qquad (\mu)$$

iar pentru soluțiile $(n+1)$ - derivabile în D_p ale ecuației (λ) să avem următoarea caracterizare integrală

$$f(a) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_p(1)} A^*(a;\ \xi)\ f[a + r\varphi(\xi)]\, d\sigma_p \qquad (\nu)$$

$A^*(a;\ \xi)$ fiind determinat în consecință.

Se înțelege că dacă în (μ) u nu mai îndeplinește condițiile de derivabilitate cerute, operatorul integral (μ) generalizează operatorul diferențial $E(u)$, iar soluțiile lui (μ) generalizează soluțiile lui (λ).

În prima parte a lucrării se face un studiu detaliat al posibilităților reprezentării unei ecuații cu derivate parțiale sau a unui sistem, printr-un operator integral sau printr-un sistem de operatori integrali.

Se studiază la început ecuațiile cu derivate parțiale, liniare, cu coeficienți variabili (λ), într-un număr oarecare de variabile. Se extind apoi rezultatele la sisteme de ecuații liniare. La urmă se consideră un operator sub forma cea mai generală.

Capitolul II este o continuare naturală a primului capitol, însă rezultatele obținute sînt fundamental diferite. Se urmărește înlăturarea operației de limită în formula (ν). *Se reușește astfel să se stabilească formule de medie pentru soluțiile analitice ale ecuațiilor diferențiale liniare, cu coeficienți variabili* (λ) *cînd se dau valorile soluțiilor pe varietăți oarecare.*

Determinarea funcției pondere $A^*(a;\ \xi)$ pune problema rezolvării unui sistem infinit de ecuații liniare cu o infinitate de necunoscute.

Se construiește un exemplu care arată că problema poate fi efectiv rezolvată.

Este necesar de făcut observația că în cazul cînd coeficienții ecuației (λ) sînt funcții analitice de variabilele complexe $x_1, x_2, \ldots, x_p$ atunci determinarea unei formule de medie pentru soluțiile corespunzătoare este simplă, determinarea funcției $A^*(a;\ \xi)$ ne mai necesitînd rezolvarea unui sistem infinit de ecuații. Rezultatul este asemănător dacă ne situăm în algebra asociată ecuației lui Laplace într-un număr oarecare de variabile [6], [7].

În sfîrșit să mai menționăm faptul că lucrarea de față continuă pe [2]; problemele se pun însă din alt punct de vedere și se folosesc alte mijloace de a le rezolva.

I. OPERATORII DIFERENȚIALI DEFINIȚI CA LIMITE DE OPERATORI INTEGRALI

1. *Ecuații diferențiale liniare de ordinul întîi.* Fie ecuația

$$E(u) \equiv X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_p \frac{\partial u}{\partial x_p} = 0 \qquad (1)$$

cu

$$X_k \equiv X_k(x_1, x_2, \ldots, x_p), \qquad k = 1, 2, \ldots, p$$

și $f(x) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ o funcție de două ori derivabilă într-un domeniu D_x din spațiul cu p dimensiuni $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Fie de asemenea și funcția de $2p$ variabile construită cu coeficienții X_k ai ecuației (1)

$$A(x;\ \xi) \equiv A(x_1, x_2, \ldots, x_p;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) \equiv \sum_{k=1}^{p} X_k\, \xi_k \tag{2}$$

unde $\xi_k (k = 1, 2, \ldots, p)$ sînt coordonatele unui punct curent pe sfera S_p de rază unitatea

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_p^2 = 1.$$

Dacă punem

$$f(x + r\,\xi) \equiv f(x_1 + r\,\xi_1, x_2 + r\,\xi_2, \ldots, x_p + r\,\xi_p),\ r > 0$$

vom vedea îndată că pentru $x + r\,\xi \in D_p$, $S_p \subset D_p$, avem

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}{\pi} \cdot \lim_{r \to 0} \frac{\partial}{\partial r} \int_{S_p} A(x;\ \xi)\, f(x + r\,\xi)\, d\sigma_p \equiv E(f) \tag{3}$$

unde $d\sigma_p$ este elementul de arie al sferei S_p, și prin urmare, pentru soluțiile f ale ecuației $E = 0$, de două ori derivabile în D_p, avem următoarea caracterizare integrală

$$\lim_{r \to 0} \frac{\partial}{\partial r} \int_{S_p} A(x;\ \xi)\, f(x + r\,\xi)\, d\sigma_p = 0. \tag{4}$$

Pentru demonstrație folosim dezvoltarea lui $f(x + r\,\xi)$, oprită la primii doi termeni

$$f(x + r\,\xi) = f(x) + \frac{r}{1!} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\, \xi_i + \\ + \frac{r^2}{2!} \left[\sum_{i=1}^{p} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right]^{(2)} f(x + \theta r \xi),\ 0 < \theta < 1$$

și cum

$$\int_{S_p} \xi_i\, d\sigma_p = 0,\ \int_{S_p} \xi_i\, \xi_j\, d\sigma_p = 0,\ \int_{S_p} \xi_i^2\, d\sigma_p = \pi\, \Gamma^{-1}\left(\frac{p+2}{2}\right)$$

urmează că

$$\int_{S_p} A(x;\ \xi)\, f(x)\, d\sigma_p = 0 \tag{5}$$

$$\int_{S_p} A(x;\ \xi)\, r \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \xi_i\, d\sigma_p = r\,\pi\,\Gamma^{-1}\left(\frac{p+2}{2}\right) \cdot E(f).$$

Derivatele parțiale de ordinul doi ale lui f fiind mărginite în D_p, rezultă că dacă derivăm în raport cu r integrala

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}{\pi}\int_{S_p} A(x;\ \xi)\ f(x+r\xi)\ d\sigma_p$$

și trecem apoi la limită obținem (3), iar dacă $E(f)=0$ obținem (4).

Să observăm însă că din cauza lui (5) putem evita operația de derivare în raport cu r încît putem scrie și

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}{\pi}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_{S_p} A(x;\ \xi)\ f(x+r\xi)\ d\sigma_p \equiv E(f) \tag{3'}$$

iar dacă $E(f)=0$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_{S_p} A(x;\ \xi)\ f(x+r\xi)\ d\sigma_p = 0. \tag{4'}$$

În mod asemănător se poate arăta că pentru soluțiile f de două ori derivabile în D_p ale ecuației

$$E(u)+u=0$$

avem caracterizarea integrală

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\sigma_p}\int_{S_p}\left[1+A^*(x;\ \xi)\frac{\partial}{\partial r}\right] f(x+r\xi)\ d\sigma_p = 0 \tag{6}$$

cu

$$A^*(x;\ \xi)=\frac{\sigma_p}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right) A(x;\ \xi)$$

iar σ_p aria sferei S_p.

Din relațiile găsite (3), (4), (3'), (4'), (6) se vede că funcția pondere $A(x;\ \xi)$ depinde atît de punctul x cît și de un punct curent ξ de pe sfera S_p de rază unitatea. Dacă funcția A este independentă de x atunci ecuația $E(u)=0$ este cu coeficienți constanți, caz tratat într-o lucrare anterioară [2].

Dacă obligăm ca funcția pondere A să depindă de un punct curent de pe suprafața $S_p(r)$ de rază r, formulele (4) și (4') devin respectiv

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\int_{S_p(r)} A(x;\ r\xi)\, f(x+r\xi)\, d\sigma_p = 0 \tag{4''}$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\int_{S_p(r)} A(x;\ r\xi)\, f(x+r\xi)\, d\sigma_p = 0 \tag{4'''}$$

iar (3) se transformă în

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}{2\pi} \cdot \lim_{r\to 0} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_{S_p(r)} A(x; r\xi) f(x + r\xi)\, d\sigma_p \equiv E(f). \qquad (3'')$$

În toate aceste formule $d\sigma_p$ este elementul de arie pe sfera S_p de rază unitate.

2. *Familii de suprafeţe care conţin ca element un punct.* Fie (S) o familie de suprafeţe definite parametric de

$$(S) \qquad x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, q \qquad (7)$$

cu $(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in D_m$, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_n$. Vom spune că familia de suprafeţe S conţine ca element un punct dacă există o submulţime $\Delta_n' \subset \Delta_n$, nevidă, încît pentru $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_n'$, ecuaţiile (S) să fie independente de $t_1, t_2, \ldots, t_m$,

$$(S') \qquad x_i = \varphi_i^*(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \qquad (8)$$

cu $\varphi_i^*(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ continue în Δ_n', adică pentru orice punct din Δ_n', (S') să se reducă la un punct.

Mulţimea sferelor $S_p(R)$ de centru $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ şi rază R, de ecuaţii

$$x_i = a_i + R\,\xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

cu

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_p^2 = 1$$

formează o astfel de familie cu $\Delta_n = (-\infty, +\infty)$ şi $\Delta_n' = \{0\}$, în schimb familia de hiperbole

$$x^2 - y^2 = \lambda^2 \qquad (9)$$

nu formează o astfel de familie, deoarece pentru orice $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, $\lambda \neq 0$ curba corespunzătoare din familie este o hiperbolă echilateră, iar pentru $\lambda = 0$ se reduce la două drepte perpendiculare.

Dacă considerăm însă ecuaţiile

$$x = \lambda \operatorname{ch} t, \qquad y = \lambda \operatorname{sh} t \qquad (10)$$

care pentru $t \in [a, b]$ şi $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ definesc tot o familie de curbe şi care sînt de fapt arce de hiperbole echilatere din familia (9), această familie conţine ca element un punct, deoarece pentru $\lambda = 0$ şi pentru orice $t \in [a, b]$, avem $x = 0$, $y = 0$. Aceasta se datoreşte faptului că $\operatorname{ch} t$ şi $\operatorname{sh} t$ sînt mărginite pentru $t \in D_m = [a, b]$. Dacă $t \in (-\infty, +\infty)$ acest fapt nu mai rămîne adevărat. Rezultă de aici că prin modificarea convenabilă a domeniului D_m, o familie (S) oarecare devine în domeniul transformat o familie care conţine ca elemente, puncte.

3. *Generalizare.* Rezultatele obţinute la § 1 pot fi generalizate cu uşurinţă, prin înlocuirea sferei S_p cu o suprafaţă sau o porţiune de

suprafață S_p care are sau nu elemente la infinit. În adevăr să considerăm ecuațiile

$$x_i = a_i + r\,\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m), \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad m < p \tag{11}$$

care pentru $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in D_m$, a_i reali, r fix, definesc o porțiune de suprafață $S_p(r)$ în spațiul cu p dimensiuni $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Vom presupune că funcțiile φ_i sînt mărginite în D_m, deci familia de suprafețe (11), cu r parametru, conține ca element punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$.

Vom mai impune suprafeței $S_p(1)$, ce se obține din (11) făcînd $r = 1$, de a avea element de suprafață pentru orice $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ în D_m. Din condițiile impuse rezultă că pentru orice r finit, suprafața $S_p(r)$ nu are elemente la infinit. Vom vedea mai tîrziu că putem înlătura aceste restricții.

Să construim acum un sistem de funcții ortonormale funcțiilor φ_i,

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$$

relativ la suprafața S_p (1). Funcțiile ψ_k vor fi de forma

$$\psi_k = b_{1k}\,\varphi_1 + b_{2k}\,\varphi_2 + \ldots + b_{pk}\,\varphi_p \tag{12}$$

cu b_{ik} date de sistemul

$$(\psi_k, \varphi_i) = b_{1k}(\varphi_1, \varphi_i) + b_{2k}(\varphi_2, \varphi_i) + \ldots + b_{pk}(\varphi_p, \varphi_i) = \delta_k^i \tag{13}$$

unde δ_k^i este simbolul lui Kronecker și unde am notat

$$(\varphi_i, \varphi_j) = (\varphi_j, \varphi_i) = \int_{S_p(1)} \varphi_i\,\varphi_j\,d\sigma_p \tag{14}$$

$d\sigma_p$ fiind elementul de arie al suprafeței $S_p(1)$. Determinantul sistemului (13), care este determinantul lui Gram [1], este diferit de zero, deoarece presupunem că funcțiile φ_k sînt liniar independente. Se știe [1]*) că determinantul lui Gram în această situație nu este numai nenul ci și pozitiv. În cazul nostru determinantul sistemului este

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_1) & \ldots & (\varphi_p, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_2) & \ldots & (\varphi_p, \varphi_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\varphi_1, \varphi_p) & (\varphi_2, \varphi_p) & \ldots & (\varphi_p, \varphi_p) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{15}$$

Dacă D_m are toate punctele la distanță finită, iar φ_i sînt mărginite în D_m și integrabile pe $S_p(1)$, urmează că sistemul (13), pentru orice k, are o soluție unică și bine determinată și prin urmare funcțiile ψ_k sînt unic determinate și integrabile pe $S_p(1)$.

Să construim acum funcția pondere $A(x;\ \xi) = A(x_1, x_2, \ldots, x_p, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ dată de

$$A(x;\ \xi) = X_1\psi_1 + X_2\psi_2 + \ldots + X_p\psi_p, \tag{16}$$

unde X_k sînt coeficienții ecuației (1) iar ψ_p funcțiile determinate mai sus.

*) p. 66.

Dacă presupunem că $f(x_1, \ldots, x_p)$ are derivate de ordinul întîi continue în $\Delta_p \subset S_p$, iar derivatele de ordinul doi sînt mărginite urmează că avem

$$\lim_{r \to 0} \frac{\partial}{\partial r} \int_{S_p(1)} A(a; \xi) f[a + r\varphi(\xi)] \, d\sigma_p = E(f) \tag{17}$$

unde am pus

$$f[a + r\varphi(\xi)] = f[a_1 + r\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_m), \ldots, a_p + r\varphi_p(\xi_1, \ldots, \xi_m)]$$

iar dacă f este o soluție a ecuației $E = 0$ urmează că avem pentru f următoarea caracterizare integrală

$$\lim_{r \to 0} \frac{\partial}{\partial r} \int_{S_p(1)} A(a; \xi) f[a + r\varphi(\xi)] \, d\sigma_p = 0 \tag{18}$$

cu $a + r\varphi(\xi) \in \Delta_p$, $(\xi) \in S_p(1)$, $0 \leqslant r \leqslant r_0$, și se arată în mod asemănător ca la § 1, avîndu-se însă în vedere (13).

Înainte de a înlătura o parte din condițiile impuse domeniului D_m și funcțiilor φ_i să mai obținem cîteva relații integrale, deosebite de cele stabilite mai sus.

Să considerăm de astă dată funcțiile ψ_k în număr de $p + 1$ date de

$$\psi_k = b_{0k}\varphi_0 + b_{1k}\varphi_1 + \ldots + b_{pk}\varphi_p, \quad k = 0, 1, \ldots, p \tag{19}$$

unde $\varphi_0 \equiv 1$, și să determinăm constantele b_{ik} din sistemele

$$\begin{aligned} &b_{00}(\varphi_0, \varphi_0) + b_{10}(\varphi_1, \varphi_0) + \ldots + b_{p0}(\varphi_p, \varphi_0) = -1 \\ &b_{00}(\varphi_0, \varphi_i) + b_{10}(\varphi_1, \varphi_i) + \ldots + b_{p0}(\varphi_p, \varphi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p \end{aligned} \tag{20}$$

și

$$b_{0k}(\varphi_0, \varphi_i) + b_{1k}(\varphi_1, \varphi_i) + \ldots + b_{pk}(\varphi_p, \varphi_i) = \delta_i^k \tag{20'}$$

cu $i = 0, 1, 2, \ldots, p$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Pentru orice k, determinantul sistemului corespunzător este același și anume determinantul lui Gram de ordin $p + 1$, pe care îl presupunem diferit de zero, încît b_{ik} să rezulte în mod unic. Funcțiile ψ_k, date de (19), rezultă în mod unic și se verifică imediat că avem pentru

$$A^*(a; \xi) = \psi_0 + \psi_1 X_1 + \psi_2 X_2 + \ldots + \psi_p X_p \tag{21}$$

cu

$$\begin{aligned} \psi_k &= \psi_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \\ X_k &= X_k(a_1, a_2, \ldots, a_p) \end{aligned}$$

următoarea formulă

$$f(a) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \int_{S_p(1)} A^*(a; \xi) f[a + r\varphi(\xi)] \, d\sigma_p. \tag{22}$$

Să impunem acum funcțiilor ψ_k date de (19), cu $\varphi_0 \equiv 1$, condițiile

$$b_{00}(\varphi_0, \varphi_i) + b_{10}(\varphi_1, \varphi_i) + \ldots + b_{p0}(\varphi_p, \varphi_i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, p$$

și

$$b_{0k}(\varphi_0, \varphi_i) + b_{1k}(\varphi_1, \varphi_i) + \ldots + b_{pk}(\varphi_p, \varphi_i) = \delta_i^k,$$
$$i = 0, 1, \ldots, p, \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

și cum cerem ca ψ_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ să fie unice, rezultă cu necesitate că $\psi_0 \equiv 0$. Deci pentru funcția pondere

$$A^{**}(a; \xi) = \psi_1 X_1 + \psi_2 X_2 + \ldots + \psi_p X_p$$

ψ_k și X_k depinzînd de aceleași argumente ca și în (21), avem pentru soluțiile f ale ecuației (1), următoarea caracterizare integrală

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \int_{S_p(1)} A^{**}(a; \xi) f[a + r\varphi(\xi)] \, d\sigma_p = 0 \tag{23}$$

iar dacă f nu este soluție a ecuației $E(f) = 0$, avem

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \int_{S_p(1)} A^{**}(a; \xi) f[a + r\varphi(\xi)] \, d\sigma_p = E(f). \tag{23'}$$

Este evident că formulele (23) sau (18) prezintă caracterizări integrale ale soluțiilor aceleiași ecuații diferențiale (1). Între cele două formule există totuși o deosebire și anume, prima (18) poate fi numită o *caracterizare integro-diferențială*, pe cînd (23) poate fi considerată ca o *caracterizare integrală*, fiind eliberată complet de caracterul diferențial.

În fine, dacă în (23) înlocuim pe $A^{**}(a; \xi)$ cu

$$\overline{A}^{**}(a; \xi) = A^{**}(a; \xi) - \frac{r}{S_p}$$

obținem pentru soluțiile f ale ecuației (1) următoarea formulă

$$f(a) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \int_{S_p(1)} \overline{A}^{**}(a; \xi) f[a + r\varphi(\xi)] \, d\sigma_p.$$

4. Înlăturarea a o parte din restricții. În alineatul precedent s-a impus suprafeței $S_p(1)$ de a nu avea element la infinit, această restricție răsfrîngîndu-se și asupra lui D_m. În fine pentru funcțiile φ_i se cerea a fi mărginite în D_m. Toate aceste condiții urmăreau convergența integralelor

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{S_p(1)} \varphi_i \varphi_j \, d\sigma_p$$

dar acest fapt se poate întîmpla, bineînțeles, în condiții mai largi atît pentru $S_p(1)$ cît și pentru φ_i.

În fine să mai facem observaţia că în formulele (19) funcţiile φ_k pot fi înlocuite cu un sistem de $p+1$ funcţii Φ_k, oarecare, însă date, deoarece dacă nu le-am considera date, determinarea lor prin sistemul (20) ridică o problemă de sisteme de ecuaţii integrale mult prea complicată.

Această remarcă însă permite înlăturarea restricţiilor privitoare la D_m cît şi la φ_i. În adevăr, dacă luăm pentru funcţiile ψ_k (19) expresiile

$$\psi_k = b_{0k}\Phi\varphi_0 + b_{ik}\Phi\varphi_1 + \ldots + b_{pk}\Phi\varphi_p\,, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ p$$

funcţia Φ, *fiind o funcţie de convergenţă*, aleasă în aşa fel încît integralele

$$\int_{S_p(1)} \Phi\,\varphi_k\,\varphi_i\,d\sigma_p \tag{24}$$

să fie convergente, nu mai este necesar ca φ_k să fie mărginite, iar D_m şi $S_p(1)$ pot avea elemente la infinit.

De exemplu dacă φ_k sînt polinoame iar $S_p(1)$ este o bandă infinită în spaţiul cu p dimensiuni, pentru funcţia Φ se poate lua

$$\Phi = \exp\,(-\xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_m^2)$$

şi convergenţa integralelor (24) este asigurată.

5. *Consecinţe.* Să considerăm formula (17) din § 3. Din modul cum a fost dedusă, rezultă că limita derivatei parţiale în raport cu parametrul r a unui operator integral, construit după o regulă bine determinată este identică cu operatorul diferenţial (1), dacă funcţia f de sub semnul integral este $(n+1)$-derivabilă în domeniul D_m. Să presupunem acum că funcţia f nu mai îndeplineşte această condiţie şi să considerăm, în sine, operatorul integrodiferenţial

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}\int_{S_p(1)} A\,(a;\ \xi)\,f\,[a + r\varphi\,(\xi)]\,d\sigma_p = 0. \tag{18}$$

Pentru ca această operaţie să existe se cer mult mai puţine condiţii funcţiei f decît cele impuse anterior. Putem deci afirma că relaţia (18) generalizează ecuaţia (1) şi numai cînd f este $(n+1)$-derivabilă coincide cu ecuaţia (1).

Întrucît (1) este o ecuaţie cu derivate parţiale, şi cum un operator integral cere mai puţine condiţii funcţiei f, este natural să ne debarasăm de orice operaţie de derivare parţială, fie chiar şi în raport cu parametrul r. Acest fapt îl realizează formula (23'), unde nu mai intervine nici un operator diferenţial.

Vom spune că ecuaţia cu derivate parţiale (1) este generalizată fie de *operatorul integrodiferenţial* (18) fie de *operatorul integral* (23). În ambele cazuri, în condiţii speciale pentru funcţia f, cei doi operatori coincid cu ecuaţia diferenţială (1).

Rezultatele obţinute în aceste alineate pot fi generalizate atît pentru ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior, pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cît şi pentru operatori diferenţiali oarecare. Aceste extinderi constituie obiectul alineatelor următoare.

6. *Ecuații cu derivate parțiale, liniare, de ordin oarecare.* Să considerăm acum ecuația

$$E(u) \equiv \sum_{k=0}^{n} X_{i_1 i_2 \dots i_p} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_p^{i_p}} = 0, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_p = k \tag{25}$$

cu

$$X_{i_1 i_2 \dots i_p} = X_{i_1 i_2 \dots i_p}(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

Ne propunem să extindem toate rezultatele alineatelor precedente la această clasă de ecuații. În acest scop să considerăm și aici familia de suprafețe, $S_p(r)$, definite de reprezentarea parametrică

$$x_j = a_j + r\varphi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \qquad j = 1, 2, \dots, p \tag{26}$$

cu Δ_m domeniul de variație al variabilelor $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, unde funcțiile φ_i sînt mărginite. Fie D_p^* domeniul variabilelor x_i dedus din transformarea (26).

În $D_p \supset D_p^*$, deci și $D_p \supset S_p(r)$, vom considera funcția $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$, $(n+1)$ - derivabilă. Asupra suprafețelor $S_p(r)$ mai impunem condiția de a avea element de suprafață.

Din condițiile satisfăcute de φ_i rezultă că pentru $r = 0$, $x_j = a_j$, deci familia de suprafețe $S_p(r)$ conține punctul $M(a_1, a_2, \dots, a_p)$.

a) Să construim acum funcțiile

$$\Psi_{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_j b_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} (\varphi_1)^{j_1} (\varphi_2)^{j_2} \dots (\varphi_p)^{j_p} \tag{27}$$

cu

$$j_1 + j_2 + \dots + j_r = 0, 1, \dots, n,$$

$$i_1 + i_2 + \dots + i_p = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$b_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ fiind constante ce se determină prin relațiile

$$\frac{1}{j_1!\, j_2! \dots j_p!} \int_{S_p(1)} [\Psi_{i_1 i_2 \dots i_p} (\varphi_1)^{j_1} (\varphi_2)^{j_2} \dots (\varphi_p)^{j_p}]\, d\sigma_p = \delta_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_p} \tag{28}$$

unde $d\sigma_p$ este elementul de suprafață pe $S_p(1)$.

Determinantul sistemului (28), determinant pe care îl presupunem diferit de zero, deci toate funcțiile $(\varphi_1)^{k_1} (\varphi_2)^{k_2} \dots (\varphi_p)^{k_p}$ sînt liniar independente, este dat de

$$\left| \frac{1}{j_1!\, j_2! \dots j_p!} \int_{S_p(1)} (\varphi_1)^{j_1} \dots (\varphi_p)^{j_p} (\varphi_1)^{k_1} \dots (\varphi_p)^{k_p}\, d\sigma_p \right| \tag{29}$$

și este același oricare ar fi $i_1, i_2, \dots, i_p$. Urmează că toate funcțiile $\Psi_{i_1 i_2 \dots i_p}$, în număr de C_{n+p}^n sînt unic determinate. Conform ipotezelor făcute asupra lui D_p și asupra funcțiilor φ_i deducem că toate elementele determinantului (29) sînt finite.

Să formăm acum funcţia

$$A(a;\ \xi) = \sum_{k=0}^{n} r^{n-k} X_{i_1 i_2 \dots i_p} \Psi_{i_1 i_2 \dots i_p},\ i_1 + i_2 + \dots + i_p = k \quad (30)$$

unde $X_{i_1 i_2 \dots i_p}(a_1, a_2, \dots, a_p)$ sînt coeficienţii ecuaţiei date (25) iar $\Psi_{i_1 i_2 \dots i_p}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ sînt funcţiile determinate din sistemul (28).

Se poate verifica imediat că avem următoarea relaţie integrală

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_p(1)} A(a;\ \xi)\ f[a + r\varphi(\xi)]\ d\sigma_p = E(f) \quad (31)$$

iar pentru soluţiile ecuaţiei $E = 0$, $(n+1)$ - derivabile în $D_p \supset S_p$, avem următoarea *caracterizare integrală*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_p(1)} A(a;\ \xi) f[a + r\varphi(\xi)]\ d\sigma_p = 0 \quad (31')$$

$S_p(1)$ fiind suprafaţa din familia (26) ce se obţine pentru $r = 1$.

Dacă luăm pentru $A(a;\ \xi)$ expresia

$$A^*(a;\ \xi) = -\frac{r^n}{S_p} + A(a;\ \xi)$$

atunci avem pentru f soluţie a ecuaţiei (25)

$$f(a) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_p} A^*(a;\ \xi) f(a + r\varphi(\xi))\ d\sigma_p. \quad (31'')$$

b) În aceleaşi condiţii să construim funcţiile

$$\Psi_0 = \frac{1}{S_p}$$

$$\Psi_i = \sum_{k=1}^{p} b_k^i \varphi_k, \qquad (i = 1, 2, \dots, p)$$

$$\Psi_{i_1 i_2} = \sum_{j,\alpha} b_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} (\varphi_{\alpha_1})^{j_1} (\varphi_{\alpha_2})^{j_2} \quad (32)$$

. . . . . .

$$\Psi_{i_1 i_2 \dots i_k} = \sum_{j,\alpha} b_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} (\varphi_{\alpha_1})^{j_1} (\varphi_{\alpha_2})^{j_2} \dots (\varphi_{\alpha_k})^{j_k}$$

cu $j_1 + j_2 + \ldots + j_k = i_1 + i_2 + \ldots + i_k = k = 1, 2, \ldots, n$, $i_k, j_k \leqslant p$, întregi pozitivi sau nuli; să impunem funcțiilor Ψ condițiile

$$S_p = \int_{S_p(1)} d\sigma_p, \quad \int_{S_p(1)} \Psi_i \varphi_k \, d\sigma_p = \delta_k^i$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{j_1!\, j_2! \ldots j_k!} \int_{S_p(1)} \Psi_{i_1 i_2 \ldots i_k} (\varphi_{\alpha_1})^{j_1} (\varphi_{\alpha_2})^{j_2} \ldots (\varphi_{\alpha_k})^{j_k} \, d\sigma_p = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} \tag{33}$$

$$(j_1 + j_2 + \ldots + j_k = k)$$

condiții care determină în mod unic numerele b, dacă determinanții sistemelor respective sînt diferiți de zero.

Se observă că procedeul de determinare al funcțiilor Ψ este mult mai simplu deoarece numărul parametrilor b variază cu indicii $i_1, i_2, \ldots, i_k$ și anume de la p pînă la C^k_{p+k-1}.

Cu elementele de mai sus să formăm operatorul

$$A^*\left(a; \xi; \frac{\partial}{\partial r}\right) = X_0 \Psi_0 + \frac{1}{1!} \sum X_i \Psi_i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2!} \sum X_{i_1 i_2} \Psi_{i_1 i_2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!} \sum X_{i_1 i_2 \ldots i_n} \Psi_{i_1 i_2 \ldots i_n} \frac{\partial^n}{\partial r^n} \tag{34}$$

cu

$$X_{i_1 i_2 \ldots i_k}(a_1, a_2, \ldots, a_p)$$

coeficienții ecuației (25) iar

$$\Psi_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$$

funcțiile determinate din (32) și (33). Din modul cum au fost obținute Ψ rezultă imediat că avem relația

$$\lim_{r \to 0} \int_{S_p(1)} A^*\left(a; \xi; \frac{\partial}{\partial r}\right) f[x + r\varphi(\xi)] \, d\sigma_p = E(f) \tag{35}$$

funcția f fiind presupusă $(n+1)$ - derivabilă în domeniul $D_p \supset S_p$. În fine dacă f este o soluție a ecuației (25) urmează că avem următoarea caracterizare *integrodiferențială*

$$\lim_{r \to 0} \int_{S_p(1)} A^*\left(a; \xi; \frac{\partial}{\partial r}\right) f[x + r\varphi(\xi)] \, d\sigma_p = 0 \tag{36}$$

$S_p(1)$ fiind suprafața din familia (26) obținută pentru $r = 1$.

Dacă în (32) luăm pentru Ψ_0 expresia

$$\Psi_0 = \frac{1}{S_p} - \frac{1}{S_p} \cdot \frac{1}{X_0(a_1, a_2, \ldots, a_p)}, \quad X_0(a_1, \ldots, a_p) \neq 0 \tag{37}$$

iar celelalte funcţii Ψ le lăsăm neschimbate, atunci obţinem şi

$$f(a) = \lim_{r \to 0} \int_{S_p(1)} A^* \left(a;\ \xi;\ \frac{\partial}{\partial r} \right) f[x + r\varphi(\xi)]\, d\sigma_p \tag{38}$$

pentru orice a astfel ca $a + r\varphi(\xi) \in D_p$.

7. *Cazul general.* În alineatele precedente am considerat numai ecuaţii liniare însă se poate arăta uşor că putem transforma orice ecuaţie diferenţială

$$F\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial^n u}{\partial x_p^n}\right) = 0 \tag{39}$$

într-o relaţie asemănătoare în care $u,\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^n u}{\partial x_p^n}$, se înlocuiesc cu limite de operatori integrali.

În acest scop să considerăm operatorul diferenţial

$$\frac{\partial^{i_1 + i_2 + \ldots + i_p}}{\partial x_1^{i_1}\, \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_p^{i_p}}. \tag{40}$$

Conform procedeului prezentat mai sus, trebuie să construim funcţiile

$$\Psi_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \sum_j b_{j_1 j_2 \ldots j_p}^{i_1 i_2 \ldots i_p} (\varphi_1)^{j_1} (\varphi_2)^{j_2} \ldots (\varphi_p)^{j_p}$$

cu $j_1 + j_2 + \ldots + j_p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, $b_{j_1 j_2 \ldots j_p}^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ fiind constante ce se determină din condiţiile

$$\frac{1}{j_1!\, j_2! \ldots j_p!} \int_{S_p(1)} \Psi_{i_1 i_2 \ldots i_p} (\varphi_1)^{j_1} (\varphi_2)^{j_2} \ldots (\varphi_p)^{j_p}\, d\sigma_p = \delta_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_p} \tag{41}$$

şi unde indicii $i_1, i_2, \ldots, i_p$ sînt ficşi. Determinantul sistemului (41) îl presupunem diferit de zero şi se observă că este acelaşi dacă indicii i_k se schimbă.

Din modul cum sînt construite funcţiile Ψ urmează că operatorul integral

$$Y_{i_1 i_2 \ldots i_p}(f) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^{i_1 + i_2 + \ldots + i_p}} \int_{S_p(1)} f[x + r\varphi(\xi)]\, \Psi_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, d\sigma_p \tag{42}$$

coincide cu operatorul diferenţial (40)

$$Y_{i_1 \ldots i_p}(f) \equiv \frac{\partial^{i_1 + i_2 + \ldots + i_p} f}{\partial x_1^{i_1}\, \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_p^{i_p}}$$

dacă f este $(i_1 + i_2 + \ldots + i_p + 1)$ - derivabilă, iar în caz contrar, generalizează acest operator. Deducem imediat că ecuația diferențială (39) poate fi înlocuită cu relația

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p, Y_0(u), Y_1(u), \ldots, Y_{p_p \ldots p}(u)) = 0 \qquad (43)$$

și că atunci cînd u este numai integrabil, adică toți operatorii $Y(u)$ au sens, relația (43) generalizează pe (39), și numai în condiții mult mai restrictive, precizate mai sus, (43) coincide cu (39).

Să determinăm acum funcțiile $\Psi_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ în modul următor. Fie

$$\Psi_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \sum_j b^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_p} (\varphi_1)^{j_1} (\varphi_2)^{j_2} \ldots (\varphi_p)^{j_p}$$

cu i_k ficși și $j_1 + j_2 + \ldots + j_p = i_1 + i_2 + \ldots + i_p$, constantele $b^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ determinate de

$$\frac{1}{j_1 ! \, j_2 ! \ldots j_p !} \int_{S_p(1)} \Psi_{i_1 i_2 \ldots i_p} (\varphi_1)^{j_1} (\varphi_2)^{j_2} \ldots (\varphi_p)^{j_p} \, d\sigma_p = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_p}.$$

Se vede imediat că condițiile impuse indicilor j_k modifică complet rezolvarea problemei. Să formăm acum operatorul integrodiferențial

$$Y^*_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{(i_1 + i_2 + \ldots + i_p) !} \frac{\partial^{i_1 + i_2 + \ldots + i_p}}{\partial r^{i_1 + i_2 + \ldots + i_p}} \int_{S_p(1)} \Psi_{i_1 i_2 \ldots i_p} f[a + r\varphi(\xi)] \, d\sigma_p. \qquad (44)$$

Din condițiile impuse funcției Ψ urmează că

$$Y^*_{i_1 i_2 \ldots i_p}(f) \equiv \frac{\partial^{i_1 + i_2 + \ldots + i_p} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_p^{i_p}}$$

dacă f este $(i_1 + i_2 + \ldots + i_p + 1)$ - derivabilă, iar în caz contrar, generalizează acest operator. Rezultă imediat că relația (39) poate fi generalizată de relația integrodiferențială

$$F[x_1, x_2, \ldots, x_p, Y_0^*(u), Y_1^*(u), \ldots, Y^*_{p_p \ldots p}(u)] = 0$$

cu care nu coincide decît în situația specială semnalată mai sus.

8. *Sisteme de ecuații liniare.* Să considerăm sistemul de ecuații liniare

$$L_{ij}(y_j) = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, q \qquad (45)$$

cu

$$L_{ij}(y_j) = \sum_{k=0}^{n} X^{ij}_{k_1 k_2 \ldots k_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \frac{\partial^k y_j}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_p^{k_p}} = 0,$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_p = k \qquad (46)$$

şi ne propunem să-l transformăm într-un sistem de ecuaţii în care să intervină numai limite de operatori integrali. În acest scop fie o familie de suprafeţe $S_p(r)$, dată de

$$x_j = a_j + r\varphi_j(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m), \qquad j = 1, 2, \ldots, p \tag{47}$$

funcţiile φ_j îndeplinind aceleaşi condiţii ca şi la § 6. Funcţiile $\Psi_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ date de (27) sînt aceleaşi pentru fiecare din operatorii L_{ij} ce intervin în (45), deoarece considerăm valorile funcţiilor y_j date pe o aceeaşi suprafaţă $S_p(r)$ din familia (47).

Funcţia pondere $A(a;\ \xi)$ diferă însă cu fiecare operator L_{ij}; avem

$$A_{ij}(a;\ \xi) = \sum_{s=0}^{n} r^{n-s} X^{ij}_{s_1 s_2 \ldots s_p} \Psi_{s_1 s_2 \ldots s_p}, \qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_p = s \tag{48}$$

cu

$$X^{ij}_{s_1 s_2 \ldots s_p}(a_1, a_2, \ldots, a_p), \quad \Psi_{s_1 s_2 \ldots s_p}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m).$$

Din modul cum sînt construite funcţiile Ψ şi A_{ij} rezultă că pentru f_i, q funcţii $(n+1)$-derivabile în D_p, avem

$$L_{ij}[f_j(a)] = \sum_{j=1}^{q} \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_p(1)} A_{ij}(a;\ \xi) f_j[a + r\varphi(\xi)]\, d\sigma_p \tag{49}$$

iar dacă f_i formează un sistem de soluţii ale lui (45) atunci (45) se transformă în sistemul cu operatori integrali

$$\sum_{j=1}^{q} \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_p(1)} A_{ij}(a;\ \xi) f_j[a + r\varphi(\xi)]\, d\sigma_p = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, q \tag{50}$$

iar dacă înlocuim pe fiecare din $A_{ij}(a;\ \xi)$ cu

$$A^{*}_{ij}(a;\ \xi) = -\frac{r^n}{S_p} X^{ij}_{00\ldots0}(a) + A_{ij}(a;\ \xi) \tag{51}$$

şi dacă f_j formează un sistem de soluţii ale sistemului (45) atunci sistemul (45) se transformă în

$$\sum_{j=1}^{q} \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_p(1)} A^{*}_{ij}(a;\ \xi) f_j[a + r\varphi(\xi)]\, d\sigma_p =$$

$$= \sum_{j=1}^{q} X^{ij}_{00\ldots0} f_j(a) \qquad i = 1, 2, \ldots, q. \tag{52}$$

Să presupunem că determinantul sistemului (52) este diferit de zero,

$$\left| X^{ij}_{00\ldots0} \right| \neq 0, \tag{53}$$

atunci din (52) rezultă $f_j(a)$ în mod unic.

Putem considera însă o situație mai generală. Fie un sistem de q familii de suprafețe $S_{pk}(r)$, de ecuații

$$z_{jk} = a_j + r\varphi_{jk}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m), \quad k = 1, 2, \ldots, q; \quad j = 1, 2, \ldots, p \tag{54}$$

cu Δ_m domeniul de variație al variabilelor $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, unde funcțiile φ_{jk} sînt mărginite. Fie D_p^* domeniul variabilelor z_{jk} dedus din (54).

În $D_p \supset D_p^*$ (deci și $S_{pk} \subset D_p$), vom considera funcțiile $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, (se pune $z_{jk} = x_j$), $(n+1)$ - derivabile. Suprafețele $S_{pk}(r)$ au element de suprafață. Condițiile impuse funcțiilor φ_{jk} arată că pentru $r = 0$, $z_{kj} = a_j$ deci cele q familii de suprafețe $S_{pk}(r)$ conțin același punct $a(a_1, a_2, \ldots, a_p)$.

Să construim acum funcțiile

$$\Psi^k_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \sum_j b^{i_1 i_2 \ldots i_p, k}_{j_1 j_2, \ldots, j_p} (\varphi_{1k})^{j_1} (\varphi_{2k})^{j_2} \ldots (\varphi_{pk})^{j_p} \tag{55}$$

cu

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_p = 0, 1, \ldots, n, \; i_1 + i_2 + \ldots + i_p = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$b^{i_1 i_2 \ldots i_p k}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ fiind constante ce se determină din

$$\frac{1}{j_1!\, j_2! \ldots j_p!} \int_{S_{pk}(1)} \left[\Psi^{ik}_{i_1 i_2 \ldots i_p} (\varphi_{1k})^{j_1} (\varphi_{2k})^{j_2} \ldots (\varphi_{pk})^{j_p}\right] d\sigma_{pk} = \delta^{j_1 j_2 \ldots j_p}_{i_1 i_2 \ldots i_p} \tag{56}$$

unde $d\sigma_{pk}$ este elementul de suprafață pe $S_{pk}(1)$.

Determinantul sistemului (56) (k, i_1, i_2, $\ldots$, i_p, ficși) este tot un determinant al lui Gram și este diferit de zero, dacă toate funcțiile $(\varphi_{1k})^{j_1} \ldots (\varphi_{pk})^{j_p}$ sînt liniar independente și rămîne același cînd $i_1, i_2, \ldots, i_p$ variază, însă se schimbă o dată cu $k = 1, 2, \ldots, q$.

Să formăm funcțiile pondere

$$A_{ik}(a; \xi) = \sum_{s=0}^{n} r^{n-s} X^{ik}_{s_1 s_2 \ldots s_p} \cdot \Psi^k_{s_1 s_2 \ldots s_p}, \qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_p = s$$

cu

$$X^{ik}_{s_1 s_2 \ldots s_p}(a_1, a_2, \ldots, a_p), \; \Psi^k_{s_1 s_2 \ldots s_p}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m).$$

Dacă f_k nu formează un sistem de soluții ale sistemului (45) atunci avem

$$L_{ik}[f_k(a)] \equiv \sum_{k=1}^{q} \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_{pk}(1)} A_{ik}(a; \xi) f_k[a + r\varphi_k(\xi)] \, d\sigma_{pk} \tag{57}$$

$d\sigma_{pk}$ fiind elementul de suprafață al suprafeței $S_{pk}(1)$ ce se obține din familia $S_{pk}(r)$ făcînd $r = 1$.

Prin urmare dacă $f_k(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ formează un sistem de soluţii ale sistemului (45) atunci pentru aceste funcţii avem

$$\sum_{k=1}^{q} \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_{pk}(1)} A_{ik}(a; \xi) f_k[a + r\varphi_k(\xi)] \, d\sigma_{pk} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, q. \quad (58)$$

În fine dacă înlocuim funcţiile pondere A_{ik} cu

$$A^{*}_{ik}(a; \xi) = -\frac{r^n}{S_{pk}} \cdot X^{ik}_{00\ldots0}(a_1, \ldots, a_p) + A_{ik}(a; \xi)$$

sistemul (58) se transformă în

$$\sum_{k=1}^{q} \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_{pk}(1)} A^{*}_{ik}(a; \xi) f_k[a + r\varphi_k(\xi)] \, d\sigma_{pk} =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} X^{ik}_{00\ldots0}(a) \cdot f_k(a) \qquad i = 1, 2, \ldots, q \quad (59)$$

iar dacă determinantul

$$\left| X^{ik}_{00\ldots0}(a) \right|$$

este diferit de zero, din (59) rezultă în mod unic $f_k(a)$.

Sistemul cu operatori integrali (58) sau (50) coincide cu sistemul (45) dacă funcţiile f_k sînt $(n+1)$-derivabile în D_p. Dacă cerem numai ca integralele ce intervin să aibă sens, iar operaţia de limită să existe (la dreapta sau la stînga) pentru fiecare operator atunci (58) sau (50) constituie o generalizare a sistemului (45) cu care coincide numai în cazul menţionat. Putem considera sisteme sub forma cea mai generală; procedeul folosit la § 7 arată că le putem transforma totdeauna în sisteme cu operatori integrali.

II. FORMULE DE MEDIE PENTRU SOLUŢIILE ANALITICE ALE ECUAŢIILOR CU DERIVATE PARŢIALE, LINIARE, CU COEFICIENŢI VARIABILI

1. *Cum putem înlătura operaţia de limită.* În capitolul precendent, operatorii diferenţiali au fost înlocuiţi cu limite de operatori integrali; soluţiile ecuaţiilor diferenţiale erau de asemenea obţinute ca limite de operatori integrali, în toate cazurile limita fiind luată în raport cu un parametru ce intervenea în ecuaţia familiei de suprafeţe $S_p(r)$.

Ne propunem acum să găsim o funcţie pondere $A(a; \xi)$ care să depindă atît de punctul fix a cît şi de un punct curent ξ de pe o suprafaţă din $S_p(r)$, încît relaţia (31) de exemplu, să fie adevărată fără operaţia de limită, parametrul $r = r_0$ fiind fix, însă oarecare.

Importante, din acest punct de vedere, sînt formulele (31″) care reprezintă pur şi simplu, fără operaţia de limită, o formulă de medie şi care răspunde la următoarea problemă:

Fie $S_p(r)$ o familie de suprafețe de ecuații parametrice

$$x_i = a_i + r\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m), \qquad i = 1, 2, \ldots, p, \; m < p \tag{1}$$

cu $\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ funcții mărginite într-o regiune Δ_m, căreia îi corespunde domeniul D_p, al variabilelor x_i, r fiind un parametru arbitrar. Vom presupune de asemenea că șirul infinit de funcții avînd elementele

$$(\varphi_1)^{\alpha_1}(\varphi_2)^{\alpha_2} \ldots (\varphi_p)^{\alpha_p}$$

cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = 0, 1, \ldots, n, \ldots$, este liniar independent, și prin urmare determinantul lui Gram de ordin infinit $G(\varphi)$ avînd ca elemente

$$\int_{S_p(r_0)} (\varphi_1)^{\alpha_1}(\varphi_2)^{\alpha_2} \ldots (\varphi_p)^{\alpha_p}(\varphi_1)^{\beta_1}(\varphi_2)^{\beta_2} \ldots (\varphi_p)^{\beta_p} d\sigma_p \tag{2}$$

este diferit de zero. Determinantul $G(\varphi)$ este așadar sau finit și pozitiv sau are valoarea $+\infty$.

Fie de asemenea $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ o soluție analitică în D_p a ecuației cu derivate parțiale

$$\sum_k X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} = 0 \tag{3}$$

cu

$$X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

pentru care ne sînt date valorile pe una din suprafețele familiei (1), $r = r_0$.

Este posibil să găsim o funcție $A(a; \xi)$ astfel încît media valorilor soluției f pe suprafața $S_p(r_0)$, ponderate prin $A(a; \xi)$ să fie egale cu valoarea funcției în punctul $a(a_1, a_2, \ldots, a_p)$? Răspunsul este afirmativ iar funcția $A(a; \xi)$, bineînțeles, nu este unică.

Dacă avem în vedere ecuația (3), pînă la urmă, este necesar să găsim un operator integral care să fie substituit operatorului

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} \tag{4}$$

fără să intervină operația de trecere la limită. Vom considera pentru simplicitate operatorul

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{5}$$

deci pentru (5) urmează că trebuie să găsim o funcție pondere

$$A(a; \xi, r_0)$$

încît să avem

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_p)}{\partial a_1} = \int_{S_p(r_0)} A(a;\ \xi,\ r_0)\, f[a + r_0\varphi(\xi)]\, d\sigma_p \qquad (6)$$

$d\sigma_p$ fiind elementul de arie pe suprafaţa $S_p(r_0)$, celelalte notaţii fiind aceleaşi cu cele din capitolul precedent.

Ţinînd seamă că f este analitică în $D_p \supset S_p(r_0)$, urmează din (6) imediat condiţiile pentru $A(a;\ \xi,\ r_0)$:

$$\int_{S_p(r_0)} A(a;\ \xi,\ r_0)\, d\sigma_p = 0$$

$$\int_{S_p(r_0)} A(a;\ \xi,\ r_0)\, \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_m)\, d\sigma_p = \frac{1}{r_0} \qquad (7)$$

şi

$$\int_{S_p(r_0)} A(a;\ \xi,\ r_0)\, \varphi_1^{\beta_1} \varphi_2^{\beta_2} \ldots \varphi_p^{\beta_p}\, d\sigma_p = 0;$$

în ultima condiţie β_i trebuie să ia toate valorile întregi de la 0 la $+\infty$, în afară de $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_p = 0$.

În cazul cînd considerăm operatorul general (4) atunci condiţiile (7) se transformă în

$$\frac{r_0^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p}}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_p!} \int_{S_p(r_0)} A(a;\ \xi,\ r_0)\, \varphi_1^{\beta_1} \varphi_2^{\beta_2} \ldots \varphi_p^{\beta_p}\, d\sigma_p = \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p} \qquad (8)$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sînt ficşi iar $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ trebuie să ia toate valorile întregi de la 0 la $+\infty$.

Pentru construcţia funcţiei A este necesar să introducem noţiunea de:

2. *Familii de funcţii ortonormale cu diferenţa indicilor fixă.*

Fie

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \ldots \qquad \varphi_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_p) \qquad (9)$$

un şir de funcţii integrabile într-un domeniu D_p din spaţiul cu p dimensiuni.

Vom spune că şirul de funcţii

$$\Psi_0,\ \Psi_1,\ \Psi_2, \ldots, \Psi_p, \ldots \qquad \Psi_k = \Psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_p) \qquad (10)$$

este ortonormal şirului (9) şi anume vom spune că este ortonormal cu diferenţa indicilor zero pe suprafaţa $S_p \subset D_p$ dacă

$$\int_{S_p} \varphi_m \Psi_n\, d\sigma_p = 0 \qquad m - n \neq 0$$

şi (11)

$$\int_{S_p} \varphi_m \Psi_m\, d\sigma_p = 1$$

oricare ar fi indicii m şi n şi unde $d\sigma_p$ este elementul de arie pe S_p.

Șirul (9) poate fi finit sau infinit. În cazul cînd este finit, determinarea șirului (10) este destul de simplă și a făcut obiectul alineatelor precedente. Vom aborda acum cazul cînd șirul (9) este infinit. Faptul că șirul (10) căutat este finit sau infinit nu are nici o importanță, cel puțin pentru metodele ce le vom folosi, deoarece determinarea fiecărui element al șirului (10) se face independent de celelalte și operațiile necesare determinării lui se repetă și pentru ceilalți termeni ai șirului în mod asemănător. Vom considera așadar șirul (10) format dintr-un singur element Ψ_0, care conform lui (11) trebuie să satisfacă condițiile

$$(\varphi_i, \Psi_0) = \int_{S_p} \varphi_i \Psi_0 \, d\sigma_p = \delta_0^i. \tag{12}$$

Construcția funcției Ψ_0. Procedeul folosit pentru construcția funcției Ψ_0 este asemănător celui de ortogonalizare al lui Schmidt. Vom construi mai întîi un șir de funcții

$$\theta_{00}, \theta_{01}, \ldots, \theta_{0n}, \ldots \tag{13}$$

în modul următor

$$\begin{aligned} \theta_{00} &= \varphi_0 \\ \theta_{01} &\quad \lambda_0 \theta_{00} + \varphi_1 \end{aligned} \tag{14}$$

λ_0 fiind determinat de condiția

$$(\theta_{01}, \varphi_1) = 0$$

sau

$$(\varphi_1, \varphi_1) + \lambda_0 (\varphi_0, \varphi_1) = 0, \qquad \lambda_0 = -\frac{(\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_0, \varphi_1)}$$

deci

$$\theta_{01} = \varphi_0 - \frac{(\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_0, \varphi_1)} \varphi_1. \tag{15}$$

Tot așa

$$\theta_{02} = \varphi_2 + \lambda_1 \theta_{01} + \lambda_0 \theta_{00} \tag{16}$$

λ_0, λ_1 determinați de

$$(\theta_{02}, \varphi_1) = 0, \qquad (\theta_{02}, \varphi_2) = 0$$

sau

$$\begin{aligned} (\varphi_2, \varphi_1) + \lambda_0 (\theta_{00}, \varphi_1) &= 0 \\ (\varphi_2, \varphi_2) + \lambda_1 (\theta_{01}, \varphi_2) + \lambda_0 (\theta_{00}, \varphi_2) &= 0 \end{aligned}$$

deci

$$\lambda_0 = -\frac{(\varphi_1, \varphi_2)}{(\varphi_0, \varphi_1)}, \quad \lambda_1 = \frac{(\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_0, \varphi_1)} \cdot \frac{(\varphi_0, \varphi_2)(\varphi_1, \varphi_2) - (\varphi_0, \varphi_1)(\varphi_2, \varphi_2)}{(\varphi_0, \varphi_2)(\varphi_1, \varphi_1) - (\varphi_0, \varphi_1)(\varphi_1, \varphi_2)} \tag{17}$$

și θ_{02} este dat de (16) unde coeficienții λ_0, λ_1 sînt dați de (17).

În general, funcţia θ_{0n} are expresia

$$\theta_{0n} = \varphi_n + \lambda_0 \theta_{00} + \lambda_1 \theta_{01} + \ldots + \lambda_{n-1}\, \theta_{0n-1}$$

cu $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ determinaţi din sistemul

$$(\theta_{0n}, \varphi_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

sistem de tip triunghiular, deoarece are forma

$$\begin{aligned}
&(\varphi_n, \varphi_1) + \lambda_0 (\theta_{00}, \varphi_1) = 0 \\
&(\varphi_n, \varphi_2) + \lambda_0 (\theta_{00}, \varphi_2) + \lambda_1 (\theta_{01}, \varphi_2) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(\varphi_{n'}, \varphi_n) + \lambda_0 (\theta_{00}, \varphi_n) + \ldots + \lambda_{n-1} (\theta_{0n-1}, \varphi_n) = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

şi poate fi rezolvat din aproape în aproape.

Operaţia poate fi continuată indefinit şi dacă

$$\theta_0 = \lim_{n \to \infty} \theta_{0n} \tag{19}$$

atunci

$$\psi_0 = \frac{\theta}{(\theta_0, \varphi_0)}, \quad (\theta_0, \varphi_0) \neq 0 \text{ şi finit}, \tag{20}$$

este funcţia ψ_0 căutată care îndeplineşte toate condiţiile (12).

Putem proceda însă şi în modul următor pentru construcţia funcţiei ψ_0. Căutăm direct pe ψ_0 sub forma unei sume infinite

$$\psi_0 = c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + \ldots + c_n\, \varphi_n + \ldots \tag{21}$$

şi condiţiile (12) se transformă în sistemul infinit

$$\begin{aligned}
&c_0 (\varphi_0, \varphi_0) + c_1 (\varphi_0, \varphi_1) + \ldots + c_n (\varphi_0, \varphi_n) + \ldots = 1 \\
&c_0 (\varphi_1, \varphi_0) + c_1 (\varphi_1, \varphi_1) + \ldots + c_n (\varphi_1, \varphi_n) + \ldots = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&c_0 (\varphi_n, \varphi_0) + c_1 (\varphi_n, \varphi_1) + \ldots + c_n (\varphi_n, \varphi_n) + \ldots = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{22}$$

Să împărţim fiecare din ecuaţii respectiv cu $(\varphi_0, \varphi_0) \ldots, (\varphi_n, \varphi_n) \ldots$; determinantul sistemului este atunci un determinant normal de tip Poincaré

$$\begin{vmatrix}
1 & \gamma_{01} & \gamma_{02} \ldots \gamma_{0n} \ldots \\
\gamma_{10} & 1 & \gamma_{12} \ldots \gamma_{1n} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
\gamma_{n0} & \gamma_{n1} & \gamma_{n2} \ldots 1 \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &
\end{vmatrix} \tag{23}$$

cu $\gamma_{ij} = 1$ dacă $i = j$ și $\gamma_{ij} = -\dfrac{(\varphi_i, \varphi_j)}{(\varphi_i, \varphi_i)}$ dacă $i \neq j = 0, 1, 2, \ldots$, care este absolut convergent dacă seria

$$\sum_{i \neq j = 0}^{\infty} \gamma_{ij} \tag{24}$$

este absolut convergentă. În această situație sistemul (22) admite o soluție unică care înlocuită în (21) ne dă soluția ψ_0 căutată.

3. *Formule de medie pentru soluțiile analitice ale ecuațiilor cu derivate parțiale liniare cu coeficienți variabili.* Fie ecuația

$$\sum_{k=0}^{n} X_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \frac{\partial^k U}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} = 0 \tag{25}$$

cu

$$X_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

ecuație pe care o presupunem că are soluții analitice. Pentru fiecare operator

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} \tag{26}$$

ce intervine în ecuația (25) să construim funcțiile

$$\psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$$

relativ la suprafața (1) cu $r = r_0$, astfel ca

$$\frac{r_0^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_p!} \int_{S_p(r_0)} \psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \varphi_1^{\beta_1} \varphi_2^{\beta_2} \ldots \varphi_p^{\beta_p} d\sigma_p = \delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}. \tag{27}$$

Să formăm acum funcția

$$A(a; \xi, r_0) = (-1 + X_{00\ldots0})\,\psi_{00\ldots0} + \sum_{k=1}^{n} \psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} X_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \tag{28}$$

cu

$$X_{i_1\ldots i_p}(a_1, a_2, \ldots, a_p)$$

$$\psi_{i_1\ldots i_p}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m).$$

Din modul cum am obținut funcțiile $\psi_{i_1\ldots i_p}$ rezultă că avem următoarea formulă de medie pentru soluțiile $f(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ ale ecuației (25), analitice în D_p care conține pe $S_p(r_0)$

$$f(a) = \int_{S_p(r_0)} A(a; \xi, r_0)\, f[a + r_0\varphi(\xi)]\, d\sigma_p \tag{29}$$

unde $S_p(r_0)$ este una din suprafețele familiei (1) ce se obține făcînd $r = r_0$, $d\sigma_p$ elementul de arie ale acestei suprafețe.

Cerem funcției $f(a)$ de a fi analitică în D_p, deoarece demonstrația ne impune această restricție.

Putem considera familia de suprafețe (1) sub forma mai generală

$$x_i = a_i + \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p), \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

cu φ_i continui în parametrii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, astfel ca să putem determina parametrii λ_i încît o anumită suprafață a familiei să treacă printr-un punct dat, de altfel arbitrar, din spațiul cu p dimensiuni. Funcțiile $\psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$, deci și funcția pondere A vor depinde și de λ_i

$$A(a; \xi; \lambda)$$

și fiecărei suprafețe din familie îi putem așadar asocia formula de medie corespunzătoare. Se poate întîmpla că funcțiile $\psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ să nu depindă de parametrii $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ deci și funcția pondere $A(a; \xi; \lambda)$ cum se întîmplă pentru binecunoscutele formule de medie din cazul ecuației lui Laplace, a ecuației căldurii [3], [4] cît și a iteratelor sale [5].

În general însă, cum rezultă de mai sus, funcția pondere depinde și de parametrii λ_i. Se înțelege, de asemenea, că funcția pondere nu este unică ci avem o infinitate, fapt foarte natural, dacă ținem seamă de problema ce o rezolvă o astfel de formulă.

4. *Exemplu.* Să considerăm curba definită parametric de

$$x = a + \frac{t}{M}, \quad y = b + e^{-t} \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \; M > 0 \tag{30}$$

și să observăm că toate funcțiile

$$t^m e^{-nt}$$

pentru m și n întregi pozitivi sau zero sînt liniar independente deci determinantul lui Gram este diferit de zero.

Pentru funcția $\psi(t)$ să luăm expresia

$$\begin{aligned}\psi(t) = {} & c_{00} + c_{01}\frac{t}{M} + \ldots + c_{0n}\left(\frac{t}{M}\right)^n + \ldots \\ & + e^{-t}\left[c_{10} + c_{11}\frac{t}{M} + \ldots + c_{1n}\left(\frac{t}{M}\right)^n + \ldots\right] + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + e^{-nt}\left[c_{n0} + c_{n1}\frac{t}{M} + \ldots + c_{nn}\left(\frac{t}{M}\right)^n + \ldots\right] + \ldots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{31}$$

Determinantul sistemului

$$\int_\alpha^\beta \psi(t)\, dt = 1 \tag{32}$$

$$\frac{1}{M^\lambda}\int_\alpha^\beta \psi(t)\, t^\lambda e^{-\mu t}\, dt = 0$$

(în ultima relație (32) λ și μ iau toate valorile 0, 1, 2, ..., cu excepția $\lambda = \mu = 0$), dacă adoptăm pentru c_{ij} ordonarea indicată de săgeți

$$\begin{array}{ccccccc}
c_{00} \rightarrow c_{01} & & c_{02} \rightarrow c_{03} & & c_{04} \rightarrow c_{05} & & \cdots \\
\swarrow \quad \nearrow & & \swarrow \quad \nearrow & & \swarrow & & \\
c_{10} \quad c_{11} & & c_{12} \quad c_{13} & & c_{14} \quad c_{15} & & \cdots \\
\downarrow \quad \nearrow & & \swarrow \quad \nearrow & & \swarrow & & \\
c_{20} \quad c_{21} & & c_{22} \quad c_{23} & & c_{24} \quad c_{25} & & \cdots \\
\swarrow \quad \nearrow & & \swarrow & & & & \\
c_{30} \quad c_{31} & & c_{32} \quad c_{33} & & c_{34} \quad c_{35} & & \cdots \\
\downarrow \quad \nearrow & & \swarrow & & & & \\
c_{40} \quad c_{41} & & c_{42} \quad c_{43} & & c_{44} \quad c_{45} & & \cdots \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & &
\end{array} \tag{33}$$

are următoarea expresie

$$D_\infty = \begin{vmatrix}
(0,0) & (0,1) & (1,0) & (2,0) & \cdots \\
(0,1) & (0,2) & (1,1) & (2,1) & \cdots \\
(1,0) & (1,1) & (2,0) & (3,0) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix} \tag{34}$$

unde am notat

$$(\mu, \lambda) = \frac{1}{M^\lambda} \int_\alpha^\beta t^\lambda e^{-\mu t}\, dt.$$

Deoarece

$$1 + \mu < e^{\mu t}, \qquad \mu > 0$$

avem

$$\frac{1}{1+\mu} > e^{-\mu t}$$

rezultă imediat că

$$(\mu, \lambda) < \frac{1}{M^\lambda} \cdot \frac{1}{1+\mu} \int_\alpha^\beta t^\lambda\, dt = \frac{\beta^{\lambda+1} - \alpha^{\lambda+1}}{(\lambda+1)(\mu+1)M^\lambda}. \tag{35}$$

Să mai observăm că termenul (μ, λ) intervine de $(\lambda+1)(\mu+1)$ ori, deci suma modulelor tuturor elementelor determinantului D_∞ este majorată de suma

$$M \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\beta^{\lambda+1} - \alpha^{\lambda+1}}{M^{\lambda+1}} \tag{36}$$

care este convergentă dacă $\left|\frac{\beta}{M}\right| < 1, \left|\frac{\alpha}{M}\right| < 1.$

Dacă această condiție este îndeplinită, este evident că determinantul D_∞ este convergent și anume absolut convergent.

În adevăr, se ştie că un produs infinit

$$\prod_1^\infty (1+u_n)$$

este absolut convergent dacă seria $\sum_1^\infty |u_n|$ este convergentă şi reciproc. Dacă notăm cu γ_{ij} elementele determinantului (34) avem

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |\gamma_{ij}| < \infty$$

conform rezultatului precedent, însă acest fapt atrage convergenţa produsului

$$P_\infty = \prod_1^\infty (1+\gamma_{ij})$$

şi cum suma modulelor tuturor termenilor ce intervin în dezvoltarea lui D_∞ este conţinută în produsul infinit P_∞ urmează că determinantul D_∞ este absolut convergent, deci sistemului (32) i se poate aplica regula obişnuită de rezolvare cu ajutorul determinanţilor, sistemul avînd soluţie unică, finită. Acest rezultat este de asemenea valabil şi pentru sistemul

$$\frac{1}{M^\lambda}\int_\alpha^\beta e^{-\mu t}\, t^\lambda\, dt = u_{\lambda\mu}$$

unde $u_{\lambda\mu}$ este diferit de zero numai pentru o mulţime finită de indici λ şi μ, deci putem găsi formula de medie corespunzătoare pentru soluţiile analitice ale oricărei ecuaţii liniare cu coeficienţi variabili (3) în două variabile independente, pe segmentul de curbă definit de (30).

Dacă în reprezentarea (30) introducem parametrii ξ şi η

$$x = a + \frac{t+\xi}{M}, \quad y = b + \eta e^{-t} \tag{30'}$$

putem dispune de ξ şi η astfel ca, a şi b fiind fixaţi, curba definită de (30') să treacă prin orice punct al planului. Vom obţine astfel formule de medie pentru orice curbă ce face parte din familia dată. Bineînţeles, funcţia ψ va conţine pe ξ şi η.

Observaţie. Dacă în loc de curba (30) considerăm pe

$$x = a + \frac{t}{M}, \quad y = b + \frac{t^2}{M^2}$$

adică o parabolă, funcţiile

$$\left(\frac{t}{M}\right)^\lambda \cdot \left(\frac{t}{M}\right)^{2\mu} \tag{37}$$

nu mai sînt pentru $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ liniar independente. Putem lua pentru funcția ψ expresia

$$\psi = c_0 + c_1 \frac{t}{M} + \ldots + c_n \left(\frac{t}{M}\right)^n + \ldots$$

încît determinantul lui Gram corespunzător să nu fie nul, deci componentele c_k să rezulte în mod unic, în aceleași condiții pentru M, α și β. Faptul că nu toate funcțiile (37) sînt liniar independente are influență asupra ecuației cu derivate parțiale cu care lucrăm și anume nu mai putem asocia soluțiilor *oricărei* ecuații o formulă de medie ci numai pentru anumite ecuații, tot cu coeficienți variabili, între coeficienții cărora există însă anumite legături.

5. *Cazul complex.* În cazul cînd ecuația

$$E_n(u) = \sum_{k=0}^{n} X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} = 0 \tag{38}$$

cu toate componentele $X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$ funcții analitice de variabilele complexe $x_k = \xi_k + i\eta_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, deci u este funcție analitică în fiecare din variabilele x_k, problema caracterizării integrale a soluțiilor ecuației (38) cît și stabilirea de formule de medie pentru soluții, în domeniul lor de analiticitate D_p este mult mai simplă.

În adevăr, să considerăm în spațiul complex cu p dimensiuni $x_1, x_2, \ldots, x_p$ varietatea definită de ecuațiile

$$(C) \quad x_k = a_k + \rho_k e^{i\theta_k}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad 0 \leqslant \theta_k \leqslant 2\pi, \quad \rho_k \neq 0$$

cu a_k și ρ_k astfel ca $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in D_p$.

Avem

$$\frac{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_p!}{\rho_1^{\alpha_1} \rho_2^{\alpha_2} \ldots \rho_p^{\alpha_p}} \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \ldots \int_0^{2\pi} A(\theta) f(a + \rho e^{i\theta}) \, d\theta_p =$$

$$= \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} \tag{39}$$

unde am pus

$$f(a + \rho e^{i\theta}) = f(a_1 + \rho_1 e^{i\theta_1}, a_2 + \rho_2 e^{i\theta_2}, \ldots, a_p + \rho_p e^{i\theta_p})$$

f fiind analitică în D_p, $(a_1 + \rho_1 e^{i\theta_1}, \ldots, a_p + \rho_p e^{i\theta_p}) \in D_p$, și $A(\theta)$ dată de

$$A(\theta) = \exp i \, (-\alpha_1 \theta_1 - \alpha_2 \theta_2 - \ldots - \alpha_p \theta_p).$$

Rezultă de aici că dacă construim funcţia pondere

$$A(a;\theta)=\sum_{\alpha}\frac{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_x!}{\rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2}\ldots\rho_p^{\alpha_p}}X_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\exp i(-\alpha_1\theta_1-\alpha_2\theta_2-\ldots-\alpha_p\theta_p) \quad (40)$$

cu $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p=0,1,\ldots,n$, şi $X_\alpha(a_1,a_2,\ldots,a_p)$ atunci avem

$$\frac{1}{(2\pi)^p}\int_0^{2\pi}d\theta_1\int_0^{2\pi}d\theta_2\ldots\int_0^{2\pi}A(a;\theta)\,f(a+\rho e^{i\theta})\,d\theta_p=E_n(f) \quad (41)$$

încît pentru soluţiile analitice în D_p ale ecuaţiei (38) avem următoarea caracterizare integrală

$$\frac{1}{(2\pi)^p}\int_0^{2\pi}d\theta_1\int_0^{2\pi}d\theta_2\ldots\int_0^{2\pi}A(a;\xi)\,f(a+\rho e^{i\theta})\,d\theta_p=0. \quad (42)$$

Iar dacă în (42) înlocuim pe $A(a;\theta)$ cu

$$A^*(a;\theta)=-1+A(a;\theta)$$

atunci pentru soluţiile analitice în D_p ale ecuaţiei (38), avem următoarea formulă de medie

$$f(a_1,a_2,\ldots,a_p)=\frac{1}{(2\pi)^p}\int_0^{2\pi}d\theta_1\int_0^{2\pi}d\theta_2\ldots\int_0^{2\pi}A^*(a;\theta)\,f(a+\rho e^{i\theta})\,d\theta_p.$$

Se poate arăta uşor însă că funcţia $A^*(a;\theta)$ nu este însă unică. Rezultatul obţinut în acest alineat pentru funcţii monogene în algebra numerelor complexe este valabil cu oarecari modificări şi pentru monogene în algebrele infinite asociate ecuaţiei lui Laplace într-un număr oarecare de variabile [6], [7].

Model cum se poate construi funcţia $A^*(a;\theta)$ în această situaţie rezultă din [7]*).

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОБОБЩАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ФОРМУЛЫ СРЕДНЕГО

РЕЗЮМЕ

В первой главе работы, линейному или нелинейному уравнению в частных производных n-го порядка, сопоставляется интегральный оператор. Этот оператор заменяет заданное уравнение в частных производных если функция, к которой он применяется, $(n+1)$ раз дифференцируема, а в противном случае обобщает это уравнение.

*) p. 245.

Сначала рассматриваются уравнения в частных производных первого порядка и получаются интегральные формулы (3), (3′), (17), (23′). Для решения уравнения (1) получаются интегральные характеристики (4), (4) (18), (23). Полученные результаты обобщаются на линейные уравнения в частных производных первого порядка с переменными коэффициентами. Так, для уравнения

$$E_n(u) \equiv \sum_{k=0}^{n} X_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_p} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_p^{\alpha_p}} = 0 \; \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p = k \; (\lambda),$$

где $X_{\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_p}(x_1, x_2,\ldots, x_p)$ и где $S_p(r)$ семейство поверхностей с уравнениями

$$x_i = a_i + r\,\varphi_i(\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_m) \quad i = 1,2,\ldots, p, (\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_m) \in \Delta_m$$

и $x_i \to a_i$ когда $r \to 0$ для любого показывается, что всегда можно найти такую функцию $A(a, \xi)$, даваемую (30), что для $u(x_1, x_2,\ldots, x_p)$ $(n+1)$ раз дифференцируемой в D_p (соответственно Δ_m) имеем

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_p(1)} A(a; \xi)\, u\,[a + r\,\varphi(\xi)]\, d\sigma_p \equiv E_n(u),$$

а, следовательно, $f(x_1, x_2,\ldots, x_p)$ $(n+1)$ раз дифференцируемые в D_p решения уравнения (λ) можно охарактеризовать с интегральной точки зрения следующим образом

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_p(1)} A(a; \xi)\, f(a + r\,\varphi(\xi))\, d\sigma_p = 0.$$

Для f решения уравнения (λ) и $A^*(a; \xi)$, соответствующим образом выбранного, имеем также

$$f(a) = \lim \frac{1}{r^n} \int_{S_p(1)} A^*(a; \xi)\, f(a + r\,\varphi(\xi)]\, d\sigma_p.$$

Полученные результаты обобщаются на системы линейных дифференциальных уравнений. В § 7 произвольный дифференциальный оператор (39) преобразуется в соотношение, в которое входят только интегральные операторы.

В главе II автор старается исключить операцию предельного перехода из полученных интегральных формул. Удается установить формулы среднего (29) для аналитических решений линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами (λ), когда заданы значения решений на некотором многообразии $S_p(r)$.

Определение функции $A(a; \xi)$ (28) ставит задачу решения бесконечной системы линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных.

В § 5 рассматривается уравнение (λ), коэффициенты которого $X_{\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_p}$ являются аналитическими функциями комплексных пере-

менных $x_1, x_2, \ldots, x_p$. В этом случае установление формулы среднего (43) осуществляется проще, причем функция $A(a; \xi)$ для многообразия (C) дается (40).

Аналогичный результат получается, если компоненты $X_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ являются аналитическими функциями над бесконечной алгеброй, присоединенной к уравнению Лапласа в случае произвольного числа переменных [6], [7].

OPÉRATEURS INTÉGRAUX QUI GÉNÉRALISENT LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. FORMULES DE MOYENNE

RÉSUMÉ

Au premier chapitre, l'auteur associe à une équation aux dérivées partielles d'ordre n, linéaire ou non, un opérateur intégral. Cet opérateur remplace l'équation aux dérivées partielles si la fonction à laquelle on l'applique est $(n+1)$ — dérivable; il la généralise dans le cas contraire.

On considère au début des équations aux dérivées partielles d'ordre I et on obtient les formules intégrales (3), (3′), (17) et (23′). Pour les solutions de l'équation (1), on obtient les caractérisations intégrales (4), (4′), (18) et (23). On étend les résultats obtenus à des équations aux dérivées partielles, linéaires à coefficients variables, d'ordre quelconque. Ainsi, pour l'équation

$$E_n(u) \equiv \sum_{k=0}^{n} X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} = 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = k \quad (\lambda)$$

avec $X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et où $S_p(r)$ est une famille de surfaces d'équations

$$x_i = a_i + r\,\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \quad i = 1, 2, \ldots, p, \ (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \Delta_m$$

et $x_i \to a_i$ lorsque $r \to 0$ pour tout $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \Delta_m$, il montre que l'on peut toujours trouver une fonction $A(a; \xi)$ donnée par (30), de sorte que nous ayons pour $u(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une solution $(n+1)$-dérivable dans D_p (correspondant à Δ_m)

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_p^{(1)}} A(a; \xi)\, u[a + r\,\varphi(\xi)]\, d\sigma_p \equiv E_n(u).$$

Donc pour les solutions $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ $n+1$-dérivables dans D_p de l'équation (λ) on a la caractérisation intégrale suivante

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_p^{(1)}} A(a; \xi)\, f[a + r\,\varphi(\xi)]\, d\sigma_p = 0.$$

Pour f, solution de l'équation (λ), et un $A^*(a;\xi)$ convenablement choisi, on aura aussi

$$f(a) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{S_p(1)} A^*(a;\xi)\, f[a + r\,\varphi(\xi)]\, d\sigma_p.$$

Les résultats obtenus sont étendus à des systèmes d'équations différentielles linéaires. Au § 7 on transforme un opérateur différentiel quelconque (39) en une relation où n'interviennent que les opérateurs intégraux.

Au chapitre II on poursuit la suppression de l'opération à la limite dans les formules intégrales obtenues. L'auteur parvient ainsi *à établir des formules de moyenne* (29) *pour les solutions analytiques des équations aux dérivées partielles, linéaires et à coefficients variables* (λ), lorsque sont données les valeurs des solutions sur des variétés quelconques $S_p(r)$.

La détermination de la fonction $A(a;\xi)$ (28) soulève le problème de la solution d'un système infini d'équations linéaires ayant une infinité d'inconnues (22).

Au § 5, l'auteur considère l'équation (λ), ayant les coefficients $X_{\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$, fonctions analytiques aux variables complexes $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Dans ce cas, on établit la formule de moyenne (43) beaucoup plus simplement, la fonction $A(a;\xi)$ étant donnée par (40) pour la variété (C).

Le résultat est semblable si les composantes $X_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ sont des fonctions analytiques dans l'algèbre infinie associée à l'équation de Laplace dans un nombre quelconque de variables [6], [7].

BIBLIOGRAFIE

1. I. M. GHELFAND, *Lecții de algebră liniară*. Ed. tehnică, București, 1953.
2. MARCEL N. ROȘCULEȚ, *Integral relations characterising the solutions of some finite or infinite order partial derivative equations*. Revue de Math. pures et appliquées, **V**, *2*, 287–313 (1960).
3. MIRON NICOLESCU, *Sur l'équation de la chaleur*. Commentarii Mathematici Helvetici, **10**, 3–17 (1937).
4. MARCEL N. ROȘCULEȚ, *Formule de medie pentru soluțiile analitice ale unor ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic*. Comunicările Acad. R.P.R., **XI**, *8* (1961).
5. MIRON NICOLESCU, *Ecuația iterată a căldurii*. Studii și cercetări matematice, **V**, *3–4*, 243–333 (1954).
6. MARCEL N. ROȘCULEȚ, *Algebre infinite asociate la ecuații cu derivate parțiale, omogene, cu coeficienți constanți, de ordin oarecare*. Studii și cercetări matematice, **VI**, *3–4*, 567–643 (1955).
7. — *О бесконечной алгебре сопоставленной уравнению Лапласа*. Revue de Math. pures et appliquées, **III**, *2*, 331–364 (1958).

SOLUȚII PERIODICE LA SISTEMELE LINIARE CU ÎNTÎRZIERE

DE

A. HALANAY

În această lucrare stabilim condițiile necesare și suficiente de existență a soluțiilor periodice pentru sistemele liniare neomogene cu întîrziere. Deoarece cazul particular al sistemelor de ecuații diferențiale cu argument întîrziat prezintă un interes deosebit vom începe cu expunerea întregii teorii în acest caz.

1. Se consideră sistemul

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\;x(t-\tau) + f(t) \tag{1}$$

A, B, f continue și periodice de perioada $\omega > \tau$. Considerăm de asemenea sistemul omogen

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,x(t-\tau) \tag{2}$$

și sistemul adjunct

$$\dot{y}(t) = -y(t)\,A(t) - y(t+\tau)\,B(t+\tau). \tag{3}$$

TEOREMA 1. *Dacă sistemul (1) admite soluții periodice, de perioadă* ω, *atunci*

$$\int_0^{\omega} y(t)\,f(t)\,dt = 0 \tag{4}$$

pentru toate soluțiile periodice $y(t)$, *de perioadă* ω, *ale sistemului (3).*

Demonstrație. Fie $x(t)$ o soluție a sistemului (1) și $y(t)$ o soluție a sistemului (3) definite respectiv pentru $t \geqslant -\tau$ și $t \leqslant \omega + \tau$. Pentru $0 \leqslant t \leqslant \omega$ punem

$$(y, x) = y(t)\,x(t) + \int_0^{\tau} y(t+\eta)\,B(t+\eta)\,x(t+\eta-\tau)\,d\eta = y(t)\,x(t) + \int_t^{t+\tau} y(\xi)\,B(\xi)\,x(\xi-\tau)\,d\xi.$$

Avem

$$\frac{d}{dt}(y, x) = \dot{y}(t)\, x(t) + y(t)\, \dot{x}\,(t) + \frac{d}{dt}\int_t^{t+\tau} y(\xi)\, B(\xi)\, x(\xi - \tau)\, d\xi =$$
$$= -\, y(t)\, A(t)\, x(t) - y(t+\tau)\, B(t+\tau)\, x(t) + y(t)\, A\,(t)\, x(t) +$$
$$+\, y(t)\, B(t)\, x(t-\tau) + y(t)\, f(t) + y(t+\tau)\, B(t+\tau)\, x(t) -$$
$$-\, y(t)\, B(t)\, x(t-\tau) = y(t)\, f(t).$$

Dacă $x(t)$ și $y(t)$ sînt periodice, de perioadă ω, avem

$$(y, x)_\omega = (y, x)_0 \qquad \text{deci} \int_0^\omega \frac{d}{dt}(y, x)\, dt = 0.$$

Dar $\dfrac{d}{dt}(y, x) = y(t)\, f(t)$, de unde rezultă $\displaystyle\int_0^\omega y(t)\, f(t)\, dt = 0$ pentru toate soluțiile periodice, de perioadă ω, ale sistemului (3) definite pentru $t \leqslant \omega + \tau$.

2. Pentru a obține condițiile suficiente de existență a soluțiilor periodice avem nevoie de unele pregătiri.

Fie $Y(\alpha, t)$ o matrice ale cărei linii verifică (ca funcții de α) sistemul (3) pentru $\alpha < t$ și condițiile $Y(t, t) = E$, $Y(\alpha, t) \equiv 0$ pentru $t < \alpha \leqslant t + \tau$, E fiind matricea unitate.

Fie $x(t)$ o soluție oarecare a sistemului (1) definită pentru $t \geqslant \sigma$ prin condiții inițiale date pe $[\sigma - \tau, \sigma]$. Avem

$$\int_\sigma^t Y(\alpha, t)\, \dot{x}(\alpha)\, d\alpha = \int_\sigma^t Y(\alpha, t)\, A(\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha +$$
$$+ \int_\sigma^t Y(\alpha, t)\, B(\alpha)\, x(\alpha - \tau)\, d\alpha + \int_\sigma^t Y(\alpha, t)\, f(\alpha)\, d\alpha.$$

Mai departe

$$Y(\alpha, t)\, x(\alpha)\Big|_\sigma^t - \int_\sigma^t \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} Y(\alpha, t)\right] x(\alpha)\, d\alpha = \int_\sigma^t Y(\alpha, t)\, A(\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha +$$
$$+ \int_{\sigma-\tau}^{t-\tau} Y(\beta + \tau, t)\, B(\beta + \tau)\, x(\beta)\, d\beta + \int_\sigma^t Y(\alpha, t)\, f(\alpha)\, d\alpha.$$

De aici

$$x(t) = Y(\sigma, t)\, x(\sigma) - \int_\sigma^t Y(\alpha, t)\, A(\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha -$$
$$- \int_\sigma^t Y(\alpha + \tau, t)\, B(\alpha + \tau)\, x(\alpha)\, d\alpha + \int_\sigma^t Y(\alpha, t)\, A(\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha +$$
$$+ \int_{\sigma-\tau}^{t-\tau} Y(\alpha + \tau, t)\, B(\alpha + \tau)\, x(\alpha)\, d\alpha + \int_\sigma^t Y(\alpha, t)\, f(\alpha)\, d\alpha.$$

Rezultă

$$x(t) = Y(\sigma, t)\, x(\sigma) - \int_{t-\tau}^{t} Y(\alpha + \tau, t)\, B(\alpha + \tau)\, x(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\sigma-\tau}^{\sigma} Y(\alpha + \tau, t)\, B(\alpha + \tau)\, x(\alpha)\, d\alpha + \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha, t)\, f(\alpha)\, d\alpha.$$

Dar pentru $t - \tau < \alpha \leqslant t$ avem $t < \alpha + \tau \leqslant t + \tau$

deci $Y(\alpha + \tau, t) \equiv 0$. Obținem în definitiv

$$x(t) = Y(\sigma, t)\, x(\sigma) + \int_{\sigma-\tau}^{\sigma} Y(\alpha + \tau, t)\, B(\alpha + \tau)\, x(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha, t)\, f(\alpha)\, d\alpha. \tag{5}$$

Pentru $f \equiv 0$ această formulă dă soluția generală a sistemului omogen (2). Să considerăm matricea $X(t, \sigma)$ ale cărei coloane sînt soluții ale sistemului omogen (2), nule pentru $\sigma - \tau \leqslant t < \sigma$ și astfel ca $X(\sigma, \sigma) = E$.

Din formula (5) rezultă $X(t, \sigma) = Y(\sigma, t)$.

Să stabilim acum o formulă corespunzătoare pentru soluția generală a sistemului adjunct (3).

Fie $y(t)$ o soluție a sistemului (3) definită pentru $t \leqslant \sigma$ prin condiții inițiale date pe $[\sigma, \sigma + \tau]$, $X(\alpha, t)$ matricea construită mai sus ($\alpha \geqslant t - \tau$). Avem

$$\int_{t}^{\sigma} \dot{y}(s)\, X(s, t)\, ds = -\int_{t}^{\sigma} y(s)\, A(s)\, X(s, t)\, ds - \int_{t}^{\sigma} y(s+\tau)\, B(s+\tau)\, X(s, t)\, ds.$$

De aici

$$y(\sigma)\, X(\sigma, t) - y(t)\, X(t, t) - \int_{t}^{\sigma} y(s)\, \frac{\partial}{\partial s} X(s, t)\, ds = -$$

$$- \int_{t}^{\sigma} y(s)\, A(s)\, X(s, t)\, ds - \int_{t+\tau}^{\sigma+\tau} y(\beta)\, B(\beta)\, X(\beta - \tau, t)\, d\beta.$$

Rezultă

$$y(t) = y(\sigma)\, X(\sigma, t) - \int_{t}^{\sigma} y(s)\, A(s)\, X(s, t)\, ds -$$

$$- \int_{t}^{\sigma} y(s)\, B(s)\, X(s - \tau, t)\, ds + \int_{t}^{\sigma} y(s)\, A(s)\, X(s, t)\, ds +$$

$$+ \int_{t+\tau}^{t} y(s)\, B(s)\, X(s - \tau, t)\, ds + \int_{t}^{\sigma} y(s)\, B(s)\, X(s - \tau, t)\, ds +$$

$$+ \int_{\sigma}^{\sigma+\tau} y(s)\, B(s)\, X(s - \tau, t)\, ds.$$

Deoarece pentru $t \leqslant s < t + \tau$ avem $t - \tau \leqslant s - \tau < t$ rezultă $X(s - \tau, t) \equiv 0$, deci

$$y(t) = y(\sigma)\, X(\sigma, t) + \int_{\sigma}^{\sigma+\tau} y(s)\, B(s)\, X(s - \tau, t)\, ds$$

sau, pentru a folosi numai matricea Y

$$y(t) = y(\sigma)\; Y(t, \sigma) + \int_{\sigma}^{\sigma+\tau} y(s)\, B(s)\, Y(t, s - \tau)\, ds. \tag{6}$$

3. Să notăm cu $x(t\,;\varphi)$ soluția sistemului (1) definită pentru $t \geqslant -\tau$ și care pe $[-\tau, 0]$ coincide cu φ. Din cauza periodicității matricilor A, B și a vectorului f rezultă că $x\,(t + \omega\,;\varphi)$ este soluție a sistemului definită pentru $t + \omega \geqslant -\tau$ deci pentru $t \geqslant -\omega - \tau$. Dacă pentru $-\tau \leqslant t \leqslant 0$ această soluție coincide cu φ atunci $x\,(t + \omega\,;\varphi) \equiv x\,(t\,;\varphi)$ pe baza teoremei de unicitate. Condiția ca o soluție să fie periodică se scrie deci $x\;(\omega + s\,;\;\varphi) = \varphi\;(s)$ pentru $s \in [-\tau, 0]$. Fie $V\varphi$ operatorul definit de relația $V\varphi = x\;(\omega + s\,;\;\varphi)$. Soluția determinată de funcția inițială φ este periodică, de perioadă ω, dacă și numai dacă $V\varphi = \varphi$.

Fie $z(t\,;\;\varphi)$ soluția sistemului omogen (2) definită pentru $t \geqslant -\tau$ și care pe $[-\tau, 0]$ coincide cu φ. Din formula (5) rezultă

$$x\;(t\,;\varphi) = z(t\,;\;\varphi) + \int_{0}^{t} Y(\alpha, t)\, f(\alpha)\, d\alpha.$$

Notînd cu U operatorul definit de relația $U\varphi = z\,(\omega + s\,;\;\varphi)$, avem $V\varphi = U\varphi + \int_{0}^{\omega+s} Y(\alpha,\; \omega + s)\, f(\alpha)\, d\alpha$.

Condiția ca soluția să fie periodică se scrie

$$\varphi = U\varphi + \int_{0}^{\omega+s} Y(\alpha,\; \omega + s)\, f(\alpha)\, d\alpha,$$

sau

$$(I - U)\,\varphi = \int_{0}^{\omega+s} Y(\alpha,\; \omega + s)\, f(\alpha)\, d\alpha,$$

unde I este operatorul identic.

Se verifică imediat că operatorul U este compact dacă $\omega > \tau$, (spațiul funcțiilor φ este spațiul Banach al funcțiilor vectoriale continue pe $[-\tau, 0]$ cu $\| \varphi \| = \sup\, | \varphi |$).

Într-adevăr, din (5) se obține

$$U\varphi = Y(0,\; \omega + s)\; \varphi(0) + \int_{-\tau}^{0} Y(\alpha + \tau,\; \omega + s)\; B(\alpha + \tau)\; \varphi\;(\alpha)\, d\alpha \tag{7}$$

și se vede că dacă $\| \varphi \| < M$ atunci $\| U\varphi \| < L\,(M)$ și din $\dot{z}\,(\omega + s\,;\;\varphi) = A\,(s)\; z\,(\omega + s\,;\;\varphi) + B\;(s)\; z\,(\omega + s - \tau\,;\;\varphi)$ (aici intervine faptul că

$\omega > \tau$) rezultă că derivatele funcțiilor $U\varphi$ sînt uniform mărginite, deci dacă $\{\varphi\}$ este o mulțime mărginită, mulțimea $\{U\varphi\}$ este compactă.

Rezultă deci că sistemul (1) admite o soluție periodică, de perioadă ω, oricare ar fi f, dacă și numai dacă $I - U$ este inversabilă, deci dacă și numai dacă ecuația $U\varphi = \varphi$ admite numai soluția nulă, deci dacă și numai dacă sistemul (2) nu are alte soluții periodice, de perioadă ω, afară de soluția banală.

Dacă sistemul (2) admite soluții periodice, de perioadă ω, ecuația $U\varphi = \varphi$ admite soluții nenule. Din teoria generală a operatorilor compacți rezultă că această ecuație are un număr finit de soluții liniar independente, *deci sistemul (2) admite un număr finit de soluții periodice, de perioadă* ω, *liniar independente.*

Raționamente analoge se pot face pentru sistemul (3). Fie $y(t; \psi)$ soluția sistemului (3) definită pentru $t \leqslant \omega + \tau$ și care pe $[\omega, \omega + \tau]$ coincide cu ψ. O dată cu $y(t; \psi)$ este soluție a sistemului și $y(t - \omega; \psi)$ definită pentru $t - \omega \leqslant \omega + \tau$ deci pentru $t \leqslant 2\omega + \tau$. Dacă $y(t - \omega; \psi)$ coincide cu ψ pentru $\omega \leqslant t \leqslant \omega + \tau$ atunci pe baza teoremei de unicitate avem $y(t - \omega; \psi) \equiv y(t; \psi)$ deci condiția ca soluția $y(t; \psi)$ să fie periodică, de perioadă ω, este ca $y(t - \omega; \psi) \equiv \psi(t)$ pentru $\omega \leqslant t \leqslant \omega + \tau$.

Din formula (6) rezultă că ψ este funcție inițială pentru o soluție periodică, de perioadă ω, a sistemului (3), dacă și numai dacă

$$\psi(t) = \psi(\omega)\ Y(t - \omega, \omega) + \int_{\omega}^{\omega+\tau} \psi(\xi)\, B(\xi)\, Y(t - \omega, \xi - \tau)\, d\xi. \quad (8)$$

Vom nota $\tilde{\varphi}(s) = \psi(s + \omega + \tau)$, $-\tau \leqslant s \leqslant 0$.

Dacă ψ verifică ecuația (8) funcția $\tilde{\varphi}$ verifică relația

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\varphi}(-\tau)\ Y(s + \tau, \omega) + \int_{\omega}^{\omega+\tau} \tilde{\varphi}(\xi - \omega - \tau)\, B(\xi)\, Y(s + \tau, \xi - \tau)\, d\xi$$

deci

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\varphi}(-\tau)\ Y(s + \tau, \omega) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{\varphi}(\eta)\, B(\eta + \tau)\, Y(s + \tau, \eta + \omega)\, d\eta. \quad (9)$$

În cele ce urmează vom demonstra că ecuația $\varphi - U\varphi = 0$, unde U este dat de (7), și ecuația (9) au același număr de soluții liniar independente și că ecuația $\varphi - U\varphi = F(s)$ are soluție dacă și numai dacă

$$\tilde{\varphi}(-\tau)\, F(0) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{\varphi}(\eta)\, B(\eta + \tau)\, F(\eta)\, d\eta = 0$$

pentru toate soluțiile $\tilde{\varphi}(s)$ ale ecuației (9).

4. Să considerăm întîi ecuația

$$\varphi(s) - \lambda K_1(s, -\tau)\, \varphi(0) - \lambda \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \eta)\, B(\eta + \tau)\, \varphi(\eta)\, d\eta = \chi(s). \quad (10)$$

Căutăm soluția sub forma $\varphi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \varphi_i(s)$.

Înlocuind în ecuație și identificînd coeficienții puterilor lui λ obținem

$$\varphi_i(s) = K_1(s, -\tau)\,\varphi_{i-1}(0) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \eta)\,B(\eta+\tau)\,\varphi_{i-1}(\eta)\,d\eta. \quad (11)$$

De aici rezultă $|\varphi_i(s)| \leqslant M^i \sup |\chi(s)|$, unde M este oricît de mic dacă $|K_1|$ este destul de mic. Cum convergența seriei este astfel asigurată pentru $|\lambda| < \frac{1}{M}$ rezultă că pentru $\lambda = 1$ seria converge dacă $M < 1$.

Avem

$$\varphi_1(s) = K_1(s, -\tau)\,\chi(0) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \eta)\,B(\eta+\tau)\,\chi(\eta)\,d\eta.$$

Demonstrăm prin inducție formula

$$\varphi_l(s) = K_l(s, -\tau)\,\chi(0) + \int_{-\tau}^{0} K_l(s, \eta)\,B(\eta+\tau)\,\chi(\eta)\,d\eta \quad (12)$$

unde K_l verifică relația

$$K_l(s, \eta) = K_1(s, -\tau)\,K_{l-1}(0, \eta) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \zeta)\,B(\zeta+\tau)\,K_{l-1}(\zeta, \eta)\,d\zeta.$$

Într-adevăr, din (11) rezultă

$$\varphi_{l+1}(s) = K_1(s, -\tau)\left[K_l(0, -\tau)\,\chi(0) + \int_{-\tau}^{0} K_l(0, \eta)\,B(\eta+\tau)\,\chi(\eta)\,d\eta\right] +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \eta)B(\eta+\tau)\left[K_l(\eta, -\tau)\chi(0) + \int_{-\tau}^{0} K_l(\eta, \zeta)\,B(\zeta+\tau)\chi(\zeta)\,d\zeta\right]d\eta =$$

$$= \left[K_1(s, -\tau)\,K_l(0, -\tau) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \eta)\,B(\eta+\tau)\,K_l(\eta, -\tau)\,d\eta\right]\chi(0) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0}\left[K_1(s, -\tau)K_l(0, \eta) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \xi)B(\xi+\tau)K_l(\xi, \eta)\,d\xi\right]B(\eta+\tau)\chi(\eta)\,d\eta =$$

$$= K_{l+1}(s, -\tau)\,\chi(0) + \int_{-\tau}^{0} K_{l+1}(s, \eta)\,B(\eta+\tau)\,\chi(\eta)\,d\eta$$

unde

$$K_{l+1}(s, \eta) = K_1(s, -\tau)\,K_l(0, \eta) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \xi)B(\xi+\tau)\,K_l(\xi, \eta)\,d\xi$$

și astfel formula (12) este dovedită.

Notînd $\Gamma(s, \eta) = \sum_{1}^{\infty} K_l(s, \eta)$ rezultă că soluția ecuației (10) pentru $\lambda = 1$ se scrie

$$\varphi(s) = \chi(s) + \Gamma(s, -\tau)\chi(0) + \int_{-\tau}^{0} \Gamma(s, \eta)\,B(\eta+\tau)\,\chi(\eta)\,d\eta. \quad (13)$$

Considerăm acum ecuația

$$\tilde{\varphi}(s) - \lambda\tilde{\varphi}(-\tau)\,K_1(0, s) - \lambda\int_{-\tau}^{0} \tilde{\varphi}(\eta)\,B(\eta+\tau)K_1(\eta, s)\,d\eta = \tilde{\chi}(s). \quad (14)$$

Căutăm soluția sub forma $\tilde{\varphi}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \tilde{\varphi}_i(s)$. Obținem

$$\tilde{\varphi}_0(s) = \tilde{\chi}(s), \tilde{\varphi}_i(s) = \tilde{\varphi}_{i-1}(-\tau)K_1(0, s) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{\varphi}_{i-1}(\eta)\; B(\eta+\tau)\; K_1(\eta, s)\; d\eta.$$

Ca mai sus se arată că seria este convergentă pentru $\lambda = 1$ dacă $|K_1|$ este destul de mic și prin inducție se obține

$$\tilde{\varphi}_l(s) = \tilde{\chi}(-\tau)\,\tilde{K}_l(0, s) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{\chi}(\eta)\,B(\eta+\tau)\,\tilde{K}_l(\eta, s)\,d\eta$$

unde $\tilde{K}_l$ verifică relația

$$\tilde{K}_l(\eta, s) = \tilde{K}_{l-1}(\eta, -\tau)\,K_1(0, s) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{K}_{l-1}(\eta, \zeta)\,B(\zeta+\tau)\,K_1(\zeta, s)\,d\zeta.$$

In definitiv soluția ecuației (14) pentru $\lambda = 1$ se scrie

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + \tilde{\chi}(-\tau)\,\tilde{\Gamma}(0, s) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{\chi}(\eta)\,B(\eta+\tau)\;\tilde{\Gamma}(\eta, s)\,d\eta \quad (15)$$

unde $\tilde{\Gamma}(\eta, s) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{K}_l(\eta, s)$.

Dovedim prin inducție relația $\tilde{K}_l(\eta, s) = K_l(\eta, s)$.

Avem

$$K_2(s, \eta) = K_1(s, -\tau)\,K_1(0, \eta) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \zeta)\,B(\zeta+\tau)\,K_1(\zeta, \eta)\,d\zeta$$

$$\tilde{K}_2(\eta, s) = K_1(\eta, -\tau)\,K_1(0, s) + \int_{-\tau}^{0} K_1(\eta, \zeta)\,B(\zeta+\tau)\;K_1(\zeta, s)\,d\zeta$$

deci pentru $l = 2$ relația este adevărată.

Presupunem egalitatea adevărată pentru $j \leqslant l$. Atunci are loc relația

$$K_l(\eta, s) = K_1(\eta, -\tau)\,K_{l-1}(0, s) + \int_{-\tau}^{0} K_1(\eta, \zeta)\,B(\zeta+\tau)\,K_{l-1}(\zeta, s)\,d\zeta =$$

$$= K_{l-1}(\eta, -\tau)\,K_1(0, s) + \int_{-\tau}^{0} K_{l-1}(\eta, \zeta)\,B(\zeta+\tau)\;K_1(\zeta, s)\,d\zeta = \tilde{K}_l(\eta, s).$$

Rezultă

$$K_{l+1}(\eta, s) = K_1(\eta, -\tau)\, K_l(0, s) + \int_{-\tau}^{0} K_1(\eta, \zeta)\, B(\zeta + \tau)\, K_l(\zeta, s)\, d\zeta =$$

$$= K_1(\eta, -\tau)\left[K_{l-1}(0, -\tau)\, K_1(0, s) + \int_{-\tau}^{0} K_{l-1}(0, \zeta)\, B(\zeta + \tau)\, K_1(\zeta, s) d\zeta\right] +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} K_1(\eta, \zeta)\, B(\zeta + \tau)\left[K_{l-1}(\zeta, -\tau)\, K_1(0, s) +\right.$$

$$\left. + \int_{-\tau}^{0} K_{l-1}(\zeta, \xi)\, B(\xi + \tau)\, K_1(\xi, s)\, d\xi\right] d\zeta = \left[K_1(\eta, -\tau)\, K_{l-1}(0, -\tau) +\right.$$

$$\left. + \int_{-\tau}^{0} K_1(\eta, \zeta) B(\zeta + \tau) K_{l-1}(\zeta, -\tau)\, d\zeta\right] K_1(0, s) + \int_{-\tau}^{0}\left[K_1(\eta, -\tau)\, K_{l-1}(0, \zeta) +\right.$$

$$\left. + \int_{-\tau}^{0} K_1(\eta, \xi)\, B(\xi + \tau)\, K_{l-1}(\xi, \zeta)\, d\xi\right] B(\zeta + \tau)\, K_1(\zeta, s)\, d\zeta =$$

$$= K_l(\eta, -\tau)\, K_1(0, s) + \int_{-\tau}^{0} K_l(\eta, \zeta)\, B(\zeta + \tau)\, K_1(\zeta, s)\, d\zeta =$$

$$= \widetilde{K}_l(\eta, -\tau)\, K_1(0, s) + \int_{-\tau}^{0} \widetilde{K}_l(\eta, \zeta)\, B(\zeta + \tau)\, K_1(\zeta, s)\, d\zeta = \widetilde{K}_{l+1}(\eta, s).$$

Relația este astfel dovedită și deci $\widetilde{\Gamma}(\eta, s) = \Gamma(\eta, s)$ și soluția ecuației (14) pentru $\lambda = 1$ se scrie

$$\widetilde{\varphi}(s) = \widetilde{\chi}(s) + \widetilde{\chi}(-\tau)\, \Gamma(0, s) + \int_{-\tau}^{0} \widetilde{\chi}(\eta)\, B(\eta + \tau)\, \Gamma(\eta, s)\, d\eta. \tag{16}$$

Ecuația $\varphi - U\varphi = F(s)$ se scrie

$$\varphi(s) - Y(0, \omega + s)\, \varphi(0) - \int_{-\tau}^{0} Y(\eta + \tau, \omega + s)\, B(\eta + \tau)\, \varphi(\eta)\, d\eta = F(s). \tag{17}$$

Deoarece $Y(\eta + \tau, \omega + s)$ este uniform continuă în pătratul $-\tau \leqslant \eta \leqslant 0$, $-\tau \leqslant s \leqslant 0$ putem scrie

$$Y(\eta + \tau, \omega + s) = \sum_k a_k(s)\, b_k(\eta) + K_1(s, \eta)$$

unde $a_k(s)$ sînt vectori coloană, $b_k(\eta)$ vectori linie, a_k și b_k liniar independenți, iar $|K_1(s, \eta)|$ poate fi luat oricît de mic. Ecuația (17) devine

$$\varphi(s) - K_1(s, -\tau)\, \varphi(0) - \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \eta)\, B(\eta + \tau)\, \varphi(\eta)\, d\eta =$$

$$= \sum_k a_k(s)\, b_k(-\tau)\, \varphi(0) + \sum_k \int_{-\tau}^{0} a_k(s)\, b_k(\eta)\, B(\eta + \tau)\, \varphi(\eta)\, d\eta + F(s).$$

Dacă notăm $\varphi(s) - K_1(s, -\tau)\,\varphi(0) - \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \eta) B(\eta+\tau)\,\varphi(\eta)\,d\eta = \chi(s)$, rezultă, pe baza formulei (13),

$$\chi(s) = \sum_k a_k(s)\, b_k(-\tau)\Big[\chi(0) + \Gamma(0,-\tau)\chi(0) + \int_{-\tau}^{0} \Gamma(0,\eta) B(\eta+\tau)\chi(\eta)\,d\eta\Big] +$$

$$+ \sum_k \int_{-\tau}^{0} a_k(s)\; b_k(\eta)\, B(\eta+\tau)\Big[\chi(\eta) + \Gamma(\eta, -\tau)\,\chi(0) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} \Gamma(\eta,\zeta)\, B(\zeta+\tau)\,\chi(\zeta)\,d\zeta\Big]d\eta + F(s).$$

Notînd $\overline{b}_k(\eta) = b_k(\eta) + b_k(-\tau)\,\Gamma(0,\eta) + \int_{-\tau}^{0} b_k(\zeta)\, B(\zeta+\tau)\Gamma(\zeta,\eta)\,d\zeta$ ecuația devine

$$\chi(s) = \sum_k a_k(s)\,\overline{b}_k(-\tau)\chi(0) + \sum_k a_k(s)\int_{-\tau}^{0} \overline{b}_k(\eta)\, B(\eta+\tau)\,\chi(\eta)d\eta + F(s). \quad (18)$$

Rezultă de aici că $\chi(s) - F(s) = \sum_k \lambda_k\, a_k(s)$.

Înlocuind pe $\chi(s)$ în ecuație și ținînd seama de faptul că a_k sînt liniar independenți rezultă

$$\lambda_k = \sum_j \gamma_{kj}\,\lambda_j + f_k \quad (19)$$

unde

$$\gamma_{kj} = \overline{b}_k(-\tau)\, a_j(0) + \int_{-\tau}^{0} \overline{b}_k(\eta)\, B(\eta+\tau)\, a_j(\eta)\,d\eta$$

$$f_k = \overline{b}_k(-\tau)\, F(0) + \int_{-\tau}^{0} \overline{b}_k(\eta)\, B(\eta+\tau)\, F(\eta)\,d\eta.$$

Sistemul (19) are soluție dacă și numai dacă

$$\sum_k f_k\,\mu_k = 0 \quad (20)$$

pentru toate soluțiile sistemului

$$\mu_k = \sum_j \gamma_{jk}\,\mu_j. \quad (21)$$

Deoarece sistemul (19) este echivalent cu (18) iar (18) este echivalent cu (17), rezultă că (20) reprezintă condiția necesară și suficientă ca (17) să admită soluții.

Pentru a explicita această condiție să observăm că ținînd seama de felul în care a fost scris $Y(\eta + \tau, \omega + s)$ ecuația (9) devine

$$\tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(-\tau) K_1(0, s) - \int_{-\tau}^{0} \tilde{\varphi}(\eta) B(\eta + \tau) K_1(\eta, s) d\eta =$$

$$= \sum_k \tilde{\varphi}(-\tau) a_k(0) b_k(s) + \sum_k \int_{-\tau}^{0} \tilde{\varphi}(\eta) B(\eta + \tau) a_k(\eta) b_k(s) d\eta.$$

Punînd

$$\tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(-\tau) K_1(0, s) - \int_{-\tau}^{0} \tilde{\varphi}(\eta) B(\eta + \tau) K_1(\eta, s) d\eta = \tilde{\chi}(s) \tag{22}$$

și ținînd seama de (16) obținem

$$\tilde{\chi}(s) = \left[\tilde{\chi}(-\tau) + \tilde{\chi}(-\tau) \Gamma(0, -\tau) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{\chi}(\eta) B(\eta + \right.$$

$$\left. + \tau) \Gamma(\eta, -\tau) d\eta\right] \sum_k a_k(0) b_k(s) + \sum_k \int_{-\tau}^{0} \left[\tilde{\chi}(\eta) + \tilde{\chi}(-\tau) \Gamma(0, \eta) + \right.$$

$$\left. + \int_{-\tau}^{0} \tilde{\chi}(\zeta) B(\zeta + \tau) \Gamma(\zeta, \eta) d\zeta\right] B(\eta + \tau) a_k(\eta) b_k(s) d\eta.$$

Notînd $\bar{a}_k(\eta) = \Gamma(\eta, -\tau) a_k(0) + a_k(\eta) + \int_{-\tau}^{0} \Gamma(\eta, \zeta) B(\zeta + \tau) a_k(\zeta) d\zeta$

ecuația devine

$$\tilde{\chi}(s) = \tilde{\chi}(-\tau) \sum_k \bar{a}_k(0) b_k(s) + \sum_k \int_{-\tau}^{0} \tilde{\chi}(\eta) B(\eta + \tau) \bar{a}_k(\eta) b_k(s) d\eta. \tag{23}$$

Soluția ecuației este de forma $\tilde{\chi}(s) = \sum_k \mu_k b_k(s)$.

Înlocuind în (23) obținem

$$\mu_k = \sum_j \tilde{\gamma}_{kj} \mu_j \tag{24}$$

$$\tilde{\gamma}_{kj} = b_j(-\tau) \bar{a}_k(0) + \int_{-\tau}^{0} b_j(\eta) B(\eta + \tau) \bar{a}_k(\eta) d\eta.$$

Să verificăm relația $\tilde{\gamma}_{kj} = \gamma_{jk}$. Avem

$$\tilde{\gamma}_{kj} = b_j(-\tau) \Gamma(0, -\tau) a_k(0) + b_j(-\tau) a_k(0) + b_j(-\tau) \int_{-\tau}^{0} \Gamma(0, \zeta) B(\zeta +$$

$$+ \tau) a_k(\zeta) d\zeta + \int_{-\tau}^{0} b_j(\eta) B(\eta + \tau) \left[\Gamma(\eta, -\tau) a_k(0) + a_k(\eta) + \right.$$

$$\left. + \int_{-\tau}^{0} \Gamma(\eta, \zeta) B(\zeta + \tau) a_k(\zeta) d\zeta\right] d\eta$$

$$\gamma_{jk} = b_j(-\tau)\,a_k(0) + b_j(-\tau)\,\Gamma(0,-\tau)\,a_k(0) +$$
$$+\int_{-\tau}^{0} b_j(\zeta)B(\zeta+\tau)\,\Gamma(\zeta,-\tau)\,a_k(0)\,d\zeta+\int_{-\tau}^{0}\Big[b_j(\eta)+b_j(-\tau)\,\Gamma(0,\eta)+$$
$$+\int_{-\tau}^{0} b_j(\zeta)\,B(\zeta+\tau)\,\Gamma(\zeta,\eta)\,d\zeta\Big]B(\eta+\tau)\,a_k(\eta)\,d\eta$$

și egalitatea $\tilde{\gamma}_{kj} = \gamma_{jk}$ se verifică imediat, deci sistemul (21) coincide cu (24). Condiția (20) se scrie explicit

$$\sum_k \mu_k\,\overline{b}_k(-\tau)\,F(0) + \sum_k \int_{-\tau}^{0} \mu_k\,\overline{b}_k(\eta)\,B(\eta+\tau)\,F(\eta)\,d\eta = 0$$

deci

$$\sum_k \mu_k\Big[b_k(-\tau) + b_k(-\tau)\;\Gamma(0,-\tau) + \int_{-\tau}^{0} b_k(\zeta)\,B(\zeta+$$
$$+\tau)\,\Gamma(\zeta,-\tau)\,d\zeta\Big]F(0) + \sum_k \mu_k \int_{-\tau}^{0}\Big[b_k(\eta) + b_k(-\tau)\,\Gamma(0,\eta) +$$
$$+\int_{-\tau}^{0} b_k(\zeta)\,B(\zeta+\tau)\,\Gamma(\zeta,\eta)\,d\zeta\Big]B(\eta+\tau)\,F(\eta)\,d\eta = 0.$$

Dar dacă μ_k verifică sistemul (24) avem $\sum_k \mu_k\,b_k(s) = \tilde{\chi}(s)$ unde $\tilde{\chi}(s)$ verifică ecuația (23) deci este dat de (22) unde $\tilde{\varphi}$ este soluția ecuației (9).

Condiția (20) se scrie deci

$$\Big[\tilde{\chi}(-\tau) + \tilde{\chi}(-\tau)\,\Gamma(0,-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{\chi}(\zeta)\,B(\zeta+\tau)\,\Gamma(\zeta,-\tau)\,d\zeta\Big]F(0) +$$
$$+\int_{-\tau}^{0}\Big[\tilde{\chi}(\eta)+\tilde{\chi}(-\tau)\Gamma(0,\eta) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{\chi}(\zeta)B(\zeta+\tau)\Gamma(\zeta,\eta)d\zeta\Big]B(\eta+\tau)F(\eta)d\eta = 0.$$

Deoarece $\tilde{\chi}$ este dat de (22) condiția devine (ținînd seama de (15))

$$\tilde{\varphi}(-\tau)\,F(0) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{\varphi}(\eta)\,B(\eta+\tau)\,F(\eta)\,d\eta = 0.$$

5. Vom scrie acum această condiție sub o nouă formă, ținînd seama de faptul că $F(s) = \int_0^{\omega+s} Y(\alpha,\,\omega+s)\,f(\alpha)\,d\alpha$ și că $\tilde{\varphi}(s) = \psi(s+\tau+\omega)$.

Condiția devine

$$\psi(\omega)\int_0^{\omega} Y(\alpha,\,\omega)\,f(\alpha)\,d\alpha +$$
$$+\int_{-\tau}^{0} \psi(\eta+\tau+\omega)\,B(\eta+\tau)\Big[\int_0^{\omega+\eta} Y(\alpha,\,\omega+\eta)\,f(\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\eta = 0.$$

În ultima integrală permutăm ordinea de integrare și obținem

$$\psi(\omega)\int_0^{\omega} Y(\alpha,\omega)f(\alpha)\,d\alpha+\int_0^{\omega-\tau}\left[\int_{-\tau}^{0}\psi(\eta+\tau+\omega)B(\eta+\tau)Y(\alpha,\omega+\eta)d\eta\right]f(\alpha)d\alpha+$$

$$+\int_{\omega-\tau}^{\omega}\left[\int_{\alpha-\omega}^{0}\psi(\eta+\tau+\omega)\,B(\eta+\tau)Y(\alpha,\,\omega+\eta)\,d\eta\right]f(\alpha)\,d\alpha=0.$$

Dar pentru $\eta<\alpha-\omega$ avem $\alpha>\omega+\eta$ deci $Y(\alpha,\omega+\eta)\equiv 0$ deci în ultima integrală putem înlocui pe $\alpha-\omega$ cu $-\tau$ și deci condiția se scrie

$$\psi(\omega)\int_0^{\omega} Y(\alpha,\,\omega)f(\alpha)\,d\alpha+\int_0^{\omega}\left[\int_{-\tau}^{0}\psi(\eta+\tau+\omega)B(\eta+\tau)Y(\alpha,\omega+\eta)d\eta\right]f(\alpha)\,d\alpha=0$$

sau

$$\int_0^{\omega}\left[\psi(\omega)\;Y(\alpha,\,\omega)+\int_{\omega}^{\omega+\tau}\psi(\xi)\,B(\xi)\;Y(\alpha,\,\xi-\tau)\,d\xi\right]f(\alpha)\,d\alpha=0$$

deci, ținînd seama de (6) $\int_0^{\omega} y(\alpha)\,f(\alpha)\,d\alpha=0$, unde y este soluția sistemului (3) definită de condiția inițială ψ. În definitiv am demonstrat

TEOREMA 2. *Sistemele (2) și (3) au același număr finit de soluții periodice independente, de perioadă* ω. *Dacă* $\int_0^{\omega} y_k(\alpha)\,f(\alpha)\;d\alpha=0$ *pentru toate soluțiile periodice independente* y_k *ale sistemului (3), atunci sistemul (1) admite soluții periodice.*

6. Considerăm acum un sistem general cu întîrziere de forma

$$\dot{x}(t)=\int_{-\infty}^{0} x(t+s)\,d_s\,\eta(t,s)+f(t) \tag{25}$$

unde

a) $\eta(t,s)$ este definită pentru $t\geqslant 0$, $-\infty<s<+\infty$, $\eta(t,\,s)\equiv 0$ pentru $s\geqslant 0$;

b) există funcțiile $\tau_{ij}(t)$ și $V_{ij}(t)$ mărginite pentru $t\geqslant 0$ astfel ca $\eta_{ij}(t,\,s)\equiv\eta_{ij}(t,\,-\tau_{ij}(t))\equiv 0$ pentru $s\leqslant-\tau_{ij}(t)$, $\overset{\circ}{\bigvee_{s=-\tau_{ij}(t)}}\eta(t,s)\leqslant V_{ij}(t)$ unde ca de obicei $\overset{\beta}{\bigvee_{s=\alpha}} f(s)$ înseamnă variația totală a funcției f pe $[\alpha,\,\beta]$;

c) $\eta_{ij}(t,\,s)$ sînt continue în t, uniform în raport cu s;

d) $\eta(t,\,s)$, $f(t)$, $\tau_{ij}(t)$, $V_{ij}(t)$ sînt periodice în t cu perioada ω.

În cele ce urmează vom nota cu τ un număr astfel ca $\tau\geqslant\tau_{ij}(t)$. Va rezulta $\eta(t,\,s)\equiv 0$ pentru $s\leqslant-\tau$.

Fie $Y(\alpha,\,t)$ o matrice care verifică sistemul

$$Y(\alpha,\,t)+\int_{-\infty}^{0}\eta(\alpha-\gamma,\,\gamma)\;Y(\alpha-\gamma,\,t)\,d\gamma=\text{const.}$$

și condițiile $Y(\alpha, t) \equiv 0$ pentru $\alpha > t$, $Y(t, t) = E$. Deoarece $Y(\alpha, t) \equiv$ $\equiv 0$ pentru $\alpha > t$ rezultă $Y(\alpha - \gamma, t) \equiv 0$ pentru $\alpha - \gamma > t$ deci $Y(\alpha - \gamma, t) \equiv 0$ pentru $\gamma < \alpha - t$ deci

$$Y(\alpha, t) + \int_{\alpha - t}^{0} \eta(\alpha - \gamma, \gamma)\, Y(\alpha - \gamma, t)\, d\gamma = \text{const.}$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $\alpha - \gamma = \beta$ căpătăm

$$Y(\alpha, t) + \int_{\alpha}^{t} \eta(\beta, \alpha - \beta)\, Y(\beta, t)\, d\beta = E. \tag{26}$$

Se verifică imediat că soluția construită prin aproximații succesive este continuă în (α, t) și cu variație mărginită în α.

Fie $x(t)$ o soluție a sistemului (25). Avem

$$\int_{\sigma}^{t} \dot{x}(\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha = \int_{\sigma}^{t} \left[\int_{-\infty}^{0} x(\alpha + s)\, d_s\, \eta(\alpha, s) \right] Y(\alpha, t)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\sigma}^{t} f(\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha$$

deci

$$x(t)\, Y(t, t) - x(\sigma)\, Y(\sigma, t) - \int_{\sigma}^{t} x(\alpha)\, d_{\alpha}\, Y(\alpha, t) =$$

$$= \int_{\sigma}^{t} \left[\int_{-\infty}^{\alpha} x(s)\, d_s\, \eta(\alpha, s - \alpha) \right] Y(\alpha, t)\, d\alpha + \int_{\sigma}^{t} f(\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\sigma} x(s)\, d_s \int_{\sigma}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\sigma}^{t} x(s)\, d_s \int_{s}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha + \int_{\sigma}^{t} f(\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha.$$

Ținînd seama de (26) rezultă

$$x(t) = x(\sigma)\, Y(\sigma, t) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s)\, d_s \int_{\sigma}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\sigma}^{t} f(\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha.$$

Cum $Y(\alpha, t) \equiv 0$ pentru $\alpha > t$ putem scrie

$$x(t) = x(\sigma) Y(\sigma, t) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s)\, d_s \int_{\sigma}^{\infty} \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t)\, d\alpha + \int_{\sigma}^{t} f(\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha.$$

Deoarece $\eta(t, s) \equiv 0$ pentru $s \leqslant -\tau$, avem $\eta(\alpha, s-\alpha) \equiv 0$ pentru $\alpha > \sigma$, $s < \sigma - \tau$ și pentru $s < \sigma$, $\alpha > \sigma + \tau$. Prin urmare

$$x(t) = x(\sigma)\, Y(\sigma, t) + \int_{\sigma-\tau}^{\sigma} x(s)\, d_s \int_{\sigma}^{\sigma+\tau} \eta(\alpha, s-\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha + \\ + \int_{\sigma}^{t} f(\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha. \tag{27}$$

Să observăm că dacă $X(t, \sigma)$ este o matrice ale cărei linii verifică pentru $t > \sigma$ sistemul (25) cu $f \equiv 0$ și condițiile $X(\sigma, \sigma) = E$, $X(t, \sigma) \equiv 0$ pentru $t < \sigma$, din formula (27) rezultă $X(t, \sigma) = Y(\sigma, t)$.

Considerăm acum sistemul adjunct

$$y(\alpha) + \int_{-\infty}^{0} \eta(\alpha - \gamma, \gamma)\, y(\alpha - \gamma)\, d\gamma = \text{const.} \tag{28}$$

Deoarece $\eta(t, s) \equiv 0$ pentru $s \geqslant 0$ și $s \leqslant -\tau$ sistemul (28) se scrie

$$y(\alpha) + \int_{\alpha}^{\alpha+\tau} \eta(\beta, \alpha - \beta)\, y(\beta)\, d\beta = \text{const.}$$

deci, pentru σ fixat

$$y(\alpha) + \int_{\alpha}^{\sigma} \eta(\beta, \alpha - \beta)\, y(\beta)\, d\beta = y(\sigma) + \int_{\sigma}^{\sigma+\tau} \eta(\beta, \sigma - \beta)\, y(\beta)\, d\beta - \\ - \int_{\sigma}^{\alpha+\tau} \eta(\beta, \alpha - \beta)\, y(\beta)\, d\beta.$$

Se vede de aici că dacă se dă soluția $y(t)$ pe segmentul $[\sigma, \sigma + \tau]$ ea rezultă determinată pentru $\alpha < \sigma$ printr-un sistem de ecuații integrale de tip Volterra, ceea ce permite să se formuleze teorema de existență și unicitate pentru sistemul (28); *pentru fiecare funcție inițială cu variație mărginită pe* $[\sigma, \sigma + \tau]$ *soluția există în clasa funcțiilor cu variație mărginită. Dacă funcția inițială este continuă soluția rezultă continuă.*

Fie $t < \sigma$, $X(\alpha, \gamma)$ o matrice ale cărei linii verifică, ca funcții de α, sistemul (25) pentru $f \equiv 0$ și condițiile $X(\alpha, \gamma) \equiv 0$ pentru $\alpha < \gamma$, $X(\gamma, \gamma) = E$. Avem, pentru o soluție $y(\alpha)$ a sistemului (28),

$$\int_{t}^{\sigma} X(\alpha, t)\, dy(\alpha) = X(\sigma, t)\, y(\sigma) - X(t, t)\, y(t) - \int_{t}^{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} X(\alpha, t)\right] y(\alpha)\, d\alpha.$$

De aici

$$y(t) = X(\sigma, t)\, y(\sigma) + \int_{t}^{\sigma} X(\alpha, t)\, d_\alpha \left[\int_{-\infty}^{0} \eta(\alpha - \gamma, \gamma)\, y(\alpha - \gamma)\, d\gamma\right] - \\ - \int_{t}^{\sigma} \left[\int_{-\infty}^{0} X(\alpha + s, t)\, d_s\, \eta(\alpha, s)\right] y(\alpha)\, d\alpha.$$

Dar

$$\int_t^\sigma \left[\int_{-\infty}^{0} X(\alpha+s,t)\,d_s\eta(\alpha,s)\right] y(\alpha)\,d\alpha = \int_t^\sigma \left[\int_{-\infty}^{\alpha} X(\beta,t)\,d_\beta\,\eta(\alpha,\beta-\alpha)\right] y(\alpha)\,d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} X(\beta,\ t)\,d_\beta \int_t^\sigma \eta(\alpha,\ \beta-\alpha)\ y(\alpha)\,d\alpha + \int_t^\sigma X(\beta,\ t)\,d_\beta \int_\beta^\sigma \eta(\alpha,\ \beta-\alpha)\,y(\alpha)\,d\alpha.$$

Rezultă

$$y(t) = X(\sigma,\ t)\,y(\sigma) + \int_t^\sigma X(\beta,\ t)\ d_\beta \left[\int_\beta^\infty \eta(\alpha,\ \beta\ -\ \alpha)\,y(\alpha)\ d\alpha\right] -$$

$$-\int_{-\infty}^{t} X(\beta,\ t)\ d_\beta \int_t^\sigma \eta(\alpha,\ \beta-\alpha)\,y(\alpha)\,d\alpha + \int_t^\sigma X(\beta,\ t)\ d_\beta \int_\sigma^\beta \eta(\alpha,\ \beta-\alpha)\,y(\alpha)\,d\alpha$$

deci

$$y(t) = X(\sigma,\ t)\ y(\sigma) + \int_{-\infty}^{\sigma} X(\beta,\ t)\ d_\beta \int_\sigma^\infty \eta(\alpha,\ \beta-\alpha)\,y(\alpha)\,d\alpha,\ \text{căci}\ X(\beta,\ t) \equiv$$

$$\equiv 0\ \text{pentru}\ \beta < t,$$

sau, deoarece $\eta\ (\alpha,\ \beta\ -\ \alpha) \equiv 0$ pentru $\beta\ -\ \alpha < -\ \tau$

$$y(t) = X(\sigma,\ t)\,y(\sigma) + \int_{\sigma-\tau}^{\sigma} X(\beta,\ t)\ d_\beta \int_\sigma^{\sigma+\tau} \eta(\alpha,\ \beta\ -\ \alpha)\,y(\alpha)\ d\alpha. \quad (29)$$

7. Din (28) se vede că dacă $y(\alpha)$ este soluție a ecuației atunci $y\ (\alpha\ -\ \omega)$ este de asemenea soluție, din cauza periodicității funcției $\eta(t,\ s)$ în raport cu t. Fie $y(\alpha;\ \psi)$ soluția definită pentru $\alpha < \sigma$ cu ajutorul funcției ψ dată pe $[\sigma,\ \sigma + \tau\ ]$; această soluție este dată de (29). Funcția $y(\alpha\ -\ \omega,\ \psi)$ va fi și ea soluție și această soluție este definită pentru $\alpha\ -\ \omega < \sigma$ deci pentru $\alpha < \omega + \sigma$. Dacă pentru $\sigma \leqslant \alpha \leqslant \sigma + \tau$ această soluție coincide cu ψ rezultă că pentru $\alpha < \sigma$ ea va coincide cu $y\ (\alpha\ ;\ \psi)$ deci $y\ (\alpha\ -\ \omega\ ;\ \psi) \equiv y\ (\alpha,\ \psi)$ și soluția $y\ (\alpha,\ \psi)$ este periodică, de perioadă ω. Prin urmare condiția ca soluția să fie periodică, de perioadă ω, se scrie $y(\alpha\ -\ \omega,\ \psi) = \psi$ pentru $\sigma \leqslant \alpha \leqslant \sigma + \tau$. (În aceste raționamente am folosit esențial condiția $\omega > \tau$). Avem din (29)

$$y(\alpha\ -\ \omega,\ \psi) = X(\sigma,\ \alpha\ -\omega)\ \psi(\sigma) + \int_{\sigma-\tau}^{\sigma} X(\beta,\ \alpha-\beta)\ d_\beta \int_\sigma^{\sigma+\tau} \eta(\gamma,\beta-\gamma)\psi(\gamma)\,d\gamma.$$

Observăm că $X\ (\sigma,\ t) = Y\ (t,\ \sigma)$. Funcțiile inițiale ale soluțiilor periodice definite pentru $\sigma \leqslant \alpha \leqslant \sigma + \tau$ sînt deci soluții ale ecuației

$$\psi(\alpha) = Y(\alpha\ -\ \omega,\ \sigma)\ \psi(\sigma) + \int_{\sigma-\tau}^{\sigma} Y(\alpha\ -\ \omega,\ \beta)\ d_\beta \int_\sigma^{\sigma+\tau} \eta(\gamma,\ \beta\ -\ \gamma)\ \psi(\gamma)\,d\gamma.$$

Luăm $\sigma = \omega$, $\widetilde{\varphi}(s) = \psi(s\ +\ \omega\ +\ \tau)$ și obținem

$$\widetilde{\varphi}(s) = Y(s+\tau,\ \omega)\ \widetilde{\varphi}(-\tau) + \int_{\omega-\tau}^{\omega} Y(s+\tau,\beta)\ d_\beta \int_\omega^{\omega+\tau} \eta(\gamma,\beta-\gamma)\ \widetilde{\varphi}(\gamma-\omega-\tau)\,d\gamma.$$

Prin simple schimbări de variabilă obținem ecuația

$$\tilde{\varphi}(s) = Y(s+\tau, \omega)\,\tilde{\varphi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} Y(s+\tau, \beta+\omega)\,d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma+\tau, \beta-\gamma-\tau)\,\tilde{\varphi}(\gamma)\,d\gamma \quad (30)$$

ale cărei soluții determină funcțiile inițiale ale soluțiilor periodice ale sistemului (28).

Aceleași raționamente și formula (27) arată că funcțiile inițiale ale soluțiilor periodice ale sistemului (25) sînt soluțiile ecuației

$$\varphi(s) - \varphi(0)\,Y(0, \omega+s) - \int_{-\tau}^{0} \varphi(\beta)\,d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta-\alpha-\tau)\,Y(\alpha+ \\ +\tau, \omega+s)\,d\alpha = \int_{0}^{\omega+s} f(\alpha)\,Y(\alpha, \omega+s)\,d\alpha. \quad (31)$$

8. Considerăm ecuația

$$\varphi(s) - \lambda\varphi(0)\,K_1(-\tau, s) - \lambda\int_{-\tau}^{0} \varphi(\beta)\,d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+ \\ +\tau, \beta-\alpha-\tau)\,K_1(\alpha, s)\,d\alpha = \chi(s). \quad (32)$$

Căutăm soluția sub forma $\varphi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\,\varphi_i(s)$.

Înlocuind în ecuație și identificînd coeficienții puterilor lui λ avem $\varphi_0(s) = \chi(s)$, $\varphi_i(s) = \varphi_{i-1}(0)\,K_1(-\tau, s) +$

$$+\int_{-\tau}^{0} \varphi_{i-1}(\beta)\,d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta-\alpha-\tau)\,K_1(\alpha, s)\,d\alpha.$$

De aici rezultă $|\varphi_i(s)| \leqslant M^i \sup |\chi(s)|$ unde M este oricît de mic dacă $|K_1|$ este destul de mic, deci dacă $M < 1$ seria este convergentă pentru $\lambda = 1$. Avem

$$\varphi_1(s) = \chi(0)\,K_1(-\tau, s) + \int_{-\tau}^{0} \chi(\beta)\,d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta-\alpha-\tau)\,K_1(\alpha, s)\,d\alpha.$$

Fie

$$\varphi_l(s) = \chi(0)\,K_l(-\tau, s) + \int_{-\tau}^{0} \chi(\beta)\,d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta-\alpha-\tau)\,K_l(\alpha, s)\,d\alpha.$$

Avem

$$\varphi_{l+1}(s) = \Big[\chi(0)\,K_l(-\tau,0) + \int_{-\tau}^{0}\chi(\beta)\,d\beta\int_{-\tau}^{0}\eta(\alpha +$$

$$+\tau,\ \beta-\alpha-\tau)\,K_l(\alpha,0)\ d\alpha\Big]K_1(-\tau,s) + \int_{-\tau}^{0}\Big[\chi(0)\,K_l(-\tau,\beta) +$$

$$+\int_{-\tau}^{0}\chi(\gamma)\,d\gamma\int_{-\tau}^{0}\eta(\alpha+\tau,\gamma-\alpha-\tau)\,K_l(\alpha,\beta)\,d\alpha\Big]d\beta\int_{-\tau}^{0}\eta(\xi +$$

$$+\tau,\beta-\xi-\tau)\,K_1(\xi,s)\,d\xi = \chi(0)\Big[K_l(-\tau,0)\,K_1(-\tau,s) +$$

$$+\int_{-\tau}^{0}K_l(-\tau,\beta)\,d\beta\int_{-\tau}^{0}\eta(\xi+\tau,\beta-\xi-\tau)\,K_1(\xi,s)\,d\xi\Big] +$$

$$+\int_{-\tau}^{0}\chi(\beta)\,d\beta\Big[\int_{-\tau}^{0}\eta(\alpha+\tau,\beta-\alpha-\tau)\,K_l(\alpha,0)\,K_1(-\tau,s)\,d\alpha +$$

$$+\int_{-\tau}^{0}\Big(\int_{-\tau}^{0}\eta(\alpha+\tau,\beta-\alpha-\tau)K_l(\alpha,\gamma)\,d\alpha\Big)d\gamma\int_{-\tau}^{0}\eta(\xi+\tau,\gamma-\xi-\tau)\,K_1(\xi,s)d\xi\Big] =$$

$$= \chi(0)\Big[K_l(-\tau,0)\,K_1(-\tau,s) + \int_{-\tau}^{0}K_l(-\tau,\beta)\,d\beta\int_{-\tau}^{0}\eta(\xi +$$

$$+\tau,\beta-\xi-\tau)\,K_1(\xi,s)\,d\xi\Big] + \int_{-\tau}^{0}\chi(\beta)\,d\beta\int_{-\tau}^{0}\eta(\alpha+\tau,\beta-\alpha-\tau)\Big[K_l(\alpha,0)K_1(-\tau,s)+$$

$$+\int_{-\tau}^{0}K_l(\alpha,\gamma)\,d\gamma\int_{-\tau}^{0}\eta(\xi+\tau,\gamma-\xi-\tau)\,K_1(\xi,s)\,d\xi\Big]d\alpha = \chi(0)\,K_{l+1}(-\tau,s) +$$

$$+\int_{-\tau}^{0}\chi(\beta)\,d\beta\int_{-\tau}^{0}\eta(\alpha+\tau,\beta-\alpha-\tau)\,K_{l+1}(\alpha,s)\,d\alpha$$

unde $K_{l+1}(\alpha,s) = K_l(\alpha,0)\,K_1(-\tau,s) + \int_{-\tau}^{0}K_l(\alpha,\gamma)\,d\gamma\int_{-\tau}^{0}\eta(\xi +$

$+\tau,\gamma-\xi-\tau)\,K_1(\xi,s)\,d\xi$.

Notînd $\Gamma(\alpha,s) = \sum_{1}^{\infty}K_l(\alpha,s)$ rezultă că soluția ecuației (32) pentru $\lambda = 1$ se scrie

$$\varphi(s) = \chi(s) + \chi(0)\,\Gamma(-\tau,s) + \int_{-\tau}^{0}\chi(\beta)\,d\beta\int_{-\tau}^{0}\eta(\alpha+\tau,\beta-\alpha-\tau)\,\Gamma(\alpha,s)\,d\alpha. \quad (33)$$

Considerăm acum ecuația

$$\widetilde{\varphi}(s) - \lambda\,K_1(s,0)\,\widetilde{\varphi}(-\tau) - \lambda\int_{-\tau}^{0}K_1(s,\beta)\,d\beta\int_{-\tau}^{0}\eta(\gamma+\tau,\beta-\gamma-\tau)\widetilde{\varphi}(\gamma)d\gamma = \widetilde{\chi}(s). \quad (34)$$

Căutăm soluția sub forma $\tilde{\varphi}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \tilde{\varphi}_i(s)$. Obținem

$$\tilde{\varphi}_0(s) = \tilde{\chi}(s), \tilde{\varphi}_i(s) = K_1(s, 0)\,\tilde{\varphi}_{i-1}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau)\,\tilde{\varphi}_{i-1}(\gamma)\, d\gamma.$$

Ca mai sus se vede că seria este convergentă pentru $\lambda = 1$ dacă $|K_1|$ este destul de mic. Avem

$$\tilde{\varphi}_1(s) = K_1(s, 0)\tilde{\chi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau)\,\tilde{\chi}(\gamma)\, d\gamma.$$

Fie

$$\tilde{\varphi}_l(s) = \tilde{K}_l(s, 0)\,\tilde{\chi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{K}_l(s, \beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau)\,\tilde{\chi}(\gamma)\, d\gamma.$$

Avem

$$\tilde{\varphi}_{l+1}(s) = K_1(s, 0)\left[\tilde{K}_l(-\tau, 0)\tilde{\chi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{K}_l(-\tau, \beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau)\tilde{\chi}(\gamma) d\gamma\right] + \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau)\left[\tilde{K}_l(\gamma, 0)\tilde{\chi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{K}_l(\gamma, \xi)\, d_\xi \int_{-\tau}^{0} \eta(\zeta + \tau, \xi - \zeta - \tau)\tilde{\chi}(\zeta) d\zeta\right] d\gamma = \left[K_1(s, 0)\,\tilde{K}_l(-\tau, 0) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau)\,\tilde{K}_l(\gamma, 0)\, d\gamma\right]\tilde{\chi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0}\left[K_1(s, 0)\,\tilde{K}_l(-\tau, \beta) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \alpha)\, d_\alpha \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \alpha - \gamma - \tau)\,\tilde{K}_l(\gamma, \beta)\, d\gamma\right] d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\zeta + \tau, \beta - \zeta - \tau)\,\tilde{\chi}(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \tilde{K}_{l+1}(s, 0)\,\tilde{\chi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{K}_{l+1}(s, \beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\zeta + \tau, \beta - \zeta - \tau)\,\tilde{\chi}(\zeta)\, d\zeta$$

unde

$$\tilde{K}_{l+1}(s, \beta) = K_1(s, 0)\,\tilde{K}_l(-\tau, \beta) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \alpha)\, d_\alpha \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \alpha - \gamma - \tau)\,\tilde{K}_l(\gamma, \beta)\, d\gamma.$$

Rezultă că soluția ecuației (34) pentru $\lambda = 1$ este dată de formula

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + \tilde{\Gamma}(s, 0)\tilde{\chi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \tilde{\Gamma}(s, \beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau)\,\tilde{\chi}(\gamma)\, d\gamma$$

unde

$$\tilde{\Gamma}(s, \beta) = \sum_{1}^{\infty} \tilde{K}_l(s, \beta).$$

Să dovedim că $\tilde{K}_l(s, \beta) = K_l(s, \beta)$.

Avem

$$K_2(s,\beta) = K_1(s,0)\,K_1(-\tau,\beta) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s,\gamma)\,d_\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\,K_1(\xi,\beta)\,d\xi$$

$$\widetilde{K}_2(s,\beta) = K_1(s,0)\,K_1(-\tau,\beta) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s,\alpha)\,d_\alpha \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \alpha - \gamma - \tau)\,K_1(\gamma,\beta)\,d\gamma$$

deci egalitatea este adevărată pentru $l = 2$.

Presupunem egalitatea adevărată pentru $j \leqslant l$. Atunci

$$K_l(s,\beta) = K_{l-1}(s,0)\,K_1(-\tau,\beta) + \int_{-\tau}^{0} K_{l-1}(s,\gamma)\,d_\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\,K_1(\xi,\beta)\,d\xi =$$

$$= K_1(s,0)\,K_{l-1}(-\tau,\beta) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s,\alpha)\,d_\alpha \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \alpha - \gamma - \tau)\,K_{l-1}(\gamma;\beta)\,d\gamma = \widetilde{K}_l(s,\beta)$$

$$K_{l+1}(s,\beta) = K_l(s,0)\,K_1(-\tau,\beta) + \int_{-\tau}^{0} K_l(s,\gamma)\,d_\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\,K_1(\xi,\beta)\,d\xi =$$

$$= \left[K_1(s,0)\,K_{l-1}(-\tau,0) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s,\alpha)\,d_\alpha \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \alpha - \gamma - \tau)\,K_{l-1}(\gamma,0)\,d\gamma\right] K_1(-\tau,\beta) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} \left[K_1(s,0)\,K_{l-1}(-\tau,\gamma) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s,\alpha)\,d_\alpha \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi + \tau, \alpha - \xi - \tau)\,K_{l-1}(\xi,\gamma)\,d\xi\right] d_\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta(\sigma + \tau, \gamma - \sigma - \tau)\,K_1(\sigma,\beta)\,d\sigma =$$

$$= K_1(s,0)\left[K_{l-1}(-\tau,0)\,K_1(-\tau,\beta) + \int_{-\tau}^{0} K_{l-1}(-\tau,\gamma)\,d_\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta(\sigma + \tau, \gamma - \sigma - \tau)\,K_1(\sigma,\beta)\,d\sigma\right] +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} K_1(s,\alpha)\,d_\alpha \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \alpha - \gamma - \tau)\left[K_{l-1}(\gamma,0)\,K_1(-\tau,\beta) + \int_{-\tau}^{0} K_{l-1}(\gamma,\xi)\,d_\xi \int_{-\tau}^{0} \eta(\sigma + \tau, \xi - \sigma - \tau)\,K_1(\sigma,\beta)\,d\sigma\right] d\gamma =$$

$$= K_1(s,0)K_l(-\tau,\beta) + \int_{-\tau}^{0} K_1(s,\alpha)\,d_\alpha \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \alpha - \gamma - \tau)\,K_l(\gamma,\beta)\,d\gamma = \widetilde{K}_{l+1}(s,\beta).$$

Rezultă deci $\widetilde{\Gamma}(s, \beta) = \Gamma(s, \beta)$ și deci soluția ecuației (34) pentru $\lambda = 1$ este dată de formula

$$\widetilde{\varphi}(s) = \widetilde{\chi}(s) + \Gamma(s, 0)\,\widetilde{\chi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \Gamma(s, \beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau)\,\widetilde{\chi}(\gamma)\, d\gamma. \tag{35}$$

9. Deoarece $Y(\alpha + \tau, \omega + s)$ este uniform continuă în pătratul $-\tau \leqslant \alpha \leqslant 0$, $-\tau \leqslant s \leqslant 0$ putem scrie

$$Y(\alpha + \tau, \omega + s) = \sum_k a_k(\alpha)\, b_k(s) + K_1(\alpha, s)$$

unde $a_k(\alpha)$ sînt vectori coloană, $b_k(s)$ vectori linie, a_k, b_k liniar independenți, iar $|K_1|$ poate fi luat oricît de mic.

Ecuația (31) devine

$$\varphi(s) - \varphi(0)\,K_1(-\tau, s) - \int_{-\tau}^{0} \varphi(\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha + \tau,\ \beta - \alpha - \tau)\, K_1(\alpha, s)\, d\alpha =$$

$$= \varphi(0) \sum_k a_k(-\tau)\, b_k(s) + \sum_k \int_{-\tau}^{0} \varphi(\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha + \tau, \beta - \alpha - \tau)\, a_k(\alpha)\, b_k(s)\, d\alpha + F(s)$$

unde am notat $F(s) = \int_0^{\omega+s} f(\alpha)\, Y(\alpha, \omega + s)\, d\alpha$.

Punem

$$\varphi(s) - \varphi(0)\,K_1(-\tau, s) - \int_{-\tau}^{0} \varphi(\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha + \tau, \beta - \alpha - \tau)\, K_1(\alpha, s)\, d\alpha = \chi(s).$$

Ținînd seama de formula (33) obținem pentru $\chi(s)$ ecuația

$$\chi(s) = \left[\chi(0) + \chi(0)\,\Gamma(-\tau, 0) + \int_{-\tau}^{0} \chi(\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha + \tau, \beta - \alpha - \tau)\,\Gamma(\alpha, 0)\, d\alpha\right] \sum_k a_k(-\tau)\, b_k(s) +$$

$$+ \sum_k \int_{-\tau}^{0} \left[\chi(\beta) + \chi(0)\,\Gamma(-\tau, \beta) + \int_{-\tau}^{0} \chi(\xi)\, d\xi \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha + \tau, \xi - \alpha - \tau)\,\Gamma(\alpha, \beta)\, d\alpha\right] d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\sigma + \tau, \beta - \sigma - \tau)\, a_k(\sigma)\, b_k(s)\, d\sigma + F(s).$$

Notăm $\bar{a}_k(\alpha) = \Gamma(\alpha, 0)\, a_k(-\tau) + a_k(\alpha) + \int_{-\tau}^{0} \Gamma(\alpha, \xi)\, d\xi \int_{-\tau}^{0} \eta(\sigma + \tau, \xi - \sigma - \tau)\, a_k(\sigma)\, d\sigma$.

Rezultă

$$\chi(s) = \chi(0) \sum_k \bar{a}_k(-\tau)\, b_k(s) + \sum_k \int_{-\tau}^{0} \chi(\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta - \alpha - \tau)\, \bar{a}_k(\alpha)\, b_k(s)\, d\alpha + F(s).$$

De aici $\chi(s) - F(s) = \sum_k \lambda_k\, b_k(s)$. Înlocuind în ecuație se obține

$$\lambda_k = \sum_k \gamma_{kj}\, \lambda_j + f_k \tag{36}$$

unde

$$\gamma_{kj} = b_j(0)\, \bar{a}_k(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} b_j(\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta-\alpha-\tau)\, \bar{a}_k(\alpha)\, d\alpha$$

$$f_k = F(0)\, \bar{a}_k(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} F(\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta-\alpha-\tau)\, \bar{a}_k(\alpha)\, d\alpha.$$

Sistemul (36) are soluție dacă și numai dacă

$$\sum_k f_k\, \mu_k = 0 \tag{37}$$

pentru toate soluțiile sistemului

$$\mu_k = \sum_j \gamma_{jk}\, \mu_j. \tag{38}$$

Deoarece (36) este echivalent cu ecuația în $\chi(s)$ iar aceasta este echivalentă cu (31) rezultă că (37), (38) reprezintă condiția necesară și suficientă ca (31) să aibă soluții. Ecuația (30) la rîndul ei se scrie

$$\tilde{\varphi}(s) - K_1(s,0)\, \tilde{\varphi}(-\tau) - \int_{-\tau}^{0} K_1(s,\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma+\tau, \beta-\gamma-\tau)\, \tilde{\varphi}(\gamma)\, d\gamma =$$

$$= \sum_k a_k(s)\, b_k(0)\, \tilde{\varphi}(-\tau) + \sum_k \int_{-\tau}^{0} a_k(s)\, b_k(\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau)\, \tilde{\varphi}(\gamma)\, d\gamma.$$

Punem

$$\tilde{\varphi}(s) - K_1(s,0)\, \tilde{\varphi}(-\tau) - \int_{-\tau}^{0} K_1(s,\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma+\tau, \beta-\gamma-\tau)\, \tilde{\varphi}(\gamma)\, d\gamma = \tilde{\chi}(s)$$

și obținem folosind formula (35)

$$\tilde{\chi}(s) = \sum_k a_k(s)\, b_k(0) \left[\tilde{\chi}(-\tau) + \Gamma(-\tau, 0)\, \tilde{\chi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \Gamma(-\tau, \beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma+\tau, \beta-\gamma-\tau)\, \tilde{\chi}(\gamma)\, d\gamma \right] +$$

$$+ \sum_k a_k(s) \int_{-\tau}^{0} b_k(\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma+\tau, \beta-\gamma-\tau) \left[\tilde{\chi}(\gamma) + \Gamma(\gamma, 0)\, \tilde{\chi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \Gamma(\gamma, \sigma)\, d\sigma \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi+\tau, \sigma-\xi-\tau)\, \tilde{\chi}(\xi)\, d\xi \right] d\gamma.$$

Notăm

$$\widetilde{b}_k(\beta) = b_k(\beta) + b_k(0)\ \Gamma(-\tau, \beta) + \int_{-\tau}^{0} b_k(\sigma)\, d\sigma \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \sigma - \gamma - \tau)\, \Gamma(\gamma, \beta)\, d\gamma$$

și rezultă

$$\widetilde{\chi}(s) = \sum_k a_k(s)\, \bar{b}_k(0)\, \widetilde{\chi}(-\tau) + \sum_k a_k(s) \int_{-\tau}^{0} \bar{b}_k(\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau)\, \widetilde{\chi}(\gamma)\, d\gamma.$$

Prin urmare $\widetilde{\chi}(s) = \sum_k \mu_k a_k(s)$ și înlocuind în ecuație

$$\mu_k = \sum_j \widetilde{\gamma}_{kj}\, \mu_j \tag{39}$$

unde $\widetilde{\gamma}_{kj} = \bar{b}_k(0)\, a_j(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \bar{b}_k(\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau)\, a_j(\gamma)\, d\gamma$.

Verificăm relația $\widetilde{\gamma}_{kj} = \gamma_{jk}$. Avem

$$\widetilde{\gamma}_{kj} = \Big[b_k(0) + b_k(0)\, \Gamma(-\tau, 0) + \int_{-\tau}^{0} b_k(\sigma)\, d\sigma \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \sigma - \gamma - \tau)\, \Gamma(\gamma, 0)\, d\gamma \Big] a_j(-\tau) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} \Big[b_k(\beta) + b_k(0)\, \Gamma(-\tau, \beta) + \int_{-\tau}^{0} b_k(\sigma)\, d\sigma \int_{-\tau}^{0} \eta(\gamma + \tau, \sigma - \gamma - \tau)\, \Gamma(\gamma, \beta)\, d\gamma \Big] d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi + \tau, \beta - \xi - \tau)\, a_j(\xi)\, d\xi$$

$$\gamma_{jk} = b_k(0) \Big[\Gamma(-\tau, 0)\, a_j(-\tau) + a_j(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \Gamma(-\tau, \xi)\, d\xi \int_{-\tau}^{0} \eta(\sigma + \tau, \xi - \sigma - \tau)\, a_j(\sigma)\, d\sigma \Big] +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} b_k(\beta)\, d\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha + \tau, \beta - \alpha - \tau) \Big[\Gamma(\alpha, 0)\, a_j(-\tau) + a_j(\alpha) + \int_{-\tau}^{0} \Gamma(\alpha, \xi)\, d\xi \int_{-\tau}^{0} \eta(\sigma + \tau, \xi - \sigma - \tau)\, a_j(\sigma)\, d\sigma \Big] d\alpha$$

deci egalitatea se verifică imediat. Rezultă că sistemele (38) și (39) coincid. Mai departe

$$\sum_k \mu_k f_k = \sum_k \mu_k \left[F(0)\, \overline{a}_k(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} F(\beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta - \right.$$

$$\left. - \alpha - \tau)\, \overline{a}_k(\alpha)\, d\alpha \right] =$$

$$= \sum_k \mu_k \left[F(0)\, \Gamma(-\tau, 0)\, a_k(-\tau) + F(0)\, a_k(-\tau) + \right.$$

$$\left. + F(0) \int_{-\tau}^{0} \Gamma(-\tau, \xi)\, d\xi \int_{-\tau}^{0} \eta(\sigma+\tau, \xi - \sigma - \tau)\, a_k(\sigma)\, d\sigma \right] +$$

$$+ \sum_k \mu_k \int_{-\tau}^{0} F(\beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta - \alpha - \tau) \left[a_k(\alpha) + \Gamma(\alpha, o)\, \alpha_k(-\tau) + \right.$$

$$\left. + \int_{-\tau}^{0} \Gamma(\alpha, \xi)\, d\xi \int_{-\tau}^{0} \eta(\sigma+\tau, \xi - \sigma - \tau) a_k(\sigma)\, d\sigma \right] d\alpha =$$

$$= F(0)\, \Gamma(-\tau, 0)\, \widetilde{\chi}(-\tau) + F(0)\, \widetilde{\chi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} F(\beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha +$$

$$+ \tau, \beta - \alpha - \tau)\, \widetilde{\chi}(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ F(0) \int_{-\tau}^{0} \Gamma(-\tau, \xi)\, d\xi \int_{-\tau}^{0} \eta(\sigma+\tau, \xi - \sigma - \tau)\, \widetilde{\chi}(\sigma)\, d\sigma + \int_{-\tau}^{0} F(\beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha +$$

$$+ \tau, \beta - \alpha - \tau)\, \Gamma(\alpha, 0)\, \widetilde{\chi}(-\tau)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} F(\beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta - \alpha - \tau) \left[\int_{-\tau}^{0} \Gamma(\alpha, \xi)\, d\xi \int_{-\tau}^{0} \eta(\sigma + \right.$$

$$\left. + \tau, \xi - \sigma - \tau)\, \widetilde{\chi}(\sigma)\, d\sigma \right] d\alpha =$$

$$= F(0) \left[\widetilde{\chi}(-\tau) + \Gamma(-\tau, 0) \widetilde{\chi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \Gamma(-\tau, \xi)\, d\xi \int_{-\tau}^{0} \eta(\sigma + \right.$$

$$\left. + \tau, \xi - \sigma - \tau)\, \widetilde{\chi}(\sigma)\, d\sigma \right] +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} F(\beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta - \alpha - \tau) \left[\widetilde{\chi}(\alpha) + \Gamma(\alpha, 0)\, \widetilde{\chi}(-\tau) + \right.$$

$$\left. + \int_{-\tau}^{0} \Gamma(\alpha, \xi)\, d\xi \int_{-\tau}^{0} \eta(\sigma+\tau, \xi - \sigma - \tau)\, \widetilde{\chi}(\sigma)\, d\sigma \right] d\alpha =$$

$$= F(0)\, \widetilde{\varphi}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} F(\beta)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta - \alpha - \tau)\, \widetilde{\varphi}(\alpha)\, d\alpha.$$

Rezultă de aici că, necesar și suficient ca ecuația (31) să aibă soluții este ca

$$\int_0^\omega f(\alpha)\, Y(\alpha, \omega)\, \tilde{\varphi}(-\tau)\, d\alpha + \int_{-\tau}^0 \left(\int_0^{\omega+\beta} f(\alpha)\, Y(\alpha, \omega+\beta)\, d\alpha \right) d_\beta \int_{-\tau}^0 \eta(\alpha + \tau, \beta - \alpha - \tau)\, \tilde{\varphi}(\alpha)\, d\alpha = 0$$

pentru toate soluțile $\tilde{\varphi}$ ale ecuației (30).

Dar $\tilde{\varphi}(s) = \psi(s + \omega + \tau)$ și avem succesiv

$$\int_0^\omega f(\alpha)\, Y(\alpha, \omega)\, \tilde{\varphi}(-\tau)\, d\alpha + \int_{-\tau}^0 \left(\int_{-\tau}^{\omega+\beta} f(\alpha)\, Y(\alpha, \omega+\beta)\, d\alpha \right) d_\beta \int_{-\tau}^0 \eta(\alpha + \tau, \beta - \alpha - \tau)\, \tilde{\varphi}(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \int_0^\omega f(\alpha)\, Y(\alpha, \omega)\, \psi(\omega)\, d\alpha + \int_{-\tau}^0 \left(\int_0^{\omega+\beta} f(\alpha)\, Y(\alpha, \omega+\beta)\, d\alpha \right) d_\beta \int_\omega^{\omega+\tau} \eta(\xi, \beta - \xi + \omega)\, \psi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^\omega f(\alpha)\, Y(\alpha, \omega)\, \psi(\omega)\, d\alpha + \int_{-\omega}^0 \left(\int_0^{\omega+\beta} f(\alpha)\, Y(\alpha, \omega+\beta)\, d\alpha \right) d_\beta \int_\omega^{\omega+\tau} \eta(\xi, \beta - \xi + \omega)\, \psi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^\omega f(\alpha)\, Y(\alpha, \omega)\, \psi(\omega)\, d\alpha + \int_0^\omega f(\alpha) \left[\int_{\alpha-\omega}^0 Y(\alpha, \omega+\beta)\, d_\beta \int_\omega^{\omega+\tau} \eta(\xi, \beta - \xi + \omega)\, \psi(\xi)\, d\xi \right] d\alpha =$$

$$= \int_0^\omega f(\alpha) \left[Y(\alpha, \omega)\, \psi(\omega) + \int_\alpha^\omega Y(\alpha, \gamma)\, d_\gamma \int_\omega^{\omega+\tau} \eta(\xi, \gamma - \xi)\, \psi(\xi)\, d\xi \right] d\alpha =$$

$$= \int_0^\omega f(\alpha)\, y(\alpha)\, d\alpha$$

unde $y(\alpha)$ este soluția sistemului (28) determinată de funcția inițială ψ. Am obținut în definitiv

TEOREMA 3. *Condiția necesară și suficientă ca ecuația (25) să aibă soluții periodice, de perioadă* ω, *este ca*

$$\int_0^\omega f(\alpha)\, y_k(\alpha)\, d\alpha = 0$$

pentru toate soluțiile periodice $y_k(t)$, *de perioadă* ω, *ale ecuației adjuncte (28).*

Rezultatele de mai sus au fost publicate fără demonstrații în [1] și cu demonstrații complete în [2]. În cazul particular cînd $\eta(t, s)$ nu depinde de t, care corespunde sistemelor cu coeficienți constanți, ele au fost date pe altă cale de S. N. Șimanov [3], [4].

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

РЕЗЮМЕ

Устанавливается ТЕОРЕМА: *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы система* (25) *имела периодические решения периода* ω, *состоит в том, чтобы* $\int_0^\omega f(\alpha),\ y_k(\alpha)\,d\alpha = 0$ *для всех периодических решений* $y_k(t)$ *периода* ω *сопряженного уравнения* (28).

Частный случай систем (1) и (2) рассматривается также подробно.

SOLUTIONS PÉRIODIQUES DES SYSTÈMES LINÉAIRES À RETARDEMENT

RÉSUMÉ

On établit le

THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante pour l'existence des solutions périodiques de période* ω *du système* (25) *est que* $\int_0^\omega f(\alpha)\,y_k(\alpha)\,d\alpha = 0$ *pour toutes les solutions périodiques* $y_k(t)$ *de période* ω *de l'équation adjointe* (28).

Le cas particulier des systèmes (1) et (2) est étudié en détail.

BIBLIOGRAFIE

1. A. HALANAY, C. R. Acad. Sci. Paris, **251**, *18*, 1856—1858 (1960).
2. — *Периодические решения линейных систем с запаздыванием.* Revue de Math. pures et. appl., Acad. R.P.R., **VI**, *1*, 141—158 (1961).
3. С. Н. ШИМАНОВ, Прикладная математика и механика, **XXIII**, 836—844 (1959).
4. — Доклады АН СССР, **133**, *1*, 36—39 (1960).

ASUPRA PRIMEI PROBLEME DE VIBRAȚII PROPRII ALE UNUI CORP ELASTIC

DE

SILVIU TELEMAN

Ne propunem să studiem în această lucrare problema vibrațiilor proprii ale unui corp elastic omogen și izotrop, mărginit, cu frontiera imobilă. Matematic, problema se pune în felul următor : se dă în spațiul euclidian cu trei dimensiuni o mulțime deschisă mărginită D, și se cere să se determine constantele ν și vectorii $\vec{u}$, definiți în D și neidentic nuli, cu derivate parțiale continui pînă la ordinul doi, așa încît să avem

$$a \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - b \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \nu \vec{u} = 0 \qquad \text{în } D$$

$$\vec{u} = 0 \qquad \text{pe front. } D.$$

a și b sînt două constante care caracterizează mediul elastic.

Această problemă a fost tratată de A. Korn [1], H. Weyl [2], în ipoteza că frontiera lui D este o suprafață cu normală care satisface unei condiții de continuitate hölderiană, prin metoda ecuațiilor integrale ale lui Fredholm.

Mai recent, această problemă este menționată de K. O. Friedrichs [3], unde este tratată pe larg problema vibrațiilor libere ale unui corp elastic omogen, izotrop și mărginit, a cărui frontieră satisface anumitor condiții de regularitate, iar calea folosită este aceea a metodelor directe din calculul variațional.

În cele ce urmează vom rezolva problema pe care ne-am propus-o, fără a face nici o ipoteză de regularitate asupra frontierei lui D. Metoda folosită este mai apropiată de metoda proiecției ortogonale, utilizînd teoria operatorilor în spații Hilbert.

Lucrarea este o continuare a lucrării [4], și a fost prezentată în aprilie și mai 1955 la Sesiunile Cercurilor științifice studențești. O publicăm cu unele înbunătățiri.

În primul paragraf construim spații Hilbert de vectori și tensori definiți în D, în care, un anumit operator compact ne va procura vectorii căutați. Demonstrăm cu această ocazie o generalizare (teorema 1) a unei teoreme a lui F. Rellich [5], [6].

În al doilea paragraf arătăm că vectorii proprii ai unor anumiți operatori sînt analitici.

În al treilea paragraf, aplicînd teoria spectrală, rezolvăm problema pe care ne-am propus-o.

În cursul lucrării utilizăm extinderea slabă a operatorilor diferențiali, care este foarte apropiată de teoria distribuțiilor [7], [8], [9]. Din dezvoltările pe care le facem în primul paragraf, se va vedea că aceste extinderi sînt închideri ale operatorilor diferențiali restrînși la anumite subspații, extinderi care nu coincid cu închiderile minimale.

Observăm că metoda pe care o folosim poate fi aplicată și la alte probleme de funcții proprii, pentru operatori diferențiali de tip eliptic, cum ar fi de exemplu problema funcțiilor proprii pentru teoria potențialului etc.

§ 1. Fie D o mulțime deschisă din spațiul euclidian cu trei dimensiuni. Cu C_D vom nota mulțimea funcțiilor reale continui definite pe D, care au suportul compact conținut în D și derivate parțiale de primul ordin continui pe porțiuni. Cu $\vec{C}_D$ vom nota mulțimea vectorilor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ale căror componente u_i $(i = 1, 2, 3)$ sînt funcții din C_D, iar $\overset{\Rightarrow}{C}_D$ va fi mulțimea tensorilor simetrici de ordinul doi $\overset{\Rightarrow}{p} = (p_{ij})$ $(i, j = 1, 2, 3)$ ale căror componente sînt funcții din C_D. În [4] am introdus operatorii diferențiali $\mathcal{G}$ și $\mathcal{D}$, dintre care primul se aplică vectorilor și are ca valori tensori simetrici de ordinul doi, iar al doilea se aplică tensorilor simetrici de ordinul doi și are ca valori vectori.

Ei sînt definiți prin formulele

$$\mathcal{G}\vec{u} = \overset{\Rightarrow}{p} \text{ unde } \overset{\Rightarrow}{p} = (p_{ij}) \text{ cu } p_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\mathcal{D}\overset{\Rightarrow}{p} = \vec{u}, \text{ unde } \vec{u} = (u_i), \text{ cu } u_i = (a - 2b)\frac{\partial p_{jj}}{\partial x_i} + 2b\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}.$$

Dacă notăm $\Delta^* = \mathcal{D}\mathcal{G}$, avem

$$\Delta^* = a \operatorname{grad} \operatorname{div} - b \operatorname{rot} \operatorname{rot}.$$

Să introducem pentru tensorii simetrici de ordinul doi $\overset{\Rightarrow}{p} = (p_{ij})$ forma biliniară hermitică, definită prin

$$Q[\overset{\Rightarrow}{p}, \overset{\Rightarrow}{q}] = \left(a - \frac{4}{3}b\right)(p_{11} + p_{22} + p_{33})(\bar{q}_{11} + \bar{q}_{22} + \bar{q}_{33}) +$$

$$+ \frac{2b}{3}\{(p_{22} - p_{33})(\bar{q}_{22} - \bar{q}_{33}) + (p_{33} - p_{11})(\bar{q}_{33} - \bar{q}_{11}) +$$

$$+ (p_{11} - p_{22})(\bar{q}_{11} - \bar{q}_{22})\} + 4b\{p_{23}\bar{q}_{23} + p_{31}\bar{q}_{31} + p_{12}\bar{q}_{12}\}.$$

$Q\,[\overset{\Rightarrow}{p},\ \overset{\Rightarrow}{q}]$ este pozitiv definită dacă avem $3a > 4b > 0$, așa cum vom presupune de acum înainte. Pentru simplificarea scrierii, vom nota

$$Q\,[\overset{\Rightarrow}{p}] = Q\,[\overset{\Rightarrow}{p},\ \overset{\Rightarrow}{p}].$$

Fie acum G o mulțime deschisă mărginită cu frontiera F suficient de regulată pentru a-i putea aplica formula lui Gauss-Green. Dacă notăm cu $d\sigma$ elementul de arie pe F și $\vec{n} = (n_i)$ vectorul normal unitar exterior, atunci avem următoarea formulă

$$\int_G Q\,[\overset{\Rightarrow}{p},\ \mathcal{G}\,\vec{v}]\,dx + \int_G P\,[\mathcal{D}\,\overset{\Rightarrow}{p},\ \vec{v}]\,dx = \int_F P\,[\vec{\mathfrak{L}}\,\overset{\Rightarrow}{p},\ \vec{v}]\,d\sigma \qquad (1)$$

unde vectorul $\vec{\mathfrak{L}}\,\overset{\Rightarrow}{p}$ are componentele $\mathfrak{L}_i\,\overset{\Rightarrow}{p} = (a - 2b)\,n_i\,p_{jj} + 2b\,n_j\,p_{ij}$ (cu sumare pentru indicii care se repetă), iar $P\,[\vec{u},\ \vec{v}]$ este forma biliniară hermitică

$$P\,[\vec{u},\ \vec{v}] = u_1\,\bar{v}_1 + u_2\,\bar{v}_2 + u_3\,\bar{v}_3.$$

$\vec{v}$ este în formula (1) un vector cu componente continue în $\bar{G}$, cu derivate parțiale de primul ordin continue pe porțiuni în G. Aceleași proprietăți sînt cerute și tensorului $\overset{\Rightarrow}{p}$.

Vom nota, pentru simplificarea scrierii $P\,[\vec{u}] = P\,[\vec{u},\ \vec{u}]$.

În particular, dacă $\overset{\Rightarrow}{p}$ este un tensor definit în D, continuu și cu derivate de ordinul întîi continue pe porțiuni în D, pentru orice $\vec{v} \in \vec{C}_D$ avem

$$\int_D Q\,[\overset{\Rightarrow}{p},\ \mathcal{G}\,\vec{v}]\,dx + \int_D P\,[\mathcal{D}\,\overset{\Rightarrow}{p},\ \vec{v}]\,dx = 0, \qquad (2)$$

și pentru orice vector $\vec{v}$ ale cărui componente sînt funcții continue definite în D, cu derivate de primul ordin continue pe porțiuni, avem aceeași relație (2) dacă $\overset{\Rightarrow}{p} \in \overset{\Rightarrow}{C}_D$.

Într-adevăr, dacă, în primul caz, S este suportul vectorului $\vec{v}$, există o mulțime deschisă mărginită G, a cărei frontieră F este formată dintr-un număr finit de triunghiuri, așa încît să avem $D \supset \bar{G}, G \supset S$. Atunci $\vec{v}$ este nul pe F, și aplicînd acestei mulțimi G formula (1) obținem relația (2). Aceeași demonstrație se face și pentru al doilea caz.

Fie $\mathcal{H}$ mulțimea vectorilor $\vec{v}$ ale căror componente (funcții complexe definite pe D) aparțin spațiului $L^2(D)$. Luînd funcționala

$$(\vec{u},\ \vec{v}) = \int_D P\,[\vec{u},\ \vec{v}]\,dx$$

ca produs scalar, $\mathcal{H}$ devine un spațiu Hilbert, cu legile de compoziție obișnuite.

Fie $\mathcal{H}$ mulțimea tensorilor simetrici de ordinul doi, ale căror componente sînt funcții din $L^2(D)$. Luînd funcționala

$$< \overset{\Rightarrow}{p}, \overset{\Rightarrow}{q} > = \int_D Q[\overset{\Rightarrow}{p}, \overset{\Rightarrow}{q}]\, dx$$

ca produs scalar, $\mathcal{H}$ devine un spațiu Hilbert, în care legile de compoziție sînt evidente. Ca de obicei, vom pune

$$\| \vec{u} \| = (\vec{u}, \vec{u})^{1/2}$$
$$\| \overset{\Rightarrow}{p} \| = < \overset{\Rightarrow}{p}, \overset{\Rightarrow}{p} >^{1/2}.$$

Dacă notăm $\mathcal{H}_1 = \vec{C}_D + i\vec{C}_D$, $\mathcal{H}_1 = \overset{\Rightarrow}{C}_D + i\overset{\Rightarrow}{C}_D$ este evident că $\mathcal{H}_1$ este subspațiu vectorial dens al lui $\mathcal{H}$ și $\mathcal{H}_1$ este subspațiu vectorial dens al lui $\mathcal{H}$.

Din cele de mai sus rezultă că avem

$$< \overset{\Rightarrow}{p}, \mathcal{G}\vec{v} > + (\mathcal{D}\overset{\Rightarrow}{p}, \vec{v}) = 0 \tag{3}$$

pentru orice $\vec{v} \in \mathcal{H}_1$, $\overset{\Rightarrow}{p} \in \mathcal{H}_1$.

Vom nota de acum înainte cu $\mathcal{G}$ și $\mathcal{D}$ operatorii care au ca domenii respectiv spațiile $\mathcal{H}_1$ și $\mathcal{H}_1$ și definiți prin operațiile diferențiale indicate mai sus.

Din relația (3) deducem imediat că $\mathcal{G}^*$ și $\mathcal{D}^*$ există și că avem

$$\mathcal{G}^* \supset -\mathcal{D} \text{ și } \mathcal{D}^* \supset -\mathcal{G}.$$

Vom nota $\widetilde{\mathcal{D}} = -\mathcal{G}^*$ și $\widetilde{\mathcal{G}} = -\mathcal{D}^*$. $\widetilde{\mathcal{G}}$ și $\widetilde{\mathcal{D}}$ sînt operatori închiși, cu domeniu dens în $\mathcal{H}$, respectiv $\mathcal{H}$.

Deoarece $\widetilde{\mathcal{G}}$ și $\widetilde{\mathcal{D}}$ sînt respectiv închideri ale lui $\mathcal{G}$ și $\mathcal{D}$, deducem că avem

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^{**} \subset \widetilde{\mathcal{G}},$$
$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^{**} \subset \widetilde{\mathcal{D}},$$

incluziunile fiind stricte.

Vom spune că o parte E a lui $\mathcal{H}$ este *egal continuă în medie în interiorul lui D*, dacă pentru orice $r_0 > 0$, oricare ar fi $\vec{u} \in E$, avem

$$\left(\int_{D(r_0)} P\,[\mathfrak{M}\{\vec{u}, x_0, r_1\} - \mathfrak{M}\{\vec{u}, x_0, r_2\}]\, dx_0 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

îndată ce $r_1 < r(\varepsilon)$, $r_2 < r(\varepsilon)$. Aici $r(\varepsilon) \leqslant r_0$ este un număr pozitiv care depinde numai de ε și r_0; cu

$$\mathfrak{M}\{\vec{u}, x_0, r\} = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{S(x_0, r)} \vec{u}(x)\, dx$$

am notat media vectorului $\vec{u}$ în sfera $S(x_0, r)$ cu centrul în x_0 și raza r, iar $D(r_0)$ este mulțimea punctelor din D care se află la o distanță mai mare decît r_0 de frontiera lui D.

Notînd cu $\Delta(T)$ domeniul operatorului T, vom demonstra

TEOREMA 1. *Dacă A este o parte a lui $\Delta(\widetilde{\mathcal{G}})$, și dacă $\widetilde{\mathcal{G}} A$ este mărginită în $\mathcal{H}$, atunci A este egal continuă în medie în interiorul lui D.*

Demonstrație. Fie $d(x)$ distanța de la punctul x la frontiera lui D. Fie r_0 un număr pozitiv și $D(r_0) = \{x;\ x \in D,\ d(x) > r_0\}$. Pentru orice pereche de numere r_1, r_2 cu $0 < r_1 < r_2 < r_0$, să formăm funcția

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\left[\dfrac{1}{r_2^3} - \dfrac{1}{r_1^3}\right] & \text{pentru } 0 \leqslant |x| \leqslant r_1 \\ \dfrac{1}{4\pi}\left[\dfrac{1}{r_2^3} - \dfrac{1}{|x|^3}\right] & \text{pentru } r_1 \leqslant |x| \leqslant r_2 \\ 0 & \text{pentru } r_2 \leqslant |x| \end{cases} \tag{4}$$

unde $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Pentru orice $x_0 \in D(r_0)$ fixat, avem $\varphi(x - x_0) \in C_D$. De asemenea să formăm tensorii $\overrightarrow{\rho_1}, \overrightarrow{\rho_2}, \overrightarrow{\rho_3}$, definiți prin componentele lor de formulele

$$\rho_{1.11}(x) = \frac{2a - 3b}{b(3a - 4b)} x_1;\quad \rho_{1.22}(x) = -\frac{a - b}{b(3a - 4b)} x_1;$$

$$\rho_{1.33}(x) = -\frac{a - b}{b(3a - 4b)} x_1;\quad \rho_{1.23}(x) = \rho_{1.32}(x) = 0;$$

$$\rho_{1.13}(x) = \rho_{1.31}(x) = \frac{1}{2b} x_3;\quad \rho_{1.12}(x) = \rho_{1.21}(x) = \frac{1}{2b} x_2$$

și, prin permutări circulare, pentru componentele lui $\overrightarrow{\rho_2}(x)$ și $\overrightarrow{\rho_3}(x)$. Fie $\overrightarrow{\tau_i}(x) = \varphi(x)\,\overrightarrow{\rho_i}(x)$, $(i = 1, 2, 3)$. Atunci, pentru orice $x_0 \in D(r_0)$ fixat, avem $\overrightarrow{\tau_i}(x - x_0) \in \overrightarrow{C_D}$, socotit ca funcție de x, și dacă $\vec{u} \in \Delta(\widetilde{\mathcal{G}})$, $\overrightarrow{p} = \widetilde{\mathcal{G}}\vec{u}$, avem, înlocuind în relația

$$< \widetilde{\mathcal{G}}\vec{u}, \overrightarrow{p} > + (\vec{u}, \mathfrak{D}\overrightarrow{p}) = 0$$

pe $\overrightarrow{p}$ cu $\overrightarrow{\tau_i}(x - x_0)$:

$$\mathfrak{M}\{u_i, x_0, r_2\} - \mathfrak{M}\{u_i, x_0, r_1\} = \frac{1}{3}\mathfrak{M}\{Q[\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\rho_i}], x_0, r_1\} -$$

$$-\frac{1}{3}\mathfrak{M}\{Q[\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\rho_i}], x_0, r_2\} + \frac{1}{4\pi}\int_{S(x_0, r_2) - S(x_0, r_1)} \frac{Q[\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\rho_i}]}{|x - x_0|^3}\, dx; \tag{5}$$

unde am pus $\overset{\Rightarrow}{\rho_i} = \overset{\Rightarrow}{\rho_i}(x - x_0)$, $(i = 1, 2, 3)$ și

$$\mathfrak{M}\{f, x_0, r\} = \frac{3}{4\pi r^3}\int_{S(x_0, r)} f(x)\, dx,$$

$S(x_0, r)$ fiind sfera plină cu raza r și centrul x_0. Din formula (5) deducem

$$\left(\int_{D(r_0)} |\mathfrak{M}\{u_i, x_0, r_2\} - \mathfrak{M}\{u_i, x_0, r_1\}|^2\, dx_0\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3}\left(\int_{D(r_0)} |\mathfrak{M}\{Q[\overset{\Rightarrow}{p}, \overset{\Rightarrow}{\rho_i}], x_0, r_1\}|^2 dx_0\right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\int_{D(r_0)} |\mathfrak{M}\{Q[\overset{\Rightarrow}{p}, \overset{\Rightarrow}{\rho_i}], x_0, r_2\}|^2\, dx_0\right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\left(\int_{D(r_0)} \left|\int_{S(x_0, r_2) - S(x_0, r_1)} \frac{Q[\overset{\Rightarrow}{p}, \overset{\Rightarrow}{\rho_i}]}{|x - x_0|^3}\, dx\right|^2 dx_0\right)^{1/2},$$

unde, ca și mai sus, $\overset{\Rightarrow}{\rho_i} = \overset{\Rightarrow}{\rho_i}(x - x_0)$, $(i = 1, 2, 3)$.

Să evaluăm integralele

$$I(r) = \int_{D(r_0)} |\mathfrak{M}\{Q[\overset{\Rightarrow}{p}(x), \overset{\Rightarrow}{\rho_i}(x - x_0)], x_0, r\}|^2\, dx_0,$$

$$J(r_1, r_2) = \int_{D(r_0)} \left|\int_{S(x_0, r_2) - S(x_0, r_1)} \frac{Q[\overset{\Rightarrow}{p}(x), \overset{\Rightarrow}{\rho_i}(x - x_0)]}{|x - x_0|^3}\, dx\right|^2 dx_0.$$

Pentru prima, prin aplicarea formulei lui Schwarz, găsim:

$$I(r) = \frac{9}{16\pi^2 r^6}\int_{D(r_0)} \left|\int_{S(x_0, r)} Q[\overset{\Rightarrow}{p}(x), \overset{\Rightarrow}{\rho_i}(x - x_0)]\, dx\right|^2 dx_0 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{9}{16\pi^2 r^6}\int_{D(r_0)} \left\{\int_{S(x_0, r)} Q[\overset{\Rightarrow}{p}(x), \overset{\Rightarrow}{p}(x)]\, dx \times \right.$$

$$\left. \times \int_{S(x_0, r)} Q[\overset{\Rightarrow}{\rho_i}(x - x_0), \overset{\Rightarrow}{\rho_i}(x - x_0)]\, dx\right\} dx_0 =$$

$$= \frac{3}{4\pi r^3}\mathfrak{M}\{Q[\overset{\Rightarrow}{\rho_i}(x), \overset{\Rightarrow}{\rho_i}(x)], 0, r\}\int_{D(r_0)} \left\{\int_{S(x_0, r)} Q[\overset{\Rightarrow}{p}(x), \overset{\Rightarrow}{p}(x)]dx\right\} dx_0 =$$

$$= \frac{3}{4\pi r^3}\mathfrak{M}\{Q[\overset{\Rightarrow}{\rho_i}(x)], 0, r\}\int_{D(r_0)} \left\{\int_{S(0, r)} Q[\overset{\Rightarrow}{p}(x_0 + h)]\, dh\right\} dx_0 =$$

$$= \frac{3}{4\pi r^3}\mathfrak{M}\{Q[\overset{\Rightarrow}{\rho_i}(x)], 0, r\}\int_{S(0, r)} \left\{\int_{D(r_0)} Q[\overset{\Rightarrow}{p}(x_0 + h)]\, dx_0\right\} dh \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{M}\{Q[\overset{\Rightarrow}{\rho_i}(x)], 0, r\} \| \overset{\Rightarrow}{p} \|^2.$$

Pentru a doua, avem

$$J(r_1, r_2) = \int_{D(r_0)} \left| \int_{S(x_0, r_2) - S(x_0, r_1)} \frac{Q[\vec{p}(x), \vec{\rho}_i(x - x_0)]}{|x - x_0|^3} dx \right|^2 dx_0 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{D(r_0)} \left\{ \int_{S(x_0, r_2) - S(x_0, r_1)} \frac{|Q[\vec{p}(x), \vec{\rho}_i(x - x_0)]|^2}{|x - x_0|^4} dx \times \right.$$

$$\left. \times \int_{S(x_0, r_2) - S(x_0, r_1)} \frac{dx}{|x - x_0|^2} \right\} dx_0 \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi (r_2 - r_1) \int_{D(r_0)} \left\{ \int_{S(x_0, r_2) - S(x_0, r_1)} \frac{Q[\vec{\rho}_i(x - x_0)]}{|x - x_0|^4} Q[\vec{p}(x)]\, dx \right\} dx_0 =$$

$$= 4\pi (r_2 - r_1) \int_{D(r_0)} \left\{ \int_{S(0, r_2) - S(0, r_1)} \frac{Q[\vec{\rho}_i(h)]}{|h|^4} Q[\vec{p}(x_0 + h)]\, dh \right\} dx_0 =$$

$$= 4\pi (r_2 - r_1) \int_{S(0, r_2) - S(0, r_1)} \frac{Q[\vec{\rho}_i(h)]}{|h|^4} \left\{ \int_{D(r_0)} Q[\vec{p}(x_0 + h)]\, dx_0 \right\} dh \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi (r_2 - r_1) \|\vec{p}\|^2 \int_{S(0, r_2) - S(0, r_1)} \frac{Q[\vec{\rho}_i(h)]}{|h|^4} dh.$$

Însă avem

$$\mathfrak{M}\{Q[\vec{\rho}_i(x)], 0, r\} = K r^2$$

și

$$\int_{S(0, r_2) - S(0, r_1)} \frac{Q[\vec{\rho}_i(h)]}{|h|^4} dh = K'(r_2 - r_1)$$

K și K' fiind două constante. Prin urmare

$$I(r) \leqslant K r^2 \|\vec{p}\|^2,$$

$$J(r_1, r_2) \leqslant 4\pi K' (r_2 - r_1)^2 \|\vec{p}\|^2,$$

și deci

$$\left(\int_{D(r_0)} |\mathfrak{M}\{u_i, x_0, r_2\} - \mathfrak{M}\{u_i, x_0, r_1\}|^2 dx_0 \right)^{1/2} \leqslant (c_1' r_1 + c_2' r_2) \|\vec{p}\|$$

pentru $i = 1, 2, 3$. Rezultă că

$$\left(\int_{D(r_0)} P[\mathfrak{M}\{\vec{u}, x_0, r_2\} - \mathfrak{M}\{\vec{u}, x_0, r_1\}] dx_0 \right)^{1/2} \leqslant (c_1 r_1 + c_2 r_2) \|\vec{p}\| \quad (6)$$

unde c_1 și c_2 sînt două constante. Teorema este demonstrată.

Să observăm că formula (6) pe care am obținut-o este mai expresivă decît teorema 1.

Inegalitatea (6) poate fi considerată ca fiind un analog al formulei creșterilor finite pentru funcțiile derivabile în sensul generalizat.

TEOREMA 2. *Dacă A este o parte a lui $\Delta(\mathcal{G}^{**})$ și dacă $\mathcal{G}^{**}(A)$ este mărginită în $\mathcal{H}$, atunci A este egal continuă în medie.*

Demonstrație. Fie în primul rînd $\vec{\vec{u}} \in \mathcal{H}_1$. Să prelungim pe $\vec{u}$ în tot spațiul, luînd $\vec{u}(x) = 0$ dacă $x \notin D$. Atunci în formula (6) putem lua $D(r_0) = R^3$, și deci obținem

$$\| \mathfrak{M}\{\vec{u}, x_0, r_2\} - \mathfrak{M}\{\vec{u}, x_0, r_1\} \| \leqslant (c_1 r_1 + c_2 r_2) \| \mathcal{G}\vec{u} \|. \tag{7}$$

Însă avem

$$\| \mathfrak{M}\{\vec{u}, x_0, r\} \| \leqslant \| \vec{u} \|$$

și cum $\Delta(\mathcal{G}^{**})$ se compune din toți $\vec{u}_0 \in \mathcal{H}$ pentru care există un șir $(\vec{u}_n)_{n \in N} \subset \mathcal{H}_1$, cu $\lim\limits_{n \to \infty} \vec{u}_n = \vec{u}_0$, și astfel încît $(\mathcal{G}\vec{u}_n)_{n \in N}$ să conveargă în $\mathcal{H}$, deducem, făcînd trecerea la limită în (7), că pentru orice $\vec{u} \in \Delta(\mathcal{G}^{**})$, avem

$$\| \mathfrak{M}\{\vec{u}, x_0, r_2\} - \mathfrak{M}\{\vec{u}, x_0, r_1\} \| \leqslant (c_1 r_1 + c_2 r_2) \| \mathcal{G}^{**}\vec{u} \|,$$

ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 3. *Pentru orice parte măsurabilă mărginită G există o constantă K_G astfel încît*

$$\| \vec{u} \|_G \leqslant K_G \| \mathcal{G}^{**}\vec{u} \|,$$

oricare ar fi $\vec{u} \in \Delta(\mathcal{G}^{**})$.

Demonstrație. Am notat, pentru a simplifica scrierea, $\| \vec{u} \|_G = \left(\int_G P[\vec{u}]\, dx \right)^{1/2}$. Inegalitatea din enunț a fost demonstrată în [4], pentru cazul cînd $\vec{u} \in \mathcal{H}_1$. Refacem aci demonstrația pentru a păstra unitatea lucrării.

Dacă $\vec{u} \in \mathcal{H}_1$, să prelungim pe $\vec{u}$ luînd $\vec{u}(x) = 0$ dacă $x \notin D$. Fie G o mulțime deschisă mărginită, cu frontiera de măsură nulă, și fie $\vec{\vec{T}}$ tensorul lui Somigliana [2], definit prin componentele lui T_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$

$$T_{ij}(x) = \frac{1}{2a}\left[\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}\right] + \frac{1}{2b}\left[\frac{\delta_{ij}}{|x|} + \frac{x_i x_j}{|x|^3}\right]$$

și fie

$$\vec{V}_G(x_0) = \int_G \vec{\vec{T}}(x - x_0) \cdot \vec{u}(x)\, dx \tag{8}$$

unde cu $\overrightarrow{\overrightarrow{T}} \cdot \vec{u}$ am notat produsul contractat al tensorului $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ cu vectorul $\vec{u}$. $\vec{V}_G$ este un vector definit în tot spațiul. Ca și pentru ecuația lui Poisson, se demonstrează că avem [2]

$$\Delta^* \vec{V}_G(x) = 0 \qquad \text{dacă } x \in \bar{G}$$

$$\Delta^* \vec{V}_G(x) = -4\pi \vec{u}(x) \qquad \text{dacă } x \in G.$$

Fie

$$I = \frac{1}{4\pi}\int_D Q\,[\mathcal{G}\vec{V}_G, \mathcal{G}\vec{u}]\,dx.$$

Din formula (1), obținem

$$I = -\frac{1}{4\pi}\int_D P\,[\Delta^* \vec{V}_G, \vec{u}]\,dx = \|\vec{u}\|_G^2. \tag{8'}$$

Însă din formula lui Schwarz, avem

$$I^2 \leqslant \frac{1}{4\pi}\int_D Q\,[\mathcal{G}\vec{V}_G]\,dx \cdot \frac{1}{4\pi}\int_D Q\,[\mathcal{G}\vec{u}]\,dx = \frac{1}{16\pi^2}\|\mathcal{G}\vec{u}\|^2 \int_D Q\,[\mathcal{G}\vec{V}_G]\,dx. \tag{9}$$

Lăsînd fără subscripție integrala extinsă la tot spațiul, avem

$$\int_D Q\,[\mathcal{G}\vec{V}_G]\,dx \leqslant \int Q\,[\mathcal{G}\vec{V}_G]\,dx = -\int P\,[\vec{V}_G, \Delta^*\vec{V}_G]\,dx =$$

$$= 4\pi\int_G P\,[\vec{V}_G, \vec{u}]\,dx.$$

Aplicînd din nou formula lui Schwarz, avem

$$\int_D Q\,[\mathcal{G}\vec{V}_G]\,dx \leqslant 4\pi\left(\int_G P\,[\vec{V}_G]\,dx\right)^{1/2}\left(\int_G P\,[\vec{u}]\,dx\right)^{1/2} = 4\pi\|\vec{V}_G\|_G\|\vec{u}\|_G.$$

Dar, după cum deducem imediat din formula (8), există o constantă K'_G, care depinde numai de G, astfel încît să avem :

$$\|\vec{V}_G\|_G \leqslant K'_G\|\vec{u}\|_G.$$

Prin urmare putem scrie

$$\int_D Q\,[\mathcal{G}\vec{V}_G]\,dx \leqslant 4\pi K'_G\|\vec{u}\|_G^2. \tag{10}$$

Din (9) și (10) deducem

$$I^2 \leqslant \frac{K'_G}{4\pi}\|\vec{u}\|_G^2\|\mathcal{G}\vec{u}\|^2$$

și deci, dacă ținem seama de (8'), vom avea

$$\|\vec{u}\|_G \leqslant K_G\|\mathcal{G}\vec{u}\|, \tag{11}$$

unde K_G este o constantă care depinde numai de G. Dacă G este o mulțime mărginită măsurabilă oarecare, ea poate fi inclusă într-o mulțime deschisă mărginită, a cărei frontieră are măsura nulă, și deci inegalitatea (11) este demonstrată pentru orice mulțime măsurabilă mărginită și orice $\vec{u} \in \mathcal{H}_1$. Dacă $\vec{u_0} \in \Delta(\mathcal{G}^{**})$, există un șir $(\vec{u_n})_{n \in N} \subset \mathcal{H}_1$, așa încît să avem

$$\lim_{n \to \infty} \vec{u}_n = u_0 \quad \text{și} \quad \lim_{n \to \infty} \mathcal{G} u_n = \mathcal{G}^{**} u_0$$

și deci, trecînd la limită în inegalitatea (11), obținem

$$\| \vec{u}_0 \|_G \leqslant K_G \| \mathcal{G}^{**} u_0 \| ,$$

pentru orice $\vec{u_0} \in \Delta(\mathcal{G}^{**})$. Teorema este demonstrată.

COROLAR. *Operatorul $\mathcal{G}^{**}$ este univalent.*

Demonstrație. Dacă $\vec{u} \in \Delta(\mathcal{G}^{**})$ și $\mathcal{G}^{**} \vec{u} = 0$, deducem din teorema 3 că avem $\| \vec{u} \|_G = 0$ pentru orice parte măsurabilă mărginită G, deci $\vec{u} = 0$.

TEOREMA 4. *Dacă mulțimea D este mărginită, atunci operatorul $\mathcal{G}^{**-1}$ este compact.*

Demonstrație. Dacă D este mărginită, atunci în teorema 3 putem lua în locul lui G pe D și deci vom avea

$$\| \vec{u} \| \leqslant K_D \| \mathcal{G}^{**} \vec{u} \|$$

ceea ce demonstrează continuitatea operatorului $\mathcal{G}^{**-1}$. Fie acum A o parte mărginită a lui $\Delta(\mathcal{G}^{**-1})$. Există atunci o constantă M așa încît să avem

$$\| \vec{p} \| \leqslant M \quad \text{pentru } \vec{p} \in A$$

și deci, cu teorema 2, pentru orice $\vec{u} \in \mathcal{G}^{**-1}(A)$, avem

$$\| \vec{u} \| \leqslant K_D M$$

$$\| \mathfrak{M} \{\vec{u}, x_0, r_1\} - \mathfrak{M} \{\vec{u}, x_0, r_2\} \| \leqslant (c_1 r_1 + c_2 r_2) M ;$$

de unde, cu criteriul de compacitate al lui A. N. Kolmogoroff [10], deducem că $\mathcal{G}^{**-1}(A)$ este relativ compactă în $\mathcal{H}$, și deci teorema este demonstrată.

COROLAR. *Dacă mulțimea D este mărginită, atunci domeniul operatorului $\mathcal{G}^{**-1}$ este un subspațiu închis al lui $\mathcal{H}$.*

Demonstrație. Afirmația rezultă imediat din faptul că $\mathcal{G}^{**-1}$ este închis și continuu.

§2. Vom demonstra în acest paragraf că vectorii proprii ai operatorilor $\mathfrak{D}\,\mathfrak{G}$ și $\mathfrak{G}\,\mathfrak{D}$ sînt analitici în D. Cu alte cuvinte, sînt elemente ale

spațiilor $\mathcal{H}$, respectiv $\mathfrak{H}$, ale căror componente sînt funcții aproape peste tot egale cu funcții analitice definite în D.

Demonstrația o facem cu ajutorul unui operator de netezire, introdus de K. Friedrichs în [7], [8].

Fie $j(x)$ o funcție indefinit derivabilă, definită pe R, cu proprietățile

$$\alpha)\ j(x) \geqslant 0 \qquad \text{pentru } x \in R$$
$$\beta)\ j(x) = j(-x) \qquad \text{pentru } x \in R$$
$$\gamma)\ j(x) = 0 \qquad \text{pentru } |x| \geqslant 1$$
$$\delta)\ \int_{-1}^{+1} j(x)\,dx = 1.$$

Fie D^* o parte măsurabilă a lui D, complet interioară (adică astfel încît închiderea ei $\overline{D}^*$ să fie compactă și conținută în D). Fie $D_\varepsilon^* = \{x;\ x \in D,$ există $y \in D^*$ cu $|x_i - y_i| \leqslant \varepsilon, i = 1, 2, 3\}$.

Dacă ε este suficient de mic, avem

$$\overline{D}_{2\varepsilon}^* \subset D.$$

Fie $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-3} j\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) j\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) j\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right)$. Atunci pentru orice funcție local sumabilă u, definită în D, operatorul $\mathfrak{J}_\varepsilon$, dat de

$$(\mathfrak{J}_\varepsilon u)(x) = \int_D^* j_\varepsilon(y - x)\, u(y)\, dy$$

este definit, și are proprietățile [7]:

1) $\|\mathfrak{J}_\varepsilon u\|_D \leqslant \|u\|_{D_\varepsilon^*}$ dacă $\varphi_{D_\varepsilon^*} u \in L^2(D)$;

2) $\lim_{\varepsilon \to 0} \|\mathfrak{J}_\varepsilon u - u\|_{D^*} = 0$ dacă $\varphi_{D_\varepsilon^*} u \in L^2(D)$.

Într-adevăr, din inegalitatea lui Schwarz, avem

$$|(\mathfrak{J}_\varepsilon u)(x)|^2 \leqslant \int_{D_\varepsilon^*} j_\varepsilon(y - x)\,dy \int_{D_\varepsilon^*} j_\varepsilon(y - x)\,|u(y)|^2\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_{D_\varepsilon^*} j_\varepsilon(y - x)\,|u(y)|^2\,dy$$

și deci

$$\int_D |\mathfrak{J}_\varepsilon u|^2\,dx \leqslant \int_D \left(\int_{D_\varepsilon^*} j_\varepsilon(y - x)\,|u(y)|^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int_{D_\varepsilon^*} \left(\int_D j_\varepsilon(y - x)\,|u(y)|^2\,dx \right) dy \leqslant \int_{D_\varepsilon^*} |u(y)|^2\,dy = \|u\|_{D_\varepsilon^*}^2,$$

și prima proprietate este demonstrată.

Pentru a doua, să observăm că există un șir de funcții continui $(u_n)_{n\in N}$ definite pe D_ε^*, așa încît să avem

$$\lim_{n\to\infty} \| u - u_n \|_{D_\varepsilon^*} = 0$$

și deci, din proprietatea 1) care a fost deja demonstrată,

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{J}_\varepsilon u - \mathcal{J}_\varepsilon u_n \|_{D_\varepsilon^*} = 0.$$

Însă putem scrie

$$\| \mathcal{J}_\varepsilon u - u \|_{D_\varepsilon^*} \leqslant \| \mathcal{J}_\varepsilon u - \mathcal{J}_\varepsilon u_n \|_{D^*} + \| \mathcal{J}_\varepsilon u_n - u_n \|_{D^*} +$$

$$+ \| u_n - u \|_{D^*} \leqslant 2 \| u - u_n \|_{D_\varepsilon^*} + \| \mathcal{J}_\varepsilon u_n - u_n \|_{D^*} .$$

Proprietatea 2) fiind evident adevărată pentru funcțiile continui u_n, inegalitatea precedentă o demonstrează în cazul general.

LEMA 1. *Dacă* $\vec{u} \in \Delta(\widetilde{\mathcal{G}})$, *atunci pentru orice* $x \in D^*$ *avem*

$$(\mathcal{G}\, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{u})(x) = (\mathcal{J}_\varepsilon\, \widetilde{\mathcal{G}}\, \vec{u})(x).$$

Demonstrație. Dacă $x \in D^*$, avem $j_\varepsilon(y - x) \in C_D$, ca funcție de y, și deci dacă $\overset{\Rightarrow}{r}$ este un tensor simetric constant, avem $\overset{\Rightarrow}{q} = j_\varepsilon(y - x)\, \overset{\Rightarrow}{r} \in \overset{\Rightarrow}{C}_D$, ca funcție de y. Însă avem

$$< \widetilde{\mathcal{G}}\, \vec{u}, \overset{\Rightarrow}{q} > = \int_{D_\varepsilon^*} Q\, [\widetilde{\mathcal{G}}\, \vec{u}, \overset{\Rightarrow}{r}]\, j_\varepsilon(y - x)\, dy =$$

$$= Q\left[\int_{D_\varepsilon^*} j_\varepsilon\, (y - x)\, (\widetilde{\mathcal{G}}\, \vec{u})(y)\, dy, \overset{\Rightarrow}{r} \right] = Q\, [\mathcal{J}_\varepsilon\, \widetilde{\mathcal{G}}\, \vec{u}, \overset{\Rightarrow}{r}].$$

Pe de altă parte, dacă $\overset{\Rightarrow}{r} = (r_{ij})$, avem, cu sumare pentru indicii care se repetă,

$$(\vec{u}, \mathcal{D}\, \overset{\Rightarrow}{q}) = \int_{D_\varepsilon^*} u_j(y) \left[(a - 2b) \frac{\partial j_\varepsilon(y - x)}{\partial y_j} \bar{r}_{ii} + 2b \frac{\partial j_\varepsilon(y - x)}{\partial y_i} \bar{r}_{ij} \right] dy =$$

$$= - \int_{D_\varepsilon^*} u_j(y) \left[(a - 2b) \frac{\partial j_\varepsilon(y - x)}{\partial x_j} \bar{r}_{ii} + 2b \frac{\partial j_\varepsilon(y - x)}{\partial x_i} \bar{r}_{ij} \right] dy =$$

$$= - Q\, [\mathcal{G}\, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{u}, \overset{\Rightarrow}{r}].$$

Dar $< \widetilde{\mathcal{G}}\, \vec{u}, \overset{\Rightarrow}{q} > = - (\vec{u}, \mathcal{D}\, \overset{\Rightarrow}{q})$, și deci avem

$$Q\, [\mathcal{J}_\varepsilon\, \widetilde{\mathcal{G}}\, \vec{u}, \overset{\Rightarrow}{r}] = Q\, [\mathcal{G}\, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{u}, \overset{\Rightarrow}{r}]$$

pentru orice tensor simetric constant $\overset{\Rightarrow}{r}$, dacă $x \in D^*$. Deducem de aici că

$$(\mathcal{J}_\varepsilon\, \widetilde{\mathcal{G}}\, \vec{u})(x) = (\mathcal{G}\, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{u})(x)$$

pentru orice $x \in D^*$, și lema este demonstrată.

LEMA 2. *Dacă* $\overrightarrow{\overrightarrow{p}} \in \Delta(\widetilde{\mathfrak{D}})$, *pentru orice* $x \in D^*$ *avem*

$$(\mathfrak{J}_\varepsilon \widetilde{\mathfrak{D}} \overrightarrow{\overrightarrow{p}})(x) = (\mathfrak{D} \mathfrak{J}_\varepsilon \overrightarrow{\overrightarrow{p}})(x).$$

Demonstrație. Dacă $x \in D^*$, $j_\varepsilon(y - x) \in C_D$, ca funcție de y, și deci pentru orice vector constant $\overrightarrow{v}$, avem

$\overrightarrow{w} = j_\varepsilon(y - x)\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{C}_D$, ca funcție de y.

Ca și mai sus, arătăm că avem

$$< \mathfrak{G} \overrightarrow{w}, \overrightarrow{\overrightarrow{p}} > = - P[\overrightarrow{v}, \mathfrak{D} \mathfrak{J}_\varepsilon \overrightarrow{\overrightarrow{p}}]$$

și

$$(\overrightarrow{w}, \widetilde{\mathfrak{D}} \overrightarrow{\overrightarrow{p}}) = P[\overrightarrow{v}, \mathfrak{J}_\varepsilon \widetilde{\mathfrak{D}} \overrightarrow{\overrightarrow{p}}].$$

Însă

$$< \mathfrak{G} \overrightarrow{w}, \overrightarrow{\overrightarrow{p}} > = - (\overrightarrow{w}, \widetilde{\mathfrak{D}} \overrightarrow{\overrightarrow{p}})$$

și deci avem

$$P[\overrightarrow{v}, \mathfrak{D} \mathfrak{J}_\varepsilon \overrightarrow{\overrightarrow{p}}] = P[\overrightarrow{v}, \mathfrak{J}_\varepsilon \widetilde{\mathfrak{D}} \overrightarrow{\overrightarrow{p}}]$$

pentru orice vector constant $\overrightarrow{v}$ și orice $x \in D^*$. De aici deducem că

$$(\mathfrak{D} \mathfrak{J}_\varepsilon \overrightarrow{\overrightarrow{p}})(x) = (\mathfrak{J}_\varepsilon \widetilde{\mathfrak{D}} \overrightarrow{\overrightarrow{p}})(x)$$

pentru orice $x \in D^*$, ceea ce demonstrează lema.

TEOREMA 5. *Orice soluție* $\overrightarrow{u}$ *a ecuației*

$$\widetilde{\mathfrak{D}} \widetilde{\mathfrak{G}} \overrightarrow{u} + \nu \overrightarrow{u} = 0 \qquad (\nu = \text{constant}) \qquad (11')$$

este analitică.

Demonstrație. Dacă $\overrightarrow{u}$ este o soluție a ecuației din enunțul teoremei, avem $\overrightarrow{u} \in \Delta(\widetilde{\mathfrak{G}})$, $\widetilde{\mathfrak{G}} \overrightarrow{u} \in \Delta(\widetilde{\mathfrak{D}})$. Fie $\overrightarrow{\overrightarrow{p}} = \widetilde{\mathfrak{G}} \overrightarrow{u}$; avem

$$< \overrightarrow{\overrightarrow{p}}, \overrightarrow{\overrightarrow{q}} > = - (\overrightarrow{u}, \mathfrak{D} \overrightarrow{\overrightarrow{q}}) \qquad (12)$$

pentru orice $\overrightarrow{\overrightarrow{q}} \in \overrightarrow{C}_D$ și

$$< \mathfrak{G} \overrightarrow{v}, \overrightarrow{\overrightarrow{p}} > = \nu (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) \qquad (13)$$

pentru orice $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{C}_D$. Ecuațiile (12) și (13) sînt echivalente cu ecuația (11').

Fie D^* o parte deschisă a lui D, așa încît $\overline{D}^*$ să fie compactă și $\overline{D}^* \subset D$. Fie $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{C}_D$, $\overrightarrow{\overrightarrow{q}} \in \overrightarrow{C}_D$, cu suporturile conținute în D^*, și fie ε sufi-

cient de mic, astfel încît suporturile lui $\mathcal{J}_\varepsilon \vec{v}$ și $\mathcal{J}_\varepsilon \vec{q}$ să fie de asemenea conținute în D^*. Atunci, din ecuațiile (12) și (13), deducem

$$< \vec{p}, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{q} > = - (\vec{u}, \mathcal{D} \mathcal{J}_\varepsilon \vec{q})$$

$$< \mathcal{G} \mathcal{J}_\varepsilon \vec{v}, \vec{p} > = \nu (\mathcal{J}_\varepsilon \vec{v}, \vec{u}).$$

Însă

$$< \vec{p}, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{q} > = \int_D Q [\vec{p}(x), \mathcal{J}_\varepsilon \vec{q}(x)] dx = \int_{D_\varepsilon^*} Q [\vec{p}(x), \mathcal{J}_\varepsilon \vec{q}(x)] dx =$$

$$= \int_{D_\varepsilon^*} Q [\vec{p}(x), \int_{D_\varepsilon^*} j_\varepsilon (x - y) \vec{q}(y) dy] dx =$$

$$= \int_{D_\varepsilon^*} \left(\int_{D_\varepsilon^*} Q [\vec{p}(x), j_\varepsilon (x - y) \vec{q}(x)] dy \right) dx =$$

$$= \int_{D_\varepsilon^*} \left(\int_{D_\varepsilon^*} Q [j_\varepsilon (x - y) \vec{p}(x), \vec{q}(y)] dy \right) dx =$$

$$= \int_{D_\varepsilon^*} Q \left[\int_{D_\varepsilon^*} j_\varepsilon (x - y) \vec{p}(x) dx, \vec{q}(y) \right] dy =$$

$$= \int_{D_\varepsilon^*} Q [(\mathcal{J}_\varepsilon \vec{p})(y), \vec{q}(y)] dy = \int_D [Q [\mathcal{J}_\varepsilon \vec{p}, \vec{q}] dy = < \mathcal{J}_\varepsilon \vec{p}, \vec{q} >.$$

Apoi

$$(\vec{u}, \mathcal{D} \mathcal{J}_\varepsilon \vec{q}) = \int_D P [\vec{u}(x), (\mathcal{D} \mathcal{J}_\varepsilon \vec{q})(x)] dx =$$

$$= \int_{D^*} P [\vec{u}(x), (\mathcal{D} \mathcal{J}_\varepsilon \vec{q})(x)] dx = \int_{D^*} P [\vec{u}(x), (\mathcal{J}_\varepsilon \mathcal{D} \vec{q})(x)] dx =$$

$$= \int_{D_\varepsilon^*} P \left[\vec{u}(x), \int_{D_\varepsilon^*} j_\varepsilon (y - x) (\mathcal{D} \vec{q})(y) dy \right] dx =$$

$$= \int_{D_\varepsilon^*} \left(\int_{D_\varepsilon^*} P [\vec{u}(x), j_\varepsilon (y - x) (\mathcal{D} \vec{q})(y)] dy \right) dx =$$

$$= \int_{D_\varepsilon^*} \left(\int_{D_\varepsilon^*} P [j_\varepsilon (y - x) \vec{u}(x), (\mathcal{D} \vec{q})(y)] dy \right) dx =$$

$$= \int_{D_\varepsilon^*} P \left[\int_{D_\varepsilon^*} j_\varepsilon (y - x) \vec{u}(x) dx, (\mathcal{D} \vec{q})(y) \right] dy =$$

$$= \int_{D_\varepsilon^*} P [\mathcal{J}_\varepsilon \vec{u}, \mathcal{D} \vec{q}] dy = \int_D P [\mathcal{J}_\varepsilon \vec{u}, \mathcal{D} \vec{q}] dy =$$

$$= (\mathcal{J}_\varepsilon \vec{u}, \mathcal{D} \vec{q}).$$

În mod analog, găsim că

$$< \mathcal{G}\, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{v}, \vec{\vec{p}} > = < \mathcal{G}\, \vec{v}, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{\vec{p}} >$$

și

$$(\mathcal{J}_\varepsilon \vec{v}, \vec{u}) = (\vec{v}, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{u}).$$

Prin urmare vom avea

$$\begin{aligned} < \mathcal{J}_\varepsilon \vec{\vec{p}}, \vec{\vec{q}} > &= - (\mathcal{J}_\varepsilon \vec{u}, \mathcal{D}\, \vec{\vec{q}}) \\ < \mathcal{G}\, \vec{v}, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{\vec{p}} > &= \nu\, (\vec{v}, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{u}) \end{aligned} \tag{14}$$

pentru orice ε suficient de mic, și orice $\vec{v} \in \vec{C}_{D^*}$, $\vec{\vec{q}} \in \vec{\vec{C}}_{D^*}$. Ținînd seama că $\mathcal{J}_\varepsilon \vec{\vec{p}}$ și $\mathcal{J}_\varepsilon \vec{u}$ sînt indefinit derivabile, folosind un argument cunoscut, din ecuațiile (14) deducem că avem în D^*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon \vec{\vec{p}} &= \mathcal{G}\, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{u} \\ \mathcal{D}\, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{\vec{p}} &= - \nu\, \mathcal{J}_\varepsilon \vec{u}. \end{aligned}$$

Rezultă că în D^*, $\mathcal{J}_\varepsilon \vec{u}$ este soluție a ecuației

$$\Delta^* \vec{v} + \nu \vec{v} = 0$$

și deci este un vector analitic.

Teorema 5 va fi demonstrată dacă demonstrăm

LEMA 3. *Dacă* $(\vec{u}_i)_{i \in N}$ *este un șir de soluții (analitice) ale ecuației*

$$\Delta^* \vec{u} + \nu \vec{u} = 0 \tag{15}$$

și dacă șirul converge în medie pătratică în D^*, *atunci el converge uniform pe orice compact din* D^* *spre o soluție analitică a aceleiași ecuații.*

Demonstrație. Fie $x_0 \in D^*$ și fie $d^*(x_0)$ distanța de la x_0 la frontiera lui D^*. Pentru orice sferă $S(x_0, r)$, unde $r < d^*(x_0)$ există un tensor Green $\vec{\vec{\Gamma}}_r(x, \xi)$, așa încît să avem

$$\vec{u}(x) = \int_{\Sigma(x_0, r)} \frac{\partial \vec{\vec{\Gamma}}_r(x, \xi)}{\partial n} \cdot \vec{u}(\xi)\, d\sigma(\xi) \tag{16}$$

dacă r este suficient de mic și dacă $|x - x_0| < r$. Aici $\Sigma(x_0, r)$ este suprafața sferică cu centrul în x_0 și raza r, iar n este normala ei exterioară, și sub integrală figurează produsul contractat al tensorului $\frac{\partial \vec{\vec{\Gamma}}_r}{\partial n}$ cu vectorul $\vec{u}$.

Existența lui $\overrightarrow{\Gamma}_r$ se demonstrează rezolvînd problema lui Dirichlet pentru ecuația (15) și sfera $S(x_0, r)$ ceea ce se poate face cu ajutorul teoriei lui Fredholm. Dacă r_1, r_2 sînt două numere așa încît să avem $|x - x_0| < r_1 < r_2 < d^*(x_0)$, prin integrare în raport cu r, din (16) obținem

$$\vec{u}(x) = \frac{3}{r_2 - r_1} \int_{S(x_0, r_2) - S(x_0, r_1)} \frac{\partial \overrightarrow{\Gamma}_r(x, \xi)}{\partial n} \cdot \vec{u}(\xi)\, d\xi \qquad (17)$$

unde de data aceasta figurează o integrală de volum. Dacă $\vec{u}$ converge în medie spre $\vec{u}_0$, deducem din (17) că $\vec{u}$ converge uniform în interiorul lui $S(x_0, r)$ spre o funcție analitică, și deci $\vec{u}_0$ este aproape peste tot egal cu un vector analitic. Cu ajutorul lemei lui Borel-Lebesgue demonstrăm lema în întregime. Cu aceasta și teorema 5 este demonstrată.

TEOREMA 6. *Orice soluție* $\overrightarrow{p}$ *a ecuației*

$$\tilde{\mathcal{G}}\,\tilde{\mathfrak{D}}\overrightarrow{p} + \nu\overrightarrow{p} = 0 \qquad (\nu = \text{const.})$$

este analitică, dacă $\nu \neq 0$.

Demonstrație. Dacă $\tilde{\mathcal{G}}\,\tilde{\mathfrak{D}}\overrightarrow{p} + \nu\overrightarrow{p} = 0$, urmează că avem

$$\overrightarrow{p} \in \Delta(\tilde{\mathfrak{D}}),\ \tilde{\mathfrak{D}}\overrightarrow{p} = \vec{u} \in \Delta(\tilde{\mathcal{G}}), \text{ și deci}$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}\overrightarrow{p} = \vec{u}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}\vec{u} + \nu\overrightarrow{p} = 0.$$

Rezultă că $\tilde{\mathcal{G}}\vec{u} \in \Delta(\tilde{\mathfrak{D}})$ și deci

$$\tilde{\mathfrak{D}}\,\tilde{\mathcal{G}}\vec{u} + \nu\vec{u} = 0.$$

Din teorema 5 rezultă că $\vec{u}$ este un vector analitic, deci $\overrightarrow{p} = -\frac{1}{\nu}\,\mathcal{G}\vec{u}$ este analitic, dacă $\nu \neq 0$. Teorema este demonstrată.

§3. Vom demonstra în acest paragraf că problema pe care am enunțat-o în introducere are un sistem ortonormal complet de soluții. Datorită generalității frontierei mulțimii deschise D, nu ne putem aștepta ca pe frontieră să fie îndeplinită identic condiția $\vec{u}(x) = 0$. Această condiție va fi înlocuită cu o condiție integrală echivalentă cu condiția ca $\vec{u}$ să aparțină spațiului $\Delta(\mathcal{G}^{**})$.

În acest paragraf vom presupune că D este mărginită. Atunci, după cum am demonstrat mai sus (teorema 4), operatorul $\mathcal{G}^{**-1}$ este compact și domeniul lui este un subspațiu închis al lui $\mathfrak{H}$, pe care îl vom

nota cu $\mathcal{H}_0$. Fie $P_{\mathcal{H}_0}$ proiectorul din $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, care corespunde subspațiului $\mathcal{H}_0$, și fie

$$T = \mathcal{G}^{**-1} P_{\mathcal{H}_0}.$$

T este un operator compact care aplică pe $\mathcal{H}$ peste $\Delta(\mathcal{G}^{**}) = \mathcal{H}_0$. Atunci T^*T este un operator pozitiv compact din $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Fie

$$T^*T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i \tag{18}$$

descompunerea lui spectrală, unde P_i sînt proiectori din $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ de dimensiune finită, ortogonali doi cîte doi și $\lambda_i > 0$, $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = 0$.

Vom demonstra acum următoarea

LEMA 4. *T^*T este univalent și $T^{*-1} \subset -\widetilde{\mathfrak{D}}$.*

Demonstrație. Dacă avem $T^* \vec{u} = 0$, cu $\vec{u} \in \mathcal{H}$, atunci $< T^* \vec{u}, \vec{p} > = 0$ pentru orice $\vec{p} \in \mathcal{H}_0$, deci $(\vec{u}, T\vec{p}) = (\vec{u}, \mathcal{G}^{**-1}\vec{p}) = 0$ pentru orice $\vec{p} \in \mathcal{H}_0$, deci $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, pentru orice $\vec{v} \in \mathcal{H}_0$, ceea ce arată că $\vec{u} = 0$, deoarece $\mathcal{H}_0$ este dens în $\mathcal{H}$. Cu aceasta am arătat că operatorul T^* este univalent. Fie acum $\vec{p} \in \Delta(T^{*-1})$. Atunci avem $\vec{p} = T^* \vec{u}$, unde $\vec{u} \in \mathcal{H}$. Prin urmare vom avea $< \vec{p}, \vec{q} > = < T^* \vec{u}, \vec{q} > = (\vec{u}, T\vec{q})$ pentru orice $\vec{q} \in \mathcal{H}_0$, deci $< \vec{p}, \vec{q} > = (\vec{u}, \mathcal{G}^{**-1}\vec{q})$. Deducem că $< \vec{p}, \mathcal{G}^{**}\vec{v} > = (\vec{u}, \vec{v})$ pentru orice $\vec{v} \in \mathcal{H}_0$. Prin urmare $\vec{p} \in \Delta(\mathcal{G}^*)$ și $\mathcal{G}^* \vec{p} = \vec{u}$. Însă $\mathcal{G}^* = -\widetilde{\mathfrak{D}}$, și avem deci

$$-\widetilde{\mathfrak{D}}\, T^* \vec{u} = \vec{u} \qquad \vec{u} \in \mathcal{H}$$

$$\Delta(T^{*-1}) \subset \Delta(\widetilde{\mathfrak{D}})$$

ceea ce arată că avem $-\widetilde{\mathfrak{D}} \supset T^{*-1}$, și lema este demonstrată.

LEMA 5. $\bigoplus_{i=1}^{\infty} P_i = P_{\mathcal{H}_0}$.

Demonstrație. Fie $\vec{p} \in \mathcal{H}$, astfel încît să avem $P_i \vec{p} = 0$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots$. Rezultă de aici că vom avea $< T^*T\vec{p}, \vec{q} > = 0$ pentru orice $\vec{q} \in \mathcal{H}$, deci $T\vec{p} = 0$, sau $P_{\mathcal{H}_0}\vec{p} = 0$. Pe de altă parte, dacă $P_{\mathcal{H}_0}\vec{p} = 0$, avem $T\vec{p} = 0$, și deci $P_i\vec{p} = 0$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots$. Lema este demonstrată.

LEMA 6. *Dacă* $\overset{\Rightarrow}{p} \in \mathcal{H}$ *este astfel încît pentru un indice* i, $P_i \overset{\Rightarrow}{p} = \overset{\Rightarrow}{p}$, *atunci* $\overset{\Rightarrow}{p}$ *este un tensor analitic, soluție a ecuației*

$$\tilde{\mathcal{G}}\,\tilde{\mathfrak{D}}\overset{\Rightarrow}{p} + \frac{1}{\lambda_i}\overset{\Rightarrow}{p} = 0.$$

Demonstrație. Dacă $P_i \overset{\Rightarrow}{p} = \overset{\Rightarrow}{p}$, avem $P_j \overset{\Rightarrow}{p} = 0$ pentru orice $j \neq i$, deci

$$T^* T \overset{\Rightarrow}{p} = \lambda_i \overset{\Rightarrow}{p}.$$

Aplicînd lema 4 deducem

$$T \overset{\Rightarrow}{p} = -\lambda_i \tilde{\mathfrak{D}} \overset{\Rightarrow}{p}$$

sau

$$\mathcal{G}^{**-1} \overset{\Rightarrow}{p} + \lambda_i \tilde{\mathfrak{D}} \overset{\Rightarrow}{p} = 0$$

de unde

$$\overset{\Rightarrow}{p} + \lambda_i \mathcal{G}^{**} \tilde{\mathfrak{D}} \overset{\Rightarrow}{p} = 0.$$

Din teorema 6 rezultă că $\overset{\Rightarrow}{p}$ este analitic, și lema este demonstrată.

Rezultă din cele de mai sus că dacă luăm în fiecare spațiu $P_i \mathcal{H}$ un sistem ortonormal complet $\overset{\Rightarrow}{p}_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots, n_i)$, atunci $(\overset{\Rightarrow}{p}_{ij})$ $(j = 1, 2, \ldots, n_i;$ $i = 1, 2, \ldots)$ este un sistem ortonormal complet pentru spațiul $\mathcal{H}_0$, format din tensori analitici.

Fie acum $\overrightarrow{u}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} T \overset{\Rightarrow}{p}_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots, n_i;\ i = 1, 2, \ldots)$.

Atunci avem

TEOREMA 7. $(\overrightarrow{u}_{ij})$ $(j = 1, 2, \ldots, n_i;\ i = 1, 2, \ldots)$ *este un sistem ortonormal complet în* $\mathcal{H}$.

Demonstrație. Avem

$$(\overrightarrow{u}_{ij}, \overrightarrow{u}_{kl}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_k}} (T \overset{\Rightarrow}{p}_{ij}, T \overset{\Rightarrow}{p}_{kl}) = -\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_k}} (\tilde{\mathfrak{D}} \overset{\Rightarrow}{p}_{ij}, \mathcal{G}^{**-1} \overset{\Rightarrow}{p}_{kl}) =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_k}} < \overset{\Rightarrow}{p}_{ij}, \mathcal{G}^{**}\, \mathcal{G}^{**-1} \overset{\Rightarrow}{p}_{kl} > = \delta_{ij\,.\,kl}$$

și deci sistemul $(\overrightarrow{u}_{ij})$ este ortonormal.

Dacă $\overrightarrow{u}_0 \in \mathcal{H}$, așa încît să avem

$$(\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{u}_{ij}) = 0$$

pentru orice $j = 1, 2, \ldots, n_i$; $i = 1, 2, \ldots$, deducem

$$(\vec{u}_0, \; T\vec{\vec{p}}_{ij}) = 0$$

pentru orice $j = 1, 2, \ldots, n_i$; $i = 1, 2, \ldots$, deci

$$(\vec{u}_0, \; T\vec{\vec{p}}) = 0$$

pentru orice $\vec{\vec{p}} \in \mathcal{K}$, sau

$$< T^* \vec{u}_0, \vec{\vec{p}} > \; = 0$$

pentru orice $\vec{\vec{p}} \in \mathcal{K}$, deci $T^* \vec{u}_0 = 0$. Însă, din lema 4, T^* este univalent, ceea ce arată că $\vec{u}_0 = 0$. Prin urmare sistemul $(\vec{u}_{ij})$ este complet și teorema este demonstrată.

Vectorii $\vec{u}_{ij}$ sînt soluții ale ecuației

$$\vec{u}_{ij}^{\cdot\cdot} + \lambda_i \Delta^* \vec{u}_{ij} = 0,$$

după cum rezultă imediat din calculele făcute mai sus, și aparțin toți spațiului $\mathcal{H}_0$. Aceasta este o condiție de frontieră naturală, dacă ținem seama de generalitatea mulțimii D.

Este posibil ca, dacă frontiera lui D are porțiuni suficient de regulate, pe aceste porțiuni, condiția de frontieră să fie îndeplinită în mod strict. De asemenea, mai rămîne de studiat aceeași problemă în cadrul mai general al unei mulțimi deschise D oarecare.

În aceste condiții nu se mai poate demonstra compacitatea operatorului $\mathcal{G}^{**-1}$, și operatorul T^*T va avea, în general, un spectru continuu.

О ПЕРВОЙ ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО ТЕЛА

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе автор доказывает существование полной ортонормированной системы (обобщенных) собственных векторов для задачи о колебаниях однородной и изотропной упругой среды, неподвижной на границе и заполняющей произвольное ограниченное открытое множество трехмерного эвклидового пространства. Исследование проводится в рамках некоторых гильбертовых пространств, сопоставляемых задаче; собственные колебания даются вполне непрерывным оператором, действующим между этими пространствами, причем условие неподвижности выполняется в некотором обобщенном смысле.

SUR LE PREMIER PROBLÈME DE VIBRATIONS PROPRES D'UN CORPS ÉLASTIQUE

RÉSUMÉ

L'auteur démontre l'existence d'un système orthonormé complet de vecteurs propres (généralisés) dans le cas du problème des oscillations d'un milieu élastique isotrope homogène, immobile à la frontière; le milieu remplit un ensemble ouvert, borné, quelconque de l'espace euclidien tridimensionnel.

L'auteur utilise la théorie des espaces hilbertiens, les oscillations propres étant fournies par un opérateur complètement continu. La condition d'immobilité sur la frontière est satisfaite dans un sens généralisé.

BIBLIOGRAFIE

1. A. KORN, *Die Eigenschwingungen eines elastischen Körpers mit ruhender Oberfläche.* Akad. Wiss., Münch. Math. Phys. Kl. Berichte, **36**, 351 (1906).
2. H. WEYL, *Das asymtotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **39**, 1—50 (1915).
3. K. O. FRIEDRICHS, *On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality.* Annals of Math., **48**, 441—471 (1947).
4. S. TELEMAN, *Metoda proiecţiei ortogonale şi primele două probleme la limită din teoria elasticităţii.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., **1** (1955).
5. F. RELLICH, *Ein Satz über mittlere Konvergenz.* Gött. Nachrichten, **59**, 30—35 (1930).
6. R. COURANT, D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik.* **II**, Springer, Berlin, 1927.
7. K. O. FRIEDRICHS, *On differential operators in Hilbert spaces.* American Journal of Mathematics, **61**, 523—544 (1939).
8. — *The identity of weak and strong extensions of differential operators.* Trans. Amer. Math. Soc., **55**, 132—151 (1944).
9. С. А. СОБОЛЕВ, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Изд. Ленинград. Универ., Ленинград, 1950.
10. A. N. KOLMOGOROFF, *Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel.* Gött. Nachrichten, **60**, 60—63 (1931).
11. H. WEYL, *The method of orthogonal projection in potential theory.* Duke Math. Journal, **7**, 411—444 (1940).
12. F. RIESZ, B. SZ. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Magyar Akadémiai kiado, Budapest, 1953.

ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA TRANSPORTURILOR

II. PROBLEME DE TRANSPORTURI CU PARAMETRI

DE

E. BALAŞ şi P. IVĂNESCU

§ 1. ENUNŢAREA PROBLEMEI

În ultimii ani s-au studiat probleme de programare liniară cu parametri şi metoda simplex a fost adaptată la rezolvarea lor (vezi de exemplu [5]). Pe de altă parte, nici una din metodele speciale de rezolvare a problemelor de transporturi nu a fost încă adaptată pentru cazul cînd datele problemei depind de anumiţi parametri, deşi în practică acest caz se întîlneşte foarte des. Astfel, planificarea *periodică* a transportului oricărui produs avînd producători şi consumatori stabili, reprezintă de fapt o problemă de transporturi cu parametri, deoarece datele problemei se schimbă de la o perioadă la alta. În legătură cu aceasta se pune problema găsirii unei metode cu ajutorul căreia să se poată trece de la o soluţie optimă, valabilă pentru anumite valori ale parametrilor, la soluţia optimă valabilă pentru alte valori ale acestora. Printr-o asemenea metodă s-ar putea trece de la planul optim de transporturi valabil pentru o anumită perioadă, la planul optim valabil pentru o altă perioadă, evitîndu-se astfel necesitatea elaborării de fiecare dată a unui plan nou cu metodele obişnuite.

Problemele de transporturi cu parametri care se ivesc de obicei în practică, se caracterizează prin faptul că parametrii nu apar decît în termenii liberi ai ecuaţiilor restrictive. Într-adevăr, ceea ce se schimbă periodic în datele unei probleme de transporturi, sînt numai cantităţile produse şi consumate de diferitele centre, iar distanţele dintre centre şi costurile unitare (tarifele) de transport rămîn neschimbate. Cazul cînd unele din centre nu livrează sau nu primesc de loc produse într-o perioadă sau alta, corespunde situaţiei cînd valoarea pe care o are unul sau altul din parametri face ca termenul liber al ecuaţiei ce corespunde centrului respectiv să se anuleze. Cazul cînd unele centre sînt legate se reduce la cazul obişnuit cu ajutorul metodei date în [2].

Din punct de vedere matematic, problema de transporturi cu parametri se poate formula astfel :

Să se determine necunoscutele x_{ij} pentru care

$$E = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

îşi atinge minimul şi care satisfac relaţiile

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i + \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j + \beta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \tag{3}$$

unde $c_{ij} \geqslant 0$ reprezintă distanţele sau costurile unitare de transporturi între centrele i şi j; $a_i > 0$ şi $b_j > 0$ reprezintă producţia, respectiv consumul centrelor i şi j într-o anumită perioadă $\left(\sum_i a_i = \sum_j b_j\right)$; x_{ij} sînt cantităţile de produse ce trebuie transportate din centrul i în centrul j; α_i şi β_j reprezintă parametri care sînt supuşi condiţiilor

$$\left.\begin{aligned} a_i + \alpha_i &\geqslant 0 \\ b_j + \beta_j &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} p_i &\leqslant \alpha_i \leqslant p^i \\ q_j &\leqslant \beta_j \leqslant q^j. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

§ 2. NOŢIUNI INTRODUCTIVE

Înainte de a trece la studiul problemei noastre, vom da cîteva definiţii şi rezultate cunoscute, de care ne vom folosi în lucrare.

Spunem că $X = (x_{ij})$ este o *soluţie* dacă ea satisface ecuaţiile (2). O soluţie care satisface şi inegalităţile (3) se numeşte o *soluţie admisibilă*. O soluţie admisibilă se numeşte *optimă* dacă ea realizează minimul expresiei (1).

Fie $\widetilde{X}$ o soluţie nedegenerată [5] a unei probleme de transporturi cu m centre de producţie şi n centre de consum.

Printr-o bază $\widetilde{M}$ a soluţiei $\widetilde{X}$ înţelegem mulţimea celulelor a_{ij} pentru care x_{ij} are o valoare pozitivă în soluţia $\widetilde{X}$.

Fie a_{pq} şi a_{rs} în $\widetilde{M}$. Printr-un *drum* din $\widetilde{M}$ care uneşte pe a_{pq} şi a_{rs} se înţelege un şir

$$a_{i_1 j_1},\ a_{i_2 j_2},\ a_{i_3 j_3},\ \ldots,\ a_{i_l j_l}$$

de elemente distincte din $\widetilde{M}$ astfel ca sau $i_\alpha = i_{\alpha-1}$ și $j_\alpha = j_{\alpha+1}$, sau $j_\alpha = j_{\alpha-1}$ și $i_\alpha = i_{\alpha+1}$ $(1 < \alpha \leqslant t)$, iar $a_{pq} = a_{i_1 j_1}$, $a_{rs} = a_{i_t j_t}$.

Un șir de celule distincte de forma

$$a_{i_1 j_1},\ a_{i_1 j_2},\ a_{i_2 j_2},\ \ldots,\ a_{i_k j_k},\ a_{i_k j_1}$$

se numește un *ciclu*. Se știe (vezi de exemplu [6]) că din oricare soluție $\widetilde{X}$ se poate construi o soluție X pentru care baza M să nu conțină cicluri. De asemenea se știe că graful corespunzător unei soluții nedegenerate este conex (oricare două elemente din M pot fi unite printr-un drum) și fără cicluri, deci este un arbore. (Graful corespunzător unei soluții X are ca noduri elementele a_{ij} ale bazei M, două elemente fiind legate printr-un arc dacă și numai dacă ele se află pe aceeași linie sau coloană). În cele ce urmează ne vom ocupa numai de soluții cu baza fără cicluri.

Se știe [6] că oricare ar fi celula $a_{ij} \notin M$, există un ciclu (unic determinat) care o cuprinde și care are toate celelalte elemente în M. Acest ciclu îl vom nota cu $C\ (i,\ j)$.

Fie X o soluție cu baza M și fie $a_{ij} \notin M$, iar

$$C(i,\ j) = \{a_{ij},\ a_{ij_1},\ a_{i_1 j_1},\ a_{i_1 j_2}, \ldots,\ a_{i_k j_k},\ a_{i_k j}\}.$$

Prin *evaluarea* D_{ij} a unei celule $a_{ij} \notin M$, se înțelege

$$D_{ij} = c_{ij} - c_{ij_1} + c_{i_1 j_1} - c_{i_1 j_2} + \ldots + c_{i_k j_k} - c_{i_k j}$$

(evaluarea D_{ij} reprezintă suma cu care se modifică valoarea funcției de optimizat dacă x_{ij} crește cu o unitate).

Se știe [4] că pentru ca o soluție admisibilă X să fie optimă este necesar și suficient ca pentru orice $a_{ij} \notin M$ să avem $D_{ij} \geqslant 0$.

Prin analogie, o soluție neadmisibilă va fi numită optimă, dacă $D_{ij} \geqslant 0$ pentru orice i și j.

Dacă drumul care unește două elemente din bază conține un număr impar de elemente, spunem că cele două elemente au aceeași paritate; în caz contrar spunem că ele au parități diferite.

Un element $a_{rs} \in M$ cu proprietatea că există h și k astfel ca a_{rh} și a_{ks} să fie în M se numește un element cot. Mulțimea elementelor cot o vom nota cu N.

§ 3. TRECEREA LA O NOUĂ SOLUȚIE ADMISIBILĂ

Să presupunem că am determinat o soluție admisibilă optimă $X_0 = (x^0_{ij})$ a problemei noastre pentru anumite valori fixate α^0_i, β^0_j ale parametrilor. Atunci, evident, fiecare x^0_{ij} din baza M_0 va fi o funcție liniară de parametrii α^0_i, β^0_j:

$$x^0_{ij} = \sum_k A^k_{ij}\, \alpha^0_k + \sum_l B^l_{ij}\, \beta^0_l + C_{ij} \geqslant 0,\ (a_{ij} \in M_0). \tag{7}$$

Cu alte cuvinte, sistemul de inegalități liniare

$$x_{ij} = \sum_k A_{ij}^k \alpha_k + \sum_l B_{ij}^l \beta_l + C_{ij} \geqslant 0, \quad (a_{ij} \in M_0) \tag{8}$$

cu necunoscutele α_k și β_l, este compatibil. Mulțimea soluțiilor sistemului (8) formează un poliedru convex P_0 în spațiul $(m+n)$-dimensional, care cuprinde punctul $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_m^0; \beta_1^0, \beta_2^0, \ldots, \beta_n^0)$. Observăm că pentru orice punct din P_0 soluția admisibilă optimă a problemei noastre are aceeași bază și este dată de formulele (8), căci ea este pe de o parte o soluție admisibilă (nenegativitatea elementelor fiind asigurată de inegalitățile (8)) și pe de altă parte optimă, căci toți $D_{ij} \geqslant 0$, valoarea lor depinzînd numai de poziția elementelor din bază.

Observăm că este de ajuns să studiem sistemul (8) doar pe mulțimea N_0 a elementelor cot, deoarece dacă $x_{ij}^0 \in M_0 - N_0$ el este singurul element din linia (sau coloana) sa și deci valoarea sa este $a_i + \alpha_i$ (sau $b_j + \beta_j$), deci sigur nenegativă.

Menționăm că Jaromir Abrham a studiat în [1] domeniul parametrilor în care soluția admisibilă optimă are aceeași bază și a determinat un interval care aparține domeniului.

Problema care se pune acum este determinarea unei noi soluții admisibile, într-un domeniu în care soluția veche încetează de a mai rămîne admisibilă.

Fie $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_m; \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \ldots, \bar{\beta}_n)$ un punct pentru care una din inegalitățile (8) devine egalitate. Să presupunem de exemplu că formula (8) dă $x_{i_0 j_0} = 0$. Este clar că există puncte oricît de apropiate de punctul $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m; \bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_n)$ în semispațiul $x_{i_0 j_0} < 0$. Trebuie determinată o celulă a_{ij} care, introdusă în M_0 în locul lui $a_{i_0 j_0}$ să formeze o bază M_1 a unei soluții optime admisibile pentru un asemenea punct din domeniul de definiție al parametrilor.

Prima problemă care se pune acum este determinarea tuturor celulelor care pot fi introduse în bază în locul lui $a_{i_0 j_0}$.

Atribuim fiecărei celule $a_{ij} \in M_0$ o valoare $v(i, j)$ din algebra booleană L_2 astfel:

a) $v(i_0, j_0) = 1$

b) Dacă $a_{i_r j_r} \in N_0$ și are aceeași paritate cu $a_{i_0 j_0}$ atunci $v(i_r, j_r) = 1$; dacă $a_{i_r j_r} \in N_0$ și are altă paritate decît $a_{i_0 j_0}$, atunci $v(i_r, j_r) = 0$.

c) Dacă $a_{i_s j_s} \in M_0 - N_0$ și dacă $i_s = i_0$ sau $j_s = j_o$, atunci $v(i_0, j_s) = 0$, respectiv $v(i_s, j_0) = 0$.

d) Dacă $a_{i_t j_t} \in M_0 - N_0$ și $i_t \neq i_0$ și $j_t \neq j_0$, atunci drumul D care leagă acest element de $x_{i_0 j_0}$ va conține evident elemente din N_0. Notînd cu $a_{i_u j_u}$ elementul din N_0 cel mai apropiat de $a_{i_t j_t}$ în drumul D, punem $v(i_t, j_t) = \overline{v(i_u, j_u)}$ (aceasta din urmă fiind determinată ca la punctul b, iar bara însemnînd negația în L_2).

În continuare, atribuim fiecărei linii și coloane a matricei X_0 o valoare $w(i)$, respectiv $w'(j)$ din L_2 după cum urmează :

În fiecare linie a matricei X_0 se găsește cel puțin un element din M_0. Dacă se găsesc mai multe, există printre ele unul cu proprietatea că drumul care leagă toate celelalte de $a_{i_0 j_0}$ trece prin el (aceasta rezultă din lipsa ciclurilor în graful lui X_0). Fie el $a_{i j_*}$. Definim valoarea $w(i)$ a liniei i prin

$$w(i) = \overline{v(i, j_*)}.$$

În mod analog pentru coloane definim

$$w'(j) = \overline{v(i^*, j)},$$

dacă $a_{i^* j}$ este elementul din coloana j cu proprietatea de mai sus.

Dacă celula a_{ij} nu este în M_0 atunci definim valoarea sa $u(i, j)$ prin

$$u(i, j) = w(i)w'(j).$$

LEMA 1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca ciclul $C(i, j)$ să treacă prin $a_{i_0 j_0}$ este ca $w(i) = w'(j)$.*

Demonstrație.

a) Dacă $C(i,j)$ trece prin $a_{i_0 j_0}$ atunci el cuprinde neapărat drumurile care leagă $a_{i j_*}$ de a_{ij} și $a_{i^* j}$ de a_{ij}. Numerele elementelor din drumurile care leagă pe $a_{i_0 j_0}$ de a_{ij} trecînd prin $a_{i^* j}$ respectiv prin $a_{i j_*}$ trebuie să aibă aceeași paritate (numărul total al elementelor unui ciclu fiind par), deci $v(i^*, j) = v(i, j_*)$. Din definițiile lui $w(i)$ și $w'(j)$ rezultă că și $w(i) = w'(j)$.

b) Să presupunem că $w(i) = w'(j)$. Să notăm cu D_1 drumul care leagă $a_{i_0 j_0}$ cu $a_{i^* j}$ și cu D_2 drumul care leagă $a_{i_0 j_0}$ cu $a_{i j_*}$, aceste drumuri fiind unic determinate de lipsa ciclurilor în graful soluției X_0, iar existența lor fiind garantată de conexitatea grafului soluției X_0.

Se pot distinge două cazuri :

α) D_1 și D_2 au un singur element comun $(a_{i_0 j_0})$

β) D_1 și D_2 au cel puțin două elemente comune (eventual $D_1 \subset D_2$ sau $D_1 \supset D_2$).

În cazul α) D_1, a_{ij} și D_2 formează un ciclu. Într-adevăr, din definiția lui $a_{i^* j}$ rezultă că elementul din D_1 care îl precede este de forma $a_{i^* j'}$. Un raționament analog arată că elementul din D_2 care precede pe $a_{i j_*}$ este de forma $a_{i' j_*}$. În același timp, din $w(i) = w'(j)$ și din cele de mai sus, rezultă că dacă elementul care urmează după $a_{i_0 j_0}$ în D_1 este în linia i_0 (coloana j_0) atunci elementul care urmează după $a_{i_0 j_0}$ în D_2 este în coloana j_0 (linia i_0).

În cazul în care D_1 și D_2 au mai multe elemente în comun se pot distinge două subcazuri. Dacă porțiunea din D_1 cuprinsă între $a_{i_0 j_0}$ și ultimul element comun cu D_2 și porțiunea din D_2 cuprinsă între $a_{i_0 j_0}$ și ultimul element comun cu D_1 nu coincid, atunci mulțimea elementelor

din aceste două porţiuni conţine un ciclu, contrar ipotezei că soluţia X_0 nu conţine cicluri. Deci cele două porţiuni coincid.

Să notăm cu $a_{i_p j_p}$ ultimul element comun lui D_1 şi D_2. Din $w(i) = w'(j)$ rezultă că, dacă elementul următor lui $a_{i_p j_p}$ din D_1 se află în linia i_p (respectiv coloana j_p), atunci elementul următor lui $a_{i_p j_p}$ din D_2 se află în coloana j_p (respectiv linia i_p). Elementul care-l precede pe $a_{i_p j_p}$ în $D_1 \cap D_2$ fiind $a_{i_q j_q}$, cu $i_p = i_q$, $j_p \neq j_q$ (cazul $i_p \neq i_q$, $j_p = j_q$ putînd fi tratat analog), rezultă că $a_{i_p j_p}$ nu face parte din D_1 (respectiv D_2), contrar presupunerii.

Prin urmare, cazul al doilea este imposibil, iar în primul caz există un ciclu cu proprietăţile căutate, ceea ce demonstrează lema.

LEMA 2. *Pentru ca elementele a_{ij} şi $a_{i_0 j_0}$ să aibă aceeaşi paritate în ciclul $C(i, j)$ care le leagă este necesar şi suficient ca $u(i, j) = 1$.*

S-a văzut din lema 1 că o condiţie necesară şi suficientă de existenţă a ciclului $C(i, j)$ care să cuprindă elementele $a_{i_0 j_0}$ şi a_{ij} este ca $w(i) = w'(j)$. Dacă $w(i) = w'(j) = 0$, atunci $v(i^*, j) = v(i, j_*) = 1$, deci numărul elementelor din drumul care leagă a_{ij} de $a_{i_0 j_0}$ este par. Dacă $w(i) = w'(j) = 1$, atunci $v(i^*, j) = v(i, j_*) = 0$ şi deci numărul elementelor din drumul care leagă a_{ij} de $a_{i_0 j_0}$ este impar. Invers, dacă a_{ij} şi $a_{i_0 j_0}$ au aceeaşi paritate în ciclul unic determinat $C(i, j)$, atunci drumurile care unesc pe $a_{i_0 j_0}$ cu $a_{i^* j}$ respectiv $a_{i_0 j_0}$ cu a_{ij_*} conţin fiecare cîte un număr par de elemente din N_0, deci $v(i^*, j) = v(i, j_*) = 0$ şi deci $w(i) = w'(j) = 1$.

TEOREMA 1. *Elementele care pot fi introduse în locul lui $a_{i_0 j_0}$ în bază pentru a se obţine o soluţie admisibilă într-un anumit poliedru convex din semispaţiul $x_{i_0 j_0} \leqslant 0$, sînt cele pentru care $u(i, j) = 1$ şi numai ele.*

Într-adevăr, pentru ca un element să poată fi introdus în bază în locul lui $a_{i_0 j_0}$, trebuie să existe un ciclu care să-l conţină pe el şi să-l conţină şi pe $a_{i_0 j_0}$.

Punctul $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m; \bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_n)$ se află pe hiperplanul $x_{i_0 j_0} = 0$ definit de (8), în spaţiul vectorial $(m + n)$ - dimensional. Ne interesează acum soluţia pe care o căpătăm prin trecerea la semispaţiul opus celuia în care se găsea poliedrul P_0. Deoarece valoarea x_{ij} a elementului a_{ij} introdus în bază este $\pm x_{i_0 j_0}$, semnul $+$ corespunzînd cazului cînd x_{ij} şi $x_{i_0 j_0}$ sînt de parităţi diferite, iar semnul $-$ cazului opus, şi deoarece soluţia nouă se caută în semispaţiul $x_{i_0 j_0} \leqslant 0$, vom fi obligaţi să luăm drept x_{ij} un element de aceeaşi paritate cu $x_{i_0 j_0}$. Din lema 2 rezultă că pentru aceste elemente $w(i, j) = 1$. Invers, este evident că orice element pentru care $u(i, j) = 1$ satisface condiţia cerută.

Noua soluţie va conţine în punctul $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m; \bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_n)$ numai elemente nenegative. Dacă proprietatea aceasta se menţine şi pentru alte valori ale parametrilor, atunci acestea reprezintă mulţimea soluţiilor unui sistem de inegalităţi liniare de tipul sistemului (8), şi, fiind mărginite prin (6), formează un poliedru convex.

§ 4. DETERMINAREA NOII SOLUȚII ADMISIBILE OPTIME

LEMA 3. *Fie $C(i, j)$ ciclul care realizează trecerea de la soluția X_0 la soluția X_1 a unei probleme de transporturi, prin eliminarea din bază a elementului $a_{i_0 j_0}$ și prin introducerea în bază a elementului a_{ij}. Fie $\Gamma(i', j')$ ciclul elementului oarecare $a_{i'j'} \in M_0 \cup M_1$ față de baza M_0 a lui X_0 și $\Gamma'(i', j')$ ciclul aceluiași element față de baza M_1 a lui X_1. Atunci*

$$\Gamma'(i', j') = \Gamma(i', j') \quad \text{dacă} \quad a_{i_0 j_0} \notin \Gamma(i', j')$$

și

$$\Gamma'(i', j') = \Gamma(i', j') \cup C(i, j) - \Gamma(i', j') \cap C(i, j), \quad \text{dacă } a_{i_0 j_0} \in \Gamma(i', j').$$

Demonstrație. În primul caz relația fiind evident adevărată, trebuie examinat doar cazul cînd $a_{i_0 j_0} \in \Gamma(i', j')$. Soluția neputînd conține cicluri, dacă există un element $a_{pq} \in \Gamma(i', j') \cap C(i, j)$ atunci unul din cele două drumuri care unesc $a_{i_0 j_0}$ cu a_{pq} în $C(i, j)$ trebuie să coincidă cu unul din cele două drumuri care unesc $a_{i_0 j_0}$ cu a_{pq} în $\Gamma(i', j')$.

Să presupunem că elementele lui $C(i, j)$ sînt

$$a_{i_0 j_0}, a_{i_0 j_1}, a_{i_1 j_1}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{i_k j_k}, a_{i_k j_0};$$

iar elementele lui $\Gamma(i', j')$ sînt

$$a_{i_0 j_0}, a_{i_0 j^1}, a_{i^1 j^1}, \ldots, a_{i'j'}, \ldots, a_{i^l j^l}, a_{i^l j_0}.$$

Se pot distinge trei cazuri:

Cazul 1. Ciclul $\Gamma(i', j')$ cuprinde elementul $a_{i_0 j_0}$, dar nu cuprinde nici un alt element din $C(i, j)$.

Atunci, elementele

$$a_{i_0 j_1}, a_{i_1 j_1}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{i_k j_k}, a_{i_k j_0}, a_{i^l j_0}, a_{i^l j^l}, \ldots, a_{i'j'}, \ldots, a_{i^1 j^1}, a_{i_0 j^1}$$

vor fi toate diferite între ele și vor forma tocmai ciclul $\Gamma'(i', j')$, căci afară de $a_{i'j'}$, toate celelalte elemente fac parte din baza M_1 a elementelor soluției X_1.

Cazul 2. $\Gamma(i', j') \cap C(i, j)$ este format din elementele

$$a_{i_0 j_0}, a_{i_0 j_1} (= a_{i_0 j^1}), \ldots, a_{i_\alpha j_\beta} (= a_{i^\alpha j^\beta}).$$

Dacă $\alpha \neq \beta$, atunci elementele

$$a_{i_\alpha j_{\beta+1}}, a_{i_{\alpha+1} j_{\beta+1}}, \ldots, a_{ij}, \ldots a_{i_k j_k}, a_{i_k j_0},$$

$$a_{i^l j_0}, a_{i^l j^l}, \ldots, a_{i'j'}, \ldots a_{i^{\alpha+1} j^{\beta+1}}, a_{i^\alpha j^{\beta+1}}$$

sînt toate diferite între ele și formează ciclul $\Gamma'(i', j')$ al elementului $a_{i'j'}$.

Dacă $\alpha = \beta$, ciclul $\Gamma'(i', j')$ este format din

$$a_{i_{\alpha+1} j_\beta}, a_{i_{\alpha+1} j_{\beta+1}}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{i_k j_k}, a_{i_k j_0}, a_{i^l j_0}, a_{i^l j^l}, \ldots$$

$$\ldots, a_{i'j'}, \ldots, a_{i^{\alpha+1} j^{\beta+1}}, a_{i^{\alpha+1} j^\beta}.$$

Cazul 3. Dacă $\Gamma(i', j') \cap C(i, j)$ este format din elementele:

$a_{i_\alpha j_\beta} (= a_{i^\alpha j^\beta})$, $a_{i_{\alpha+1} j_\beta}$ $(= a_{i^{\alpha+1} j^\beta})$, ..., $a_{i_0 j_0}$, $a_{i_0 j_1} (= a_{i_0 j^1})$, ..., $a_{i_\gamma j_\delta} (= a_{i^\gamma j^\delta})$

atunci $\Gamma'(i', j')$ se poate forma ca mai sus distingînd cele patru subcazuri: $(\alpha = \beta, \gamma = \delta)$ $(\alpha = \beta, \gamma \neq \delta)$ $(\alpha \neq \beta, \gamma \neq \delta)$ şi $(\alpha \neq \beta, \gamma = \delta)$.

TEOREMA 2. *Dacă soluţia X_1 se obţine din soluţia X_0 prin introducerea în bază a elementului $a_{i_1 j_1}$ în locul lui $a_{i_0 j_0}$, atunci evaluările D^1_{ij} şi D^0_{ij} corespunzătoare soluţiilor X_1 şi X_0 satisfac relaţia*

$$D^1_{ij} = D^0_{ij} + k D^0_{i_1 j_1},$$

unde k este egal cu 0, + 1 *sau* − 1.

Într-adevăr dacă $a_{i_0 j_0} \notin \Gamma(i, j)$ din lema 3 şi din definiţia evaluărilor rezultă că $D^1_{ij} = D^0_{ij}$.

Dacă $a_{i_0 j_0} \in \Gamma(i, j)$ atunci din analiza formei lui $\Gamma(i, j)$ în cazurile din lema 3, rezultă că $D^1_{ij} = D^0_{ij} \pm D^0_{i_1 j_1}$.

Observaţie. Teorema 2 permite în particular calcularea directă la problemele obişnuite de transporturi, a evaluărilor corespunzătoare unei soluţii X_h din evaluările corespunzătoare soluţiei X_{h-1}.

TEOREMA 3 (*principală*). *Soluţia admisibilă optimă $X_1 (\neq X_0)$ pentru $(\bar\alpha_1, \bar\alpha_2, \ldots, \bar\alpha_m; \bar\beta_1, \bar\beta_2, \ldots, \bar\beta_n)$ se obţine din X_0 prin introducerea în soluţie în locul lui $a_{i_0 j_0}$ a elementului $a_{i_1 j_1}$ pentru care*

1) $u(i_1, j_1) = 1$

2) $D^0_{i_1 j_1} \leqslant D^0_{i_\alpha i_\alpha}$, *oricare ar fi indicii i_α şi j_α pentru care $u(i_\alpha, j_\alpha) = 1$.*

Demonstraţie. După cum se ştie din teorema 1, elementele care pot fi introduse în bază sînt cele pentru care $u(i_1, j_1) = 1$ şi numai ele. Astfel se obţine o soluţie admisibilă a problemei noastre.

Din teorema 2 se ştie că $D^1_{ij} = D^0_{ij} + k D^0_{i_1 j_1} (k = 0, +1$ sau $-1)$. Dar $D^0_{p_1 q} \geqslant 0$ pentru orice a_{pq}. Deci condiţia 2 din enunţ ne asigură că vom avea toţi $D^1_{ij} \geqslant 0$, adică soluţia noastră va fi optimă.

Observaţie. Evident, noua soluţie va rămîne admisibilă într-un poliedru convex din semispaţiul $x_{i_0 j_0} \leqslant 0$.

§ 5. DETERMINAREA SOLUŢIEI OPTIME ADMISIBILE ÎNTR-UN PUNCT OARECARE DIN INTERVALUL DE VARIAŢIE AL PARAMETRILOR

Fie X_0 soluţia optimă admisibilă a unei probleme de transporturi, în punctul $(\alpha^0_1, \ldots, \alpha^0_m; \beta^0_1, \ldots, \beta^0_n)$ din intervalul de variaţie al parametrilor. Se pune problema determinării soluţiei optime admisibile a problemei în punctul $(\alpha^*_1, \ldots, \alpha^*_m; \beta^*_1, \ldots, \beta^*_n)$.

Pentru aceasta transformăm datele problemei iniţiale în felul următor: m, n, a_i, b_j rămîn neschimbate, iar c_{ij} se transformă în $\bar c_{ij} = c_{ij} + \varepsilon^{(i-1)n+j}$, unde ε este un număr pozitiv oricît de mic. Acest procedeu este asemănător cu cel al lui Charnes [3] şi urmăreşte eliminarea eva-

luărilor egale, care ar putea conduce la un proces care nu se termină într-un număr finit de pași. Dacă ε are o valoare suficient de mică, stabilitatea soluțiilor problemelor de programare liniară [1] ne asigură că bazele soluțiilor problemei inițiale și a celei transformate coincid.

Introducînd valorile $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*; \beta_1^*, \ldots, \beta_n^*$ ale parametrilor în soluția X_0, putem obține valori negative pentru unele variabile. Astfel dacă $x_{i_0 j_0}^0(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*; \beta_1^*, \ldots, \beta_n^*) < 0$, atunci prin procedeul descris la teorema 3 (principală) îl eliminăm pe $a_{i_0 j_0}$ din bază. Dacă noua soluție mai ia valori negative în $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*; \beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$ repetăm procedeul de mai sus, ș.a.m.d. Numind aceste transformări ale bazei, *transformări regulate*, avem

TEOREMA 4. *Soluția optimă admisibilă X_*, corespunzătoare valorilor $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*; \beta_1^*, \ldots, \beta_n^*$ ale parametrilor, se poate obține din soluția optimă admisibilă X_0, corespunzătoare valorilor $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0; \beta_1^0, \ldots, \beta_n^0$ ale parametrilor, printr-un număr finit de transformări regulate.*

Deoarece la orice problemă de transporturi numărul bazelor diferite fără cicluri este finit, pentru demonstrarea teoremei este suficient să arătăm că o soluție X_h de bază M_h, nu poate să apară decît o singură dată într-un șir de transformări regulate.

Deoarece X_h este o soluție optimă, $D_{ij}^h \geqslant 0$ pentru orice $a_{ij} \in M_h$. Să notăm cu $\overline{D}_{ij}^h$ evaluările corespunzătoare cazului cînd costurile unitare sînt $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \varepsilon^{(i-1)n+j}$. Observăm că

$$\overline{D}_{ij}^h = D_{ij}^h + Q^h(\varepsilon),$$

unde $Q^h(\varepsilon)$ este un polinom de variabila ε. Din definiția evaluărilor este evident că $Q^h(\varepsilon)$ nu poate fi identic nul. Prin urmare $\overline{D}_{ij}^h > 0$. Notînd cu $a_{i_h j_h}$ elementul care se elimină din M_h pentru a se obține M_{h+1}, avem

$$E(X_{h+1}) = E(X_h) + \overline{D}_{i_h j_h}^h \left| x_{i_h j_h} \right| > E(X_h).$$

Prin urmare costul total al transportului crește la fiecare transformare. Din această cauză din $M_h = M_k$ rezultă că $h = k$, ceea ce demonstrează teorema.

Observație. Introducerea costurilor $\bar{c}_{ij}$ în locul costurilor c_{ij} este necesară numai dacă în șirul de transformări regulate se ajunge la o soluție care cuprinde elemente de evaluare nulă.

§ 6. EXEMPLE

1. Să considerăm problema de transporturi cu datele

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 61 & 49 & 83 & 35 \\ 23 & 39 & 78 & 28 & 65 & 42 \\ 67 & 56 & 92 & 24 & 53 & 54 \\ 71 & 43 & 91 & 67 & 40 & 49 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = 18,\ a_2 = 32,\ a_3 = 14,\ a_4 = 9;$$
$$b_1 = 9,\ b_2 = 11,\ b_3 = 28,\ b_4 = 6,\ b_5 = 14,\ b_6 = 5;$$

și în care producția centrului i este $a_i + \alpha_i$, iar consumul centrului j este $b_j + \beta_j$, parametrii α_i și β_j satisfăcînd condițiile (4) și (5).

Soluția optimă admisibilă X_0 a acestei probleme pentru toți $\alpha_i = 0$ și $\beta_j = 0$ este

X_0

		$18 + \alpha_1^0$				$18 + \alpha_1^0$
$9 + \beta_1^0$	$11 + \beta_2^0$	$10 + \beta_3^0 - \alpha_1^0$			$2 + \beta_4^0 + \beta_5^0 + \beta_6^0 - \alpha_3^0 - \alpha_4^0$	$32 + \alpha_2^0$
			$6 + \beta_4^0$	$5 + \beta_5^0 - \alpha_4^0$	$3 + \alpha_3^0 + \alpha_4^0 - \beta_4^0 - \beta_5^0$	$14 + \alpha_3^0$
				$9 + \alpha_4^0$		$9 + \alpha_4^0$
$9 + \beta_1^0$	$11 + \beta_2^0$	$28 + \beta_3^0$	$6 + \beta_4^0$	$14 + \beta_5^0$	$5 + \beta_6^0$	

Evaluările D_{ij}^0 corespunzătoare acestei soluții sînt:

(D_{ij}^0) u_i^0

6	5	**61**	54	59	10	−17
23	**39**	**78**	16	24	**42**	0
32	5	2	**24**	**53**	**54**	12
49	5	14	56	**40**	8	− 1
v_j^0 23	39	78	12	41	42	

Poliedrul în care soluția X_0 rămîne admisibilă este definit de inegalitățile

$$10 + \beta_3 - \alpha_1 \geqslant 0$$
$$2 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 - \alpha_3 - \alpha_4 \geqslant 0$$
$$5 + \beta_5 - \alpha_4 \geqslant 0$$
$$3 + \alpha_3 + \alpha_4 - \beta_4 - \beta_5 \geqslant 0$$

Să aflăm acum soluția optimă admisibilă X_1 (diferită de X_0), într-un punct care aparține poliedrului în care soluția X_0 este admisibilă și hiperplanului $10 + \beta_3 - \alpha_1 = 0$. Pentru aceasta trebuie să eliminăm elementul a_{23} al soluției. Conform procedeului indicat la § 3, vom atribui următoarele valori elementelor din baza soluției X_0 :

a) $v(2,3) = 1$

b) $v(3,6) = 1,\ v(2,\ 6) = v(3,5) = 0$

c) $v(1,3) = v(2,1) = v(2,2) = 0$

d) $v(3,4) = 0,\ v(4,5) = 1.$

Liniilor și coloanelor lui X_0 le vom atribui valorile :

$$w(1) = 1,\ w(2) = w(3) = w(4) = 0$$

$$w'(1) = w'(2) = w'(4) = w'(5) = w'(6) = 1, \qquad w'(3) = 0.$$

Elementele care îndeplinesc condiția $u(i,\ j) = 1$ sînt : a_{11}, a_{12}, a_{14}, a_{15} și a_{16}. Pentru toate celelalte elemente avem $u(i,\ j) = 0$.

Dintre elementele de mai sus, cea mai mică evaluare aparține lui a_{12}, și anume $D^0_{12} = 5$. Noua soluție va fi deci :

X_1

	$-10-\beta_3+\alpha_1$	$28+\beta_3$				$18+\alpha_1$
$9+\beta_1$	$21+\beta_2+\beta_3-\alpha_1$				$2+\beta_4+\beta_5+$ $+\beta_6-\alpha_3-\alpha_4$	$32+\alpha_2$
			$6+\beta_4$	$5+\beta_5-\alpha_4$	$3+\alpha_3+\alpha_4-$ $-\beta_4-\beta_5$	$14+\alpha_3$
				$9+\alpha_4$		$9+\alpha_4$
$9+\beta_1$	$11+\beta_2$	$28+\beta_3$	$6+\beta_4$	$14+\beta_5$	$5+\beta_6$	

Să verificăm optimalitatea soluţiei :

	(D_{ij}^1)						u_i^1
	1	**27**	**61**	49	54	5	−12
	23	**39**	5	16	24	**42**	0
	32	5	7	**24**	**53**	**54**	12
	49	5	19	56	**40**	8	− 1
v_j^1	23	39	73	12	41	42	

Întrucît toţi $D_{ij}^1 \geqslant 0$, soluţia X_1 este optimă. Ea este admisibilă în poliedrul definit prin inegalităţile

$$\begin{aligned} -10 - \beta_3 + \alpha_1 &\geqslant 0 \\ 21 + \beta_2 + \beta_3 - \alpha_1 &\geqslant 0 \\ 2 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 - \alpha_3 - \alpha_4 &\geqslant 0 \\ 5 + \beta_5 - \alpha_4 &\geqslant 0 \\ 3 + \alpha_3 + \alpha_4 - \beta_4 - \beta_5 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

2. În cazul cînd anumiţi a_i sau b_j sînt nuli, îi vom considera egal cu cantităţi ε oricît de mici.

Să presupunem de exemplu că avem de rezolvat problema cu datele de mai sus, în care însă $b_1 = 0$ şi $a_2 = 23$. Rezolvăm problema ca în cazul 1, punînd însă $b_1 = \varepsilon$ şi $a_2 = 23 + \varepsilon$ unde ε este un număr oricît de mic. Pentru toţi $\alpha_i = 0$ şi $\beta_j = 0$ obţinem aceeaşi soluţie optimă X_0 ca la problema 1, cu deosebirea că $x_{21}^0 = \varepsilon + \beta_1^0$. Trecerea la soluţia nouă X_1 se face în acelaşi mod ca la 1.

3. Să găsim soluţia optimă admisibilă a problemei de la pct. 1, pentru următoarele valori ale parametrilor : $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = -10$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 7$, $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = -6$, $\beta_4 = 0$, $\beta_5 = 0$, $\beta_6 = 4$, care satisfac condiţia $\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = 3$. Introducînd aceste valori ale parametrilor în soluţia X_0, obţinem

			$\overline{X^0}$				
		24				24
14	11	−2			−1	22
			6	−2	10	14
				16		16
14	11	22	6	14	9	

Soluția X_0 nu este admisibilă, ea avînd trei elemente negative: a_{23}, a_{26} și a_{35}. Înlocuim pe rînd aceste elemente conform aceluiași procedeu ca la pct. 1.

Eliminînd mai întîi elementul a_{23}, obținem soluția (cf. punctului 1):

$\overline{X}_1$

	2	22				24
14	9				−1	22
			6	−2	10	14
				16		16
14	11	22	6	14	9	

Pentru înlocuirea lui a_{35} atribuim elementelor lui $\overline{X}_1$ următoarele valori:

a) $v(3,5) = 1$

b) $v(3,6) = 0$, $v(2,6) = 1$, $v(2,2) = 0$, $v(1,2) = 1$

c) $v(3,4) = v(4,5) = 0$

d) $v(1,3) = 0$, $v(2,1) = 0$.

Valorile atribuite liniilor și coloanelor lui $\overline{X}_1$ vor fi:

$w(1) = 0$, $w(2) = 0$, $w(3) = 0$, $w(4) = 1$

$w'(1) = 1$, $w'(2) = 1$, $w'(3) = 1$, $w'(4) = 1$, $w'(5) = 0$, $w'(6) = 1$.

Elementele pentru care $u(i, j) = 1$ sînt: a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} și a_{46}. Dintre aceste elemente, cel cu evaluarea cea mai mică, conform matricei (D^1_{ij}) de la pct. 1, este a_{42} ($D^1_{42} = 5$). Noua soluție va fi deci

$\overline{X}_2$

	2	22				24
14	7				1	22
			6		8	14
	2			14		16
14	11	22	6	14	9	

Să verificăm optimalitatea acestei soluţii

	(D_{ij}^2)						u_i^2
	1	**27**	**61**	49	59	5	−12
	23	**39**	5	16	29	**42**	0
	32	5	7	**24**	5	**54**	12
	44	**43**	14	51	**40**	3	4
v_j^2	23	39	73	12	36	42	

$\overline{X}_2$ este deci soluţia optimă admisibilă căutată.

О ПРОБЛЕМЕ ПЕРЕВОЗОК
II. ЗАДАЧИ ПЕРЕВОЗОК С ПАРАМЕТРАМИ

РЕЗЮМЕ

Под задачей о перевозках с параметрами понимается задача об определении значений x_{ij}, для которых выражение (1) достигает минимума и которые удовлетворяют соотношениям (2) и (3), где a_i, b_j и c_{ij} — заданные числа, а α_i и β_j — параметры, на которые наложены условия (4), (5) и (6).

В работе приводится прямой метод определения оптимального решения, соответствующего некоторым значениям параметров из оптимального решения, соответствующего другим значениям параметров.

Приведенный метод позволяет непосредственно переходить от оптимального плана перевозок, действительного для некоторого периода, к оптимальному плану, действительному для другого периода; таким образом, нет необходимости разрабатывать каждый раз новый план при помощи обычных методов.

ON THE TRANSPORTATION PROBLEM
II. PARAMETRIC TRANSPORTATION PROBLEMS

ABSTRACT

By a parametric transportation problem we mean the problem of determining those x_{ij} for which expression (1) attains its minimum and which satisfy relations (2) and (3), a_i, b_j and c_{ij} being fixed numbers, and α_i and β_j being parameters subject to conditions (4), (5) and (6).

In the article a direct procedure is given for obtaining an optimal solution corresponding to certain values of the parameters, from the optimal solution corresponding to some other values of the parameters.

The method described enables us to pass directly from a transportation plan, optimal for a certain period, to a transportation plan, optimal for another period, eliminating thus the necessity of newly constructing each time a plan with the usual procedure.

BIBLIOGRAFIE

1. ABRHAM J., *Über die Stabilität von Lösungen im Transportproblem der linearen Programmierung.* Czehosl. Math. Journ., **8** (**83**), 131—138 (1958).
2. BALAȘ E., HAMMER L. P. (IVĂNESCU P.), *În legătură cu problema transporturilor*, I. *Probleme de transporturi cu centre legate.* Studii și cercetări matematice, **XI**, *2*, 439—450 (1960).
3. CHARNES A., W. W. COOPER, A. HENDERSON, *An Introduction to Linear Programming.* John Wiley, New York, 1953.
4. DANTZIG G. B., *Application of the Simplex Method to a Transportation Problem*, în *Activity Analysis of Production and Allocation*, cap. XXIII. John Wiley, New York, 1951, 359—373.
5. GASS S. I., *Linear Programming.* Mc Graw — Hill, New York, 1958.
6. KREKÓ B., *A szállitási problémáról.* Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Évkönyve, Budapest, 1959.

ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA TRANSPORTURILOR
III. PROBLEMA TRANSPORTURILOR CU CENTRE VARIABILE

DE

E. BALAŞ şi P. IVĂNESCU

§ 1. ENUNŢAREA PROBLEMEI

1. În lucrarea [2] s-a dat o metodă de rezolvare a problemelor de transporturi cu parametri, în care se caută minimul unei expresii de forma

$$E = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

necunoscutele x_{ij} fiind supuse condiţiilor

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i + \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j + \beta_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

$$x_{ij} \geqslant 0. \tag{3}$$

Metoda dată în [2] permite trecerea de la planul optim de transport valabil pentru o anumită perioadă, la planul optim valabil pentru o altă perioadă, eliminînd necesitatea elaborării planului pentru fiecare perioadă cu procedeele matematice obişnuite. Această metodă este însă aplicabilă numai în cazurile cînd cele m centre producătoare şi cele n centre consumatoare rămîn neschimbate de la o perioadă la alta şi numai cantităţile produse, respectiv consumate, variază cu α_i, respectiv β_j.

În practică se întîlnesc însă foarte des cazuri cînd alături de centrele care produc sau consumă în mod regulat un anumit produs, apar în anumite perioade şi centre noi de producţie sau consum. Se pune deci problema găsirii unei metode prin care şi în asemenea cazuri planul optim pentru perioada cînd apar centrele noi să poată fi obţinut din planul optim valabil pentru o perioadă precedentă.

În ceea ce privește cazul invers, cînd o parte din cele m centre producătoare sau cele n centre consumatoare, care figurează în planul optim valabil pentru o anumită perioadă, dispare într-o altă perioadă, acesta se reduce la problema de transporturi cu parametri rezolvată în [2], în care o parte din parametrii α_i sau β_j iau valori pentru care termenii liberi ai ecuațiilor respective se anulează ($\alpha_i = -a_i$, $\beta_j = -b_j$). Un aspect al acestei probleme a fost studiat în [1].

2. Problema noastră poate fi formulată astfel: Fie $X_0 = (x_{ij}^0)$ o soluție optimă admisibilă [2] nedegenerată a problemei de transporturi definite prin

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \min \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, m\,;\, j = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

unde $c_{ij} \geqslant 0$, $a_i \geqslant 0$ și $b_j \geqslant 0$ sînt numere fixe și $\sum_i a_i = \sum_j b_j$.

Să se determine necunoscutele $\bar{x}_{ij}$ pentru care expresia

$$\sum_{i=1}^{m+p} \sum_{j=1}^{n+q} c_{ij} \bar{x}_{ij} \tag{7}$$

își atinge minimul și care satisfac relațiile

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+q} \bar{x}_{ij} &= a_i + \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, m + p) \\ \sum_{i=1}^{m+p} \bar{x}_{ij} &= b_j + \beta_j \qquad (j = 1, \ldots, n + q) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

astfel încît din $x_{ij}^0 \in M_0$ să rezulte $\bar{x}_{ij} \in \bar{M}$, M_0 și $\bar{M}$ fiind bazele soluțiilor X_0 și $\bar{X}$ [2].

Aici

$$\begin{aligned} a_i &= 0 \text{ pentru } i > m \\ b_j &= 0 \text{ pentru } j > n \end{aligned} \tag{9}$$

iar α_i și β_j sînt parametri care satisfac relațiile

$$\begin{aligned} a_i + \alpha_i &\geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, m + p) \\ b_j + \beta_j &\geqslant 0 \qquad (j = 1, \ldots, n + q) \end{aligned} \tag{10}$$

și

$$\sum_{i=1}^{m+p} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n+q} \beta_j. \tag{11}$$

O dată determinată această soluție optimă, dar nu neapărat admisibilă pentru valorile date ale parametrilor, se trece pe baza metodei din [2] la soluția optimă admisibilă pentru aceste valori ale parametrilor.

§ 2. METODA DE REZOLVARE

1. Să considerăm mai întîi cazul cînd $q = 0$. Condițiile (8) devin acum

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} = a_i + \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, m+p) \\ &\sum_{i=1}^{m+p} \bar{x}_{ij} = b_j + \beta_j \quad (j = 1, \ldots, q). \end{aligned} \tag{8'}$$

Să notăm cu D_{ij}^0 evaluările corespunzătoare soluției X_0. Se știe [3] că există numere u_i^0, v_j^0 $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ pentru care $D_{ij}^0 = c_{ij} - u_i^0 - v_j^0$. Fie a_{m+k, j_i} celula din linia $m + k$ pentru care

$$c_{m+k, j_i} - v_{j_i}^0 = \min_j (c_{m+k, j} - v_j^0).$$

Dacă există mai multe celule în aceeași linie care realizează minimul, se ia drept a_{m+k, j_i} una oarecare din ele. Fie M' mulțimea celulelor a_{m+k, j_i} $(k = 1, \ldots, p)$. Atunci are loc

TEOREMA. *Există o soluție* $\bar{X} = (\bar{x}_{ij})$ *a sistemului* (8′) *pentru care expresia* (7) *își atinge minimul și pentru care* $\bar{M} = M_0 \cup M'$. *Există valori ale parametrilor pentru care această soluție este admisibilă.*

Demonstrație

a) Există o soluție a sistemului (8′) care are baza $\bar{M}$. Într-adevăr, pentru valori fixe ale parametrilor, sistemul (8′) devine un sistem de ecuații restrictive ale unei probleme obișnuite de transporturi cu $m + p$ producători și n consumatori. Se știe ([3], p. 139) că un astfel de sistem este totdeauna compatibil și că el conține $m + p + n - 1$ ecuații independente. Dacă în sistemul (8′) considerăm $\bar{x}_{ij} = 0$, pentru $a_{ij} \notin M_0 \cup M'$ obținem un sistem compatibil de $m + p + n - 1$ ecuații liniare independente cu $m + p + n - 1$ necunoscute, care are o soluție unică.

b) Această soluție este optimă. Într-adevăr dacă punem $\bar{v}_j = v_j^0$ $(j = 1, \ldots, n)$, atunci avem și $\bar{u}_i = u_i^0$ $(i = 1, \ldots, m)$ și $\bar{D}_{ij} = D_{ij}^0 \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$, iar $\bar{u}_{m+k} = c_{m+k, j_i} - v_{j_i}^0$, și $\bar{D}_{m+k, j} = c_{m+k, j} - v_j^0 - (c_{m+k, j_i} - v_{j_i}^0) \geqslant 0$ $(k = 1, \ldots, p; j = 1, \ldots, n)$. Prin urmare $\bar{D}_{ij} \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m+p; j = 1, \ldots, n)$, adică soluția $\bar{X}$ este optimă.

c) Soluția $\bar{X}$ este admisibilă pentru anumite valori ale parametrilor (de exemplu pentru $\alpha_i = \beta_j = 0$).

2. Pentru a rezolva problema noastră inițială, definită prin (7) şi (8), se află mai întîi cu ajutorul teoremei precedente o soluție $\overline{X}$, care realizează minimul expresiei (7), satisfăcînd relațiile (8′). Se renunță apoi la condiția $q = 0$ şi cu ajutorul aceleiaşi teoreme se află o soluție $\overline{X}_0$ care realizează minimul expresiei (7) şi satisface relațiile (8).

3. $\overline{X}_0$ este o soluție optimă dar nu neapărat admisibilă a problemei definită prin (7) şi (8). Trecerea la o soluție optimă admisibilă se realizează cu ajutorul metodei din [2].

4. Aplicarea combinată a metodei date în lucrarea de față cu cea din [2] face posibilă trecerea de la planul optim de transport al unui produs valabil pentru o anumită perioadă, la planul optim valabil pentru o altă perioadă, cînd apar şi centre noi de producție sau de consum. Aceste metode au fost aplicate cu rezultate bune la planificarea transportului traverselor de fag, planul optim fiind obținut cu un volum de calcule de cîteva ori mai mic decît în cazul folosirii procedeelor matematice obişnuite.

§ 3. EXEMPLU

1. Să considerăm problema de transporturi cu 4 centre de producție (P_1, P_2, P_3, P_4) şi cinci centre de consum (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5), ale cărei date sînt:

$$(c_{ij}) = \begin{array}{|ccccc|} \hline 50 & 98 & 76 & 27 & 42 \\ 57 & 80 & 93 & 38 & 54 \\ 69 & 68 & 107 & 82 & 71 \\ 64 & 55 & 106 & 86 & 58 \\ \hline \end{array}$$

$a_1 = 24$, $a_2 = 43$, $a_3 = 19$, $a_4 = 12$

$b_1 = 9$, $b_2 = 21$, $b_3 = 39$, $b_4 = 14$, $b_5 = 15$

şi a cărei soluție optimă (unică) este

			X_0			a_i
			24			24
	9		15	8	11	43
	10	9				19
		12				12
b_i	19	21	39	8	11	98

Evaluările corespunzătoare acestei soluții sînt

	D_{ij}^0					u_i^0
	10	59	0	6	5	−17
	0	24	0	0	0	0
	0	0	2	32	5	12
	8	0	14	49	5	−1
v_j^0	57	56	93	38	54	

Să se afle soluția optimă admisibilă a problemei de transporturi, în care pe lîngă centrele arătate, mai apar centrul de producție P_5 și centrele de consum C_6 și C_7, și dispare centrul de producție P_4, distanțele aferente noilor centre fiind

$$c_{51} = 78,\ c_{52} = 82,\ c_{53} = 95,\ c_{54} = 70,\ c_{55} = 48,\ c_{56} = 37,\ c_{57} = 62;$$
$$c_{16} = 56,\ c_{26} = 34,\ c_{36} = 42,\ c_{46} = 61;$$
$$c_{17} = 80,\ c_{27} = 92,\ c_{37} = 76,\ c_{47} = 53;$$

iar noile cantități produse, respectiv consumate, fiind

$$a_1 + \alpha_1 = 37,\ a_2 + \alpha_2 = 48,\ a_3 + \alpha_3 = 17,\ a_4 + \alpha_4 = 0,\ a_5 + \alpha_5 = 29;$$
$$b_1 + \beta_1 = 9,\ b_2 + \beta_2 = 23,\ b_3 + \beta_3 = 35,\ b_4 + \beta_4 = 19,\ b_5 + \beta_5 = 16,$$
$$b_6 + \beta_6 = 12,\ b_7 + \beta_7 = 17.$$

2. Rezolvăm problema cu metoda din § 2.

a) Presupunem mai întîi că centrele de producție rămîn neschimbate și apar doar cele 2 centre de consum noi (C_6 și C_7). Vom avea:

$$\min_{i=1,\ldots,4} (c_{i6} - u_i^0) = c_{36} - u_3^0 = 42 - 12 = 30;$$
$$\min_{i=1,\ldots,4} (c_{i7} - u_i^0) = c_{47} - u_4^0 = 53 + 1 = 54.$$

Pentru a avea $\sum_i a_i = \sum_j b_j$, punem deocamdată $a_4 = 29$. Avem soluția optimă (dar nu și admisibilă)

	$\bar{X}$							$a_i + \alpha_i$
			37					37
	15		−2	19	16			48
	−6	11				12		17
		12					17	29
$b_j + \beta_j$	9	23	35	19	16	12	17	131

b) Introducem acum centrul de producție P_5. Din soluția de mai sus obținem : $\bar{v}_6 = c_{36} - \bar{u}_3 = 30$; $\bar{v}_7 = c_{47} - \bar{u}_4 = 54$. Avem

$$\min_{j=1,\ldots,7} (c_{5j} - \bar{v}_j) = c_{55} - \bar{v}_5 = 48 - 54 = -6.$$

Prin urmare noua soluție optimă (dar nu admisibilă) este

				$\bar{X}_0$				$a_i + \alpha_i$
			37					37
	44		−2	19	−13			48
	−35	40				12		17
		−17					17	0
					29			29
$b_j + \beta_j$	9	23	35	19	16	12	17	131

Trecerea de la această soluție optimă la soluția optimă admisibilă se face pe baza metodei din [2].

О ПРОБЛЕМЕ ПЕРЕВОЗОК

III. ЗАДАЧИ ПЕРЕВОЗОК С ПЕРЕМЕННЫМИ ЦЕНТРАМИ

РЕЗЮМЕ

При планировании перевозок часто встречаются случаи, когда помимо центров, которые регулярно производят или потребляют определенное изделие, появляются в определенные периоды новые производительные или потребительные центры.

Дается метод получения оптимального плана, действительного в период, когда появляются новые центры, из оптимального плана, действительного в предыдущий период, используя результаты, полученные в работе [2].

ON THE TRANSPORTATION PROBLEM

III. TRANSPORTATION PROBLEMS WITH VARIABLE CENTERS

ABSTRACT

In the practice of transportation planning it often happens that, besides the centers regularly producing or consuming a certain product, new production or consumption centers appear in some periods. A proce-

dure is given in the article for obtaining the optimal transportation plan corresponding to the period when the new centers appear, from the optimal plan corresponding to some previous time period, by using the results of [2].

BIBLIOGRAFIE

1. ABRHAM J., *Über die Stabilität von Lösungen im Transportproblem der Linearen Programmierung.* Czehosl. Mat. Journ., **8 (83)**, *1*, 131–138 (1958).
2. BALAȘ E., IVĂNESCU P., *În legătură cu problema transporturilor. II. Probleme de transporturi cu parametri.* Studii și cercetări matematice (acest volum).
3. GASS S. I., *Linear Programming.* Mc Graw-Hill, New York, 1958.

O AXIOMATICĂ A ALGEBREI OMOLOGICE RELATIVE A GRUPURILOR DISCRETE

DE

VALERIU ŞT. UDRESCU

Dăm, pentru grupurile discrete, o expunere axiomatică a algebrelor omologice relative Hochschild [5] şi Takasu [6], analogă axiomaticii Eilenberg [2]. Numai pentru acestea, deoarece restul teoriilor de coomologie relativă propuse, teoriile Adamson [1] şi Higman [4], nu diferă de teoria de coomologie relativă a lui Hochschild, după cum a arătat Hochschild [5] (a se vedea şi [3]) pentru Adamson, şi după cum rezultă dintr-o observaţie şi din teorema 1 a lui Higman [4], pentru Higman, a cărui teorie, deşi nu formulată pentru grupurile discrete, poate fi, potrivit procedeului clasic, reformulată şi pentru acestea.

§ 1. PRELIMINARII

Fie (Π, π) o pereche [6], fie $Z(\Pi)$ inelul grupal al grupului Π pe inelul întregilor Z, fie $\mathfrak{M}_{(Z(\Pi))}$, respectiv ${}_{(Z(\Pi))}\mathfrak{M}$, categoria $Z(\Pi)$ - modulelor la dreapta (scurt: Π - modulelor la dreapta), respectiv la stînga, fie $\mathfrak{A}$ categoria Z - modulelor. Noţiunile de $(Z(\Pi), Z(\pi))$ - exact, - proiectiv, - injectiv, respectiv noţiunea de omomorfism admisibil, sînt cele definite în [5], respectiv cea definită în [6]. Functorii $I_{(\Pi,\pi)}$ şi $J_{(\Pi,\pi)}$ sînt cei definiţi în [6]. În teoria Hochschild, Z este Π - modul pentru augmentarea unitară $Z(\Pi) \to Z$, iar în teoria Takasu, pentru operarea trivială a lui Π pe Z. Orice omomorfism $\Pi' \to \Pi$ induce, pe orice Π - modul, o structură de Π' - modul [6].

§ 2. ALGEBRA OMOLOGICĂ RELATIVĂ HOCHSCHILD

2.1. AXIOME

2.1.1. DEFINIȚIE. *Sistemul* $\{H_q(\Pi, \pi; G), f_{\cdot q}, \partial_q\}$, *în care*:
1. $(G, q) \to H_q(\Pi, \pi; G) : \mathfrak{M}_{(Z(\Pi))} \times Z \to \mathfrak{A}$;
2. *dacă* $f : G \to G'$ *este un* Π*-omomorfism, atunci, pentru orice* q, Z*-omomorfismul* $f_{\cdot q}$ *este astfel definit ca*:

$$f_{\cdot q} : H_q(\Pi, \pi; G) \to H_q(\Pi, \pi; G');$$

3. *dacă șirul de* Π*-module* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *este* $(Z(\Pi), Z(\pi))$*-exact, atunci, pentru orice* q, Z*-omomorfismul* ∂_q *este astfel definit ca*:

$$\partial_q : H_q(\Pi, \pi; G'') \to H_{q-1}(\Pi, \pi; G'),$$

este o teorie Hochschild de omologie relativă pentru perechea (Π, π) *pe* G, *dacă următoarele axiome sînt îndeplinite*:

HR 1. $(\mathrm{id.})_{\cdot q} = \mathrm{id.}$;
HR 2. $(g \circ f)_{\cdot q} = g_{\cdot q} \circ f_{\cdot q}$;
HR 3. *dacă diagrama*:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & G' & \to & G & \to & G'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & H' & \to & H & \to & H'' & \to & 0 \end{array}$$

este comutativă și $(Z(\Pi), Z(\pi))$*-exactă, atunci diagrama*:

$$\begin{array}{ccc} H_q(\Pi, \pi; G'') & \to & H_{q-1}(\Pi, \pi; G') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(\Pi, \pi; H'') & \to & H_{q-1}(\Pi, \pi; H') \end{array}$$

este comutativă:

*HR*4. *dacă șirul de* Π*-module* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *este* $(Z(\Pi), Z(\pi))$*-exact, atunci șirul*:
$\ldots \to H_{q+1}(\Pi, \pi, ; G'') \to H_q(\Pi, \pi; G') \to H_q(\Pi, \pi; G) \to H_q(\Pi, \pi; G'') \to H_{q-1}(\Pi, \pi, G') \to \ldots$
este exact;

*HR*5. $H_q(\Pi, \pi; G) = 0$ *pentru* $q < 0$ & $H_0(\Pi, \pi; G) = G \otimes_{(Z(\Pi))} Z$;

*HR*6. $H_q(\Pi, \pi; G) = 0$ *pentru* $q > 0$ *dacă* G *este* $(Z(\Pi), Z(\pi))$ — *proiectiv.*

2.1.2. Grupul abelian $H_q(\Pi, \pi; G)$ este numit grupul Hochschild de omologie relativă de dimensiune q al perechii (Π, π) pe grupul de coeficienți G, iar ∂_q frontiera relativizată Hochschild q-dimensională.

2.1.3. DEFINIȚIE. *Sistemul* $\{H^q(\Pi, \pi; G), f^q_{\cdot}, \delta^q\}$, *în care*:
1. $(G, q) \to H^q(\Pi, \pi; G) : {}_{(Z(\Pi))}\mathfrak{M} \times Z \to \mathfrak{A}$;
2. *dacă* $f : G \to G'$ *este un* Π*-omomorfism, atunci, pentru orice* q, Z*-omomorfismul* $f^q_{\cdot}$ *este astfel definit ca*:

$$f^q_{\cdot} : H^q(\Pi, \pi; G) \to H^q(\Pi, \pi; G');$$

3. *dacă șirul de* Π *- module* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *este* $(Z(\Pi), Z(\pi))$ *- exact, atunci, pentru orice* q, Z *- omomorfismul* δ^q *este astfel definit ca :*

$$\delta^q : H^q(\Pi, \pi; G'') \to H^{q+1}(\Pi, \pi; G'),$$

este o teorie Hochschild de coomologie relativă pentru perechea (Π, π) *pe* G, *dacă următoarele axiome sînt satisfăcute :*

*CHR*1. $(\mathrm{id.})^q_\cdot = \mathrm{id.}$;

*CHR*2. $(g \circ f)^q_\cdot = g^q_\cdot \circ f^q_\cdot$;

*CHR*3. *dacă diagrama :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & G' & \to & G & \to & G'' \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & H' & \to & H & \to & H'' \to 0 \end{array}$$

este comutativă și $(Z(\Pi), Z(\pi))$ *- exactă, atunci diagrama :*

$$\begin{array}{ccc} H^q(\Pi, \pi; G'') & \to & H^{q+1}(\Pi, \pi; G') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(\Pi, \pi; H'') & \to & H^{q+1}(\Pi, \pi; H') \end{array}$$

este comutativă ;

*CHR*4. *dacă șirul de* Π *- module* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *este* $(Z(\Pi), Z(\pi))$ *- exact, atunci șirul :*

$$\ldots \to H^{q-1}(\Pi, \pi; G'') \to H^q(\Pi, \pi; G') \to H^q(\Pi, \pi; G) \to H^q(\Pi, \pi; G'') \to$$
$$\to H^{q+1}(\Pi, \pi; G') \to \ldots$$

este exact ;

*CHR*5. $H^q(\Pi, \pi; G) = 0$ *pentru* $q < 0$ & $H^0(\Pi, \pi; G) = \mathrm{Om}_{Z(\Pi)}(Z, G)$;

*CHR*6. $H^q(\Pi, \pi; G) = 0$ *pentru* $q > 0$ *dacă* G *este* $(Z(\Pi), Z(\pi))$ *- injectiv.*

2.1.4. Grupul abelian $H_q(\Pi, \pi; G)$ este numit grupul Hochschild de coomologie relativă de dimensiune q al perechii (Π, π) pe grupul de coeficienți G, iar δ^q cofrontiera relativizată Hochschild q - dimensională.

2.2. UNICITATE

2.2.1. TEOREMĂ. *Dacă* $\{H_q(\Pi, \pi; G), f_{\cdot q}, \partial_q\}$, *respectiv* $\{H'_q(\Pi', \pi'; G), f'_{\cdot q}, \partial'_q\}$, *este o teorie Hochschild de omologie relativă pentru perechea* (Π, π) *pe* G, *respectiv pentru perechea* (Π', π') *pe* G *și dacă omomorfismul admisibil* $\varphi : (\Pi', \pi') \to (\Pi, \pi)$ *este dat, atunci există numai o familie de* Z *- omomorfisme* $\varphi_{\cdot q} : H'_q(\Pi', \pi'; G) \to H_q(\Pi, \pi; G)$, *definite pentru orice* Π *- modul* G *și astfel ca :*

1. *dacă* $G \to H$ *este un* Π *- omomorfism, atunci diagrama :*

$$\begin{array}{ccc} H'_q(\Pi', \pi'; G) & \to & H'_q(\Pi', \pi'; H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(\Pi, \pi; G) & \to & H_q(\Pi, \pi; H) \end{array}$$

este comutativă ;

2. *dacă șirul de* Π - *module* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *este* $(Z(\Pi), Z(\pi))$ - *exact, atunci diagrama* :

$$\begin{array}{ccc} H'_q(\Pi', \pi'; G'') & \to & H'_{q-1}(\Pi', \pi'; G') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(\Pi, \pi; G'') & \to & H_{q-1}(\Pi, \pi; G') \end{array}$$

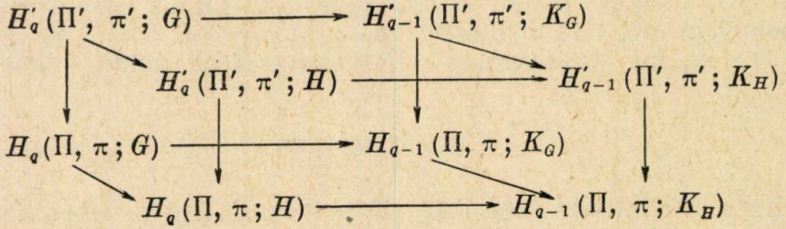
este comutativă;

3. Z - *omomorfismul* φ_{*0} *coincide cu* Z - *omomorfismul* $G \otimes_{Z(\Pi')} Z \to G \otimes_{Z(\Pi)} Z$ *indus de* φ.

Demonstrație. Z - omomorfismul φ_{*0} se definește prin proprietatea 3. Fie φ_* definit pentru toate dimensiunile $< q$ (>0). Șirul de Π - module $0 \to K_G \to Z(\Pi) \otimes_{Z(\pi)} G \to G \to 0$ este $(Z(\Pi), Z(\pi))$ - exact [5] iar $Z(\Pi) \otimes_{Z(\pi)} G$ este $(Z(\Pi), Z(\pi))$ - proiectiv ([5], lema 2). Z - omomorfismul φ_{*q} se definește (unic) prin comutativitatea diagramei :

$$\begin{array}{ccccc} H'_q(\Pi', \pi'; G) & \to & H'_{q-1}(\Pi', \pi'; K_G) & \to & H'_{q-1}(\Pi', \pi'; Z(\Pi) \otimes_{Z(\pi)} G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to H_q(\Pi, \pi; G) & \to & H_{q-1}(\Pi, \pi; K_G) & \to & H_{q-1}(\Pi, \pi; Z(\Pi) \otimes_{Z(\pi)} G) \end{array}$$

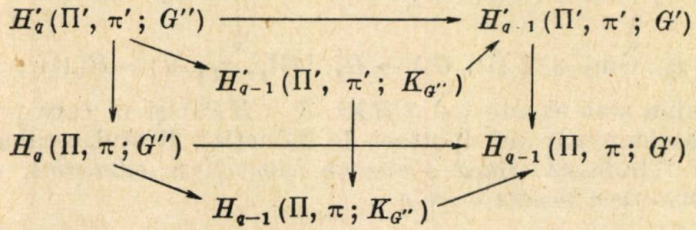
în care liniile sînt exacte (cf. *HR*4 & *HR*6) și în care pătratul din dreapta este comutativ (cf. ipotezei de inducție). Diagrama :



comutativă pe fața din primul plan ca și pe aceea din ultimul plan, prin construcția lui φ_{*q}, pe fața superioară ca și pe cea inferioară, prin axioma *HR*3, pe fața laterală dreaptă, prin ipoteza de inducție, asigură proprietatea 1, fiindcă $H_q(\Pi, \pi; H) \to H_{q-1}(\Pi, \pi; K_H)$ rezultă biunivoc (cf. *HR*4 & *HR*6). Acum, diagrama comutativă și $(Z(\Pi), Z(\pi))$ - exactă :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & K_{G''} & \to & Z(\Pi) \otimes_{Z(\pi)} G'' & \to & G'' \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \to & G' & \to & G & \to & G'' \to 0 \end{array}$$

induce diagrama :



comutativă pe fața laterală stîngă, prin construcția lui $\varphi_{\cdot q}$, pe fața superioară ca și pe cea inferioară, prin axioma $HR3$, pe fața laterală dreaptă, prin proprietatea 1 acum demonstrată. Și astfel, proprietatea 2.

2.2.2. TEOREMĂ. *Dacă* φ *este un izomorfism admisibil, atunci* $\varphi_{\cdot q}$ *este izomorfism pentru orice* q.

Demonstrație. Se aplică 2.2.1. lui $\varphi\varphi^{-1}$ și $\varphi^{-1}\varphi$.

2.2.3. TEOREMĂ. *Dacă* $\{H^q(\Pi, \pi; G), f^q_{\cdot}, \delta^q\}$, *respectiv* $\{H^q_1(\Pi_1, \pi_1; G), f^q_{1\cdot}, \delta^q_1\}$, *este o teorie Hochschild de coomologie relativă pentru perechea* (Π, π) *pe* G, *respectiv pentru perechea* (Π_1, π_1) *pe* G, *și dacă omomorfismul admisibil* $\varphi : (\Pi_1, \pi_1) \to (\Pi, \pi)$ *este dat, atunci există numai o familie de* Z *- omomorfisme* $\varphi^{*q} : H^q(\Pi, \pi; G) \to H^q_1(\Pi_1, \pi_1; G)$, *definite pentru orice* Π *- modul* G *și astfel ca* :

1. *dacă* $G \to H$ *este un* Π*-omomorfism, atunci diagrama* :

$$\begin{array}{ccc} H^q(\Pi, \pi; G) & \to & H^q(\Pi, \pi; H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q_1(\Pi_1, \pi_1; G) & \to & H^q_1(\Pi_1, \pi_1; H) \end{array}$$

este comutativă ;

2. *dacă șirul de* Π*-module* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *este* $(Z(\Pi), Z(\pi))$*-exact, atunci diagrama* :

$$\begin{array}{ccc} H^q(\Pi, \pi; G'') & \to & H^{q+1}(\Pi, \pi; G') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q_1(\Pi_1, \pi_1; G'') & \to & H^{q+1}_1(\Pi_1, \pi_1; G') \end{array}$$

este comutativă ;

3. Z*-omomorfismul* φ^{*0} *coincide cu* Z*-omomorfismul* $\mathrm{Om}_{Z(\Pi)}(Z, G) \to \mathrm{Om}_{Z(\Pi_1)}(Z, G)$ *indus de* φ.

Demonstrație. Z-omomorfismul φ^{*0} se definește prin proprietatea 3. Fie φ^* definit pentru toate dimensiunile $< q\ (> 0)$. Șirul de Π-module $0 \to G \to \mathrm{Om}_{Z(\pi)}(Z(\Pi), G) \to M \to 0$, cu $M = \mathrm{Om}_{Z(\pi)}(Z(\Pi), G) / \mathrm{Om}_{Z(\Pi)}(Z(\Pi), G)$ este $(Z(\Pi), Z(\pi))$-exact [5] iar $\mathrm{Om}_{Z(\pi)}(Z(\Pi), G)$

este ($Z(\Pi)$, $Z(\pi)$) - injectiv ([5], lema 1). Z - omomorfismul φ^{*q} se definește (unic), prin comutativitatea diagramei:

$$\begin{array}{ccccccc} H^{q-1}(\Pi, \pi; \mathrm{Om}_{Z(\pi)}(Z(\Pi), G)) & \to & H^{q-1}(\Pi, \pi; M) & \to & H^q(\Pi, \pi; G) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \vdots & & \\ H_1^{q-1}(\Pi, \pi_1; \mathrm{Om}_{Z(\pi)}(Z(\Pi), G)) & \to & H_1^{q-1}(\Pi_1, \pi_1; M) & \to & H_1^q(\Pi_1, \pi_1; G) & & \end{array}$$

în care liniile sînt exacte (cf. *CHR*4 & *CHR*6) și în care pătratul din stînga este comutativ (cf. ipotezei de inducție). Restul, analog cu 2.2.1.

2.2.4. TEOREMĂ. *Dacă* φ *este un izomorfism admisibil, atunci* φ^{*q} *este un izomorfism pentru orice* q.

2.3. EXISTENȚĂ

2.3.1. TEOREMĂ (Hochschild [5]). $\{\mathrm{Tor}_q^{Z(\Pi), Z(\pi)}(G, Z), f_{\cdot q}, \partial_q\}$ *este o teorie Hochschild de omologie relativă pentru perechea* (Π, π) pe G.

2.3.2. $H_q(\Pi, \pi; G) = \mathrm{Tor}_q^{Z(\Pi), Z(\pi)}(G, Z)$ (cf. 2.3.1. & 2.2.2.).

2.3.3. TEOREMĂ (Hochschild [5]). $\{\mathrm{Ext}^q_{Z(\Pi), Z(\pi)}(Z, G), f^q_{\cdot}, \delta^q\}$ *este o teorie Hochschild de coomologie relativă pentru perechea* (Π, π) pe G.

2.3.4. $H^q(\Pi, \pi; G) = \mathrm{Ext}^q_{Z(\Pi), Z(\pi)}(Z, G)$ (cf. 2.3.3. & 2.2.4).

§ 3. ALGEBRA OMOLOGICĂ RELATIVĂ TAKASU

3.1. AXIOME

3.1.1. DEFINIȚIE. *Sistemul* $\{H^q(\Pi, \pi; G), f_{\cdot q}, \partial_q\}$, *în care*:

1. $(G, q) \to H_q(\Pi, \pi; G) : \mathfrak{M}_{(Z(\Pi))} \times Z \to \mathfrak{A}$;
2. *dacă* $f : G \to G'$ *este un* Π - *omomorfism, atunci, pentru orice* q, Z - *omomorfismul* $f_{\cdot q}$ *este astfel definit ca*:

$$f_{\cdot q} : H_q(\Pi, \pi; G) \to H_q(\Pi, \pi; G');$$

3. *dacă șirul de* Π - *module* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *este exact, atunci, pentru orice* q, Z - *omomorfismul* ∂^q *este astfel definit ca*:

$$\partial_q : H_q(\Pi, \pi; G'') \to H_{q-2}(\Pi, \pi; G'),$$

este o teorie Takasu de omologie relativă pentru perechea (Π, π) *pe* G, *dacă următoarele axiome sînt îndeplinite*:

*HR*1. $(\mathrm{id.})_{*q} = \mathrm{id.}$;
*HR*2. $(g\,of)_{*q} = g_{*q}\,of_{*q}$;
*HR**3. *dacă diagrama*:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & G' & \to & G & \to & G'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & H' & \to & H & \to & H'' & \to & 0 \end{array}$$

este comutativă și exactă, atunci diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H_q(\Pi, \pi; G'') & \to & H_{q-1}(\Pi, \pi; G') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(\Pi, \pi; H'') & \to & H_{q-1}(\Pi, \pi; H') \end{array}$$

este comutativă;

*HR*4. dacă șirul de* Π *- module* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *este exact, atunci șirul:*

$$\ldots \to H_{q+1}(\Pi, \pi; G'') \to H_q(\Pi, \pi; G') \to H_q(\Pi, \pi; G) \to H_q(\Pi, \pi; G'') \to$$

$$\to H_{q-1}(\Pi, \pi; G') \to \ldots$$

este exact;

*HR*5.* $H_q(\Pi, \pi; G) = 0$ *pentru* $q < 1$ & $H_1(\Pi, \pi; G) = (I_{(\Pi,\pi)}(G))_{Z(\Pi)}$;

*HR*6.* $H_q(\Pi, \pi; G) = 0$ *pentru* $q > 1$ *dacă* G *este* Π *- proiectiv.*

3.1.2. Grupul abelian $H_q(\Pi, \pi; G)$ este numit grupul Takasu de omologie relativă de dimensiune q al perechii (Π, π) pe grupul de coeficienți G, iar ∂_q frontiera relativizată Takasu q - dimensională.

3.1.3. DEFINIȚIE. *Sistemul* $\{H^q(\Pi, \pi; G), f^q_*, \delta^q\}$, *în care:*

1. $(G, q) \to H^q(\Pi, \pi; G) : {}_{(Z(\Pi))}\mathfrak{M} \times Z \to \mathfrak{A}$;

2. *dacă* $f : G \to G'$ *este un* Π *- omomorfism, atunci, pentru orice* q, Z *- omomorfismul* f^q_* *este astfel definit ca:*

$$f^q_* : H^q(\Pi, \pi; G) \to H^q(\Pi, \pi; G');$$

3. *dacă șirul de* Π *- module* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *este exact, atunci, pentru orice* q, Z *- omomorfismul* δ^q *este astfel definit ca:*

$$\delta^q : H^q(\Pi, \pi; G'') \to H^{q+1}(\Pi, \pi; G'),$$

este o teorie Takasu de coomologie relativă pentru perechea (Π, π) *pe* G, *dacă următoarele axiome sînt îndeplinite:*

*CHR*1. $(\mathrm{id.})^q_* = \mathrm{id.}$;

*CHR*2. $(g\,of)^q_* = g^q_*\,of^q_*$;

*CHR*3. dacă diagrama:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & G' & \to & G & \to & G'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & H' & \to & H & \to & H'' & \to & 0 \end{array}$$

este comutativă și exactă, atunci diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H^q(\Pi, \pi; G'') & \to & H^{q+1}(\Pi, \pi; G') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(\Pi, \pi; H'') & \to & H^{q+1}(\Pi, \pi; H') \end{array}$$

este comutativă;

CHR 4. dacă şirul de* Π *- module* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *este exact, atunci şirul:*

$\ldots \to H^{q-1}(\Pi, \pi; G'') \to H^q(\Pi, \pi; G') \to H^q(\Pi, \pi; G) \to H^q(\Pi, \pi; G'') \to H^{q+1}(\Pi, \pi; G') \to \ldots$ *este exact;*

*CHR*5.* $H^q(\Pi, \pi; G) = 0$ *pentru* $q < 1$ & $H^1(\Pi, \pi; G) = (J_{(\Pi,\pi)}(G))^{Z(\Pi)}$;

CHR 6. $H^q(\Pi, \pi; G) = 0$ *pentru* $q > 1$ *dacă* G *este* Π *- injectiv.*

3.1.4. Grupul abelian $H^q(\Pi, \pi; G)$ este numit grupul Takasu de coomologie relativă de dimensiune q al perechii (Π, π) pe grupul de coeficienţi G, iar δ^q cofrontiera relativizată Takasu q - dimensională.

3.2. UNICITATE

3.2.1. TEOREMĂ. *Dacă* $\{H_q(\Pi, \pi; G), f'_{\cdot q}, \partial_q\}$, *respecti* $\{H'(\Pi', \pi'; G), f'_{\cdot q}, \partial'_q\}$, *este o teorie Takasu de omologie relativă pentru perechea* (Π, π) *pe* G, *respectiv pentru perechea* (Π', π') *pe* G, *şi dacă omomorfismul admisibil* $\varphi : (\Pi', \pi') \to (\Pi, \pi)$ *este dat, atunci există numai o familie de* Z *- omomorfisme* $\varphi_{\cdot q} : H'_q(\Pi', \pi'; G) \to H_q(\Pi, \pi; G)$, *definite pentru orice* Π *- modul* G *şi astfel ca:*

1. *dacă* $G \to H$ *este un* Π *- omomorfism, atunci diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} H'_q(\Pi', \pi'; G) & \to & H'_q(\Pi', \pi'; H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(\Pi, \pi; G) & \to & H_q(\Pi, \pi; H) \end{array}$$

este comutativă;

2. *dacă şirul de* Π *- module* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *este exact, atunci diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} H'_q(\Pi', \pi'; G'') & \to & H'_{q-1}(\Pi', \pi'; G') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(\Pi, \pi; G'') & \to & H_{q-1}(\Pi, \pi; G') \end{array}$$

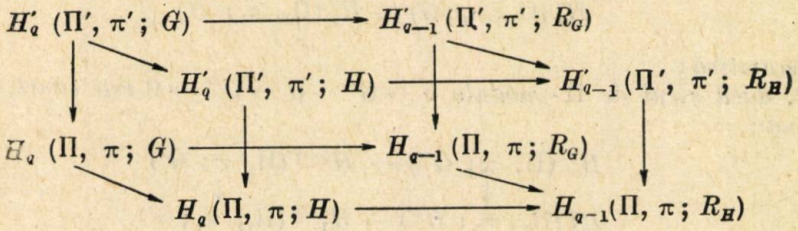
este comutativă;

3. Z *- omomorfismul* $\varphi_{\cdot 1}$ *coincide cu* Z *- omomorfismul* $(I_{(\Pi',\pi')}(G))_{Z(\Pi')} \to (I_{(\Pi,\pi)}(G))_{Z(\Pi)}$ *indus de* φ.

Demonstraţie. Z-omomorfismul $\varphi_{\cdot 1}$ se defineşte prin proprietatea 3. Fie $\varphi_{\cdot}$ definit pentru toate dimensiunile $< q$ (> 1) şi fie $0 \to R_G \to F_G \to G \to 0$ reprezentarea Π - liberă a lui G. Z - omomorfismul $\varphi_{\cdot q}$ se defineşte (unic) prin comutativitatea diagramei:

$$\begin{array}{ccccc} H'_q(\Pi', \pi'; G) & \to & H'_{q-1}(\Pi', \pi'; R_G) & \to & H'_{q-1}(\Pi', \pi'; F_G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to H_q(\Pi, \pi; G) & \to & H_{q-1}(\Pi, \pi; R_G) & \to & H_{q-1}(\Pi, \pi; F_G) \end{array}$$

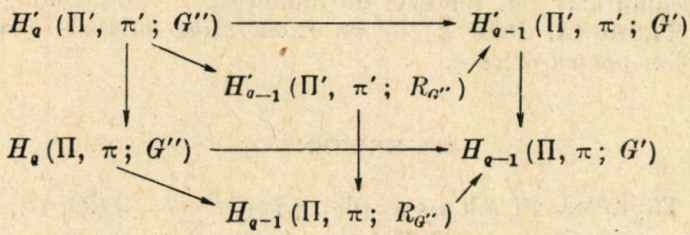
în care liniile sînt exacte (cf. HR^*4 & HR^*6) şi în care pătratul din dreapta este comutativ (cf. ipotezei de inducţie). Diagrama



comutativă pe faţa din ultimul plan ca şi pe cea din primul plan, prin construcţia lui φ^{*q}, pe faţa superioară ca şi pe aceea inferioară, prin axioma HR^*3, pe faţa laterală dreaptă, prin ipoteza de inducţie, asigură proprietatea 1, fiindcă $H_q(\Pi, \pi; H) \to H_{q-1}(\Pi, \pi; R_H)$ rezultă biunivoc (cf. HR^*4 & HR^*6). Acum, diagrama comutativă şi exactă:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & R_{G''} & \to & F_{G''} & \to & G'' \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \to & G' & \to & G & \to & G'' \to 0 \end{array}$$

induce diagrama:



comutativă pe faţa laterală stîngă, prin construcţia lui φ^{*q}, pe faţa superioară ca şi pe cea inferioară, prin axioma HR^*3, pe faţa laterală dreaptă, prin proprietatea 1 acum demonstrată. Şi astfel, rezultă proprietatea 2.

3.2.2. TEOREMĂ. *Dacă φ este un izomorfism admisibil, atunci φ^{*q} este izomorfism pentru orice q.*

3.2.3. TEOREMĂ. *Dacă $\{H^q(\Pi, \pi; G), f^q_*, \delta^q\}$, respectiv $H^q_1(\Pi_1, \pi_1; G)$, f^q_{*1}, $\delta^q_1\}$, este o teorie Takasu de coomologie relativă pentru perechea (Π, π) pe G, respectiv pentru perechea (Π_1, π_1) pe G, şi dacă omomorfismul admisibil $\varphi : (\Pi_1, \pi_1) \to (\Pi, \pi)$ este dat, atunci există numai o familie de Z-omomorfisme $\varphi^{*q} : H^q(\Pi, \pi; G) \to H^q_1(\Pi_1, \pi_1; G)$, definite pentru orice Π-modul G şi astfel ca:*

1. *dacă* $G \to H$ *este un* Π - *omomorfism, atunci diagrama* :

$$\begin{array}{ccc} H^q(\Pi, \pi; G) & \to & H^q(\Pi, \pi; H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_1^q(\Pi_1, \pi_1; G) & \to & H_1^q(\Pi_1, \pi_1; H) \end{array}$$

este comutativă ;

2. *dacă șirul de* Π - *module* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *este exact, atunci diagrama* :

$$\begin{array}{ccc} H^q(\Pi, \pi; G'') & \to & H^{q+1}(\Pi, \pi; G') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_1^q(\Pi_1, \pi_1; G'') & \to & H_1^{q+1}(\Pi_1, \pi_1; G') \end{array}$$

este comutativă ;

3. Z - *omomorfismul* φ^{*1} *coincide cu* Z - *omomorfismul* $(J_{(\Pi,\pi)}(G))^{Z(\Pi)} \to (J_{(\Pi_1,\pi_1)}(G))^{Z(\Pi_1)}$ *indus de* φ.

Demonstrație. Z - omomorfismul φ^{*1} se definește prin proprietatea 3. Fie φ^* definit prin toate dimensiunile $< q\ (>1)$ și fie $0 \to G \to Q_G \to N_G \to 0$ un șir exact de Π - module cu Q_G Π - injectiv. Z - omomorfismul φ^{*q} se definește (unic) prin comutativitatea diagramei :

$$\begin{array}{ccccccc} H^{q-1}(\Pi, \pi; Q_G) & \to & H^{q-1}(\Pi, \pi; N_G) & \to & H^q(\Pi, \pi; G) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \vdots & & \\ H_1^{q-1}(\Pi_1, \pi_1; Q_G) & \to & H_1^{q-1}(\Pi_1, \pi_1; N_G) & \to & H_1^q(\Pi_1, \pi_1; G) & & \end{array}$$

în care liniile sînt exacte (cf. CHR^*4 & CHR^*6) și în care pătratul din stînga este comutativ (cf. ipotezei de inducție). Restul, analog cu 3.2.1.

3.2.4. TEOREMĂ. *Dacă* φ *este un izomorfism admisibil, atunci* φ^{*q} *este izomorfism pentru orice* q.

3.3. EXISTENȚĂ

3.3.1. TEOREMĂ (Takasu [6]). $\{\mathrm{Tor}_{q-1}^{Z(\Pi)}(I_{(\Pi,\pi)}(Z), G), f_*, \partial\}$ *este o teorie Takasu de omologie relativă pentru perechea* (Π, π) *pe* G.

3.3.2. $H_q(\Pi, \pi; G) = \mathrm{Tor}_{q-1}^{Z(\Pi)}(I_{(\Pi,\pi)}(Z), G)$ (cf. 3.3.1. & 3.2.2.).

3.3.3. TEOREMĂ (Takasu [6]). $\{\mathrm{Ext}_{Z(\Pi)}^{q-1}(I_{(\Pi,\pi)}(Z), G), f_*, \delta\}$ *este o teorie Takasu de coomologie relativă pentru perechea* (Π, π) *pe* G.

3.3.4. $H^q(\Pi, \pi; G) = \mathrm{Ext}_{Z(\Pi)}^{q-1}(I_{(\Pi,\pi)}(Z), G)$ (cf. 3.3.3. & 3.2.4.).

§ 4. OBSERVAȚII

4.1. $HR3 \Rightarrow HR^*3$; $HR4 \Rightarrow HR^*4$; $HR6 \Rightarrow HR^*6$; $CHR3 \Rightarrow CHR^*3$ $CHR4 \Rightarrow CHR^*4$ & $CHR6 \Rightarrow CHR^*6$ (a se vedea și [5]).

4.2. Axiomatica (și unicitatea) prezentată poate fi folosită și pentru monoizi.

4.3. Fie $H_q(\Pi, \pi; G)$ grupul Hochschild de omologie relativă de dimensiune q al perechii (Π, π) pe G. Grupurile $\widetilde{H}_q(\Pi, \pi; G) = H_{q-p}(\Pi, \pi; G)$ cu $p \geqslant 0$ satisfac la axiomele HR 1 — 4 și la :

$\widetilde{HR}5$. $\widetilde{H}_q(\Pi, \pi; G) = 0$ *pentru* $q < p$ & $\widetilde{H}_p(\Pi, \pi; G) = G \otimes_{Z(\Pi)} Z$;

$\widetilde{HR}6$. $\widetilde{H}_q(\Pi, \pi; G) = 0$ *pentru* $q > p$ *dacă* G *este* $(Z(\Pi), Z(\pi))$-*proiectiv.*

Observație analogă în coomologie ca și în teoria Takasu.

АКСИОМАТИКА ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ ДИСКРЕТНЫХ ГРУПП

РЕЗЮМЕ

Дается аксиоматическая трактовка относительных гомологических алгебр Хохшильда [5] и Такасу [6], аналогичная аксиоматике Эйленберга [2].

AXIOMATIQUE DE L'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE RELATIVE DES GROUPES DISCRETS

RÉSUMÉ

L'auteur donne une présentation axiomatique des algèbres homologiques relatives de Hochschild [5] et de Takasu [6], analogue à l'axiomatique d'Eilenberg [2].

BIBLIOGRAFIE

1. ADAMSON I. T., *Cohomology theory for non-normal subgroups and non-normal fields.* Proc. Glasgow Math. Assoc., **2**, *part. II*, 66—76 (1954).
2. CARTAN H., *Coholomologie des groupes — Suites spectrales — Faisceaux.* Séminaire E.N.S., (1950—1951).
3. — Math. Rev., **18**, *4*, 278 (1957).
4. HIGMAN D. G., *Relative cohomology*, Canadian J. Math., **9** *1*, 19—34 (1957).
5. HOCHSCHILD G., *Relative homological algebra.* Trans. Amer. Math. Soc., **82**, *1*, 246—269 (1956).
6. TAKASU S., *Relative homology and relative cohomology theory of groups.* J. Faculty of Science, University of Tokyo, **8**, Section 1, *Part. I*, (1959).

ASUPRA NUMĂRULUI DE TIPURI DE FUNCȚII BOOLEENE SIMETRICE GENERALIZATE

DE

PAUL CONSTANTINESCU

§ 1. Funcțiile booleene simetrice au fost studiate în numeroase lucrări (bibliografia din [3]) deoarece studiul schemelor simetrice, care au ca formule de structură funcții booleene simetrice, permite uneori simplificarea rezolvării problemei de sinteză sau simplificarea schemei obținute prin metodele de sinteză obișnuite.

Vom nota prin $\mathfrak{S}_n$ grupul simetric și prin $\mathfrak{N}_n$ grupul negațiilor.

DEFINIȚIA 1. *O funcție booleană $f(x_1, \ldots, x_n)$ este simetrică dacă rămîne invariantă față de transformările grupului simetric $\mathfrak{S}_n$.*

Funcțiile simetrice care au variabilele de simetrie [6] $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ *) le vom numi funcții simetrice generalizate [3] spre a le distinge de funcțiile simetrice care au variabilele de simetrie $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Funcțiile simetrice generalizate se obțin din funcțiile simetrice prin aplicarea transformărilor grupului $\mathfrak{N}_n$.

DEFINIȚIA 2. *Numărul variabilelor care primind valoarea 1 fac ca valoarea funcției să fie 1 se numește număr de simetrie al funcției simetrice.*

DEFINIȚIA 3. *O funcție simetrică care are un singur număr de simetrie se numește funcție simetrică elementară.*

Conform [6] orice funcție simetrică se scrie în mod unic ca o sumă de funcții simetrice elementare. Notînd cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ numerele de simetrie ale unei funcții simetrice avem

$$S_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} S_{\alpha_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Numerele de simetrie posibile, ale unei funcții booleene de n variabile, sînt $0, 1, \ldots, n$. Numărul lor total este prin urmare $n + 1$. Deoarece

*) Prin $\tilde{x}_i$ se notează x_i sau $\bar{x}_i$.

fiecare din aceste numere sau aparține sau nu aparține unei funcții simetrice, rezultă că există 2^{2^n+1} funcții simetrice de n variabile. Pentru a calcula numărul funcțiilor simetrice generalizate (care au variabilele de simetrie $\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n$) vom distinge următoarele categorii de funcții simetrice [2], [3].

1. *Funcțiile polisimetrice.* Sînt funcțiile simetrice care au valoarea 1 cînd orice număr par de variabile iau valoarea 1 sau, cînd orice număr impar de variabile iau valoarea 1. Pentru orice n avem 4 funcții polisimetrice : funcțiile polisimetrice improprii 0 și 1 și funcțiile

$$S_{0,\,2,\,4,\,\ldots,\,n'}(x_1, \ldots, x_n), \quad S_{1,\,3,\,5,\,\ldots,\,n''}(x_1, \ldots, x_n)$$

unde $n' = \begin{cases} n & \text{pentru } n \text{ par} \\ n-1 & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$ și $n'' = \begin{cases} n-1 & \text{pentru } n \text{ par} \\ n & \text{pentru } n \text{ impar.} \end{cases}$

2. *Funcțiile bisimetrice.* Sînt funcțiile simetrice avînd numerele de simetrie dispuse simetric față de $\frac{n}{2}$ [2], [3]. Sau conform [4] funcțiile bisimetrice sînt funcțiile simetrice care au numerele de simetrie complementare două cîte două *). De pildă funcția $S_{1,2}(x_1, x_2, x_3)$ este bisimetrică.

3. *Funcțiile monosimetrice.* Sînt funcțiile simetrice cu o dispoziție a numerelor de simetrie nesimetrică față de $\frac{n}{2}$. De pildă funcția $S_{0,2}(x_1, x_2, x_3)$ este monosimetrică.

Observația 1. Să remarcăm că orice funcție simetrică este sau bisimetrică sau monosimetrică sau polisimetrică.

În [3] se arată că din cele $2^{2^n+1} - 4$, funcții simetrice care nu sînt polisimetrice, un număr $\nu_b = 2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} - 2 - 2\eta(n)$ de funcții simetrice au numerele de simetrie dispuse simetric față de $\frac{n}{2}$, unde $\left[\frac{n}{2}\right]$ este partea întreagă a numărului $\frac{n}{2}$ iar

$\eta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } n \text{ par} \\ 0 & \text{pentru } n \text{ impar.} \end{cases}$ În această expresie termenul -2 corespunde funcțiilor simetrice improprii 0 și 1 iar termenul $-2\eta(n)$ corespunde celorlalte 2 funcții polisimetrice. Ca atare numărul funcțiilor bisimetrice este ν_b.

*) Numerele de simetrie α_1 și α_2 ale unei funcții booleene simetrice de n variabile se zic complementare dacă $\alpha_1 \neq \alpha_2 = n$. Dacă n este par $S_{\frac{n}{2}}(x_1, \ldots, x_n)$ este bisimetrică.

Conform observației 1 rezultă că numărul funcțiilor monosimetrice este

$$\nu_m = 2^{n+1} - 4 - 2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} + 2 + 2\eta(n) = 2^{n+1} - 2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} + 2\eta(n) - 2.$$

Din funcțiile bisimetrice și monosimetrice prin aplicarea transformărilor grupului $\mathfrak{N}_n$ obținem funcțiile bisimetrice generalizate, respectiv monosimetrice generalizate. Prin urmare, variabilele de simetrie ale funcțiilor bisimetrice generalizate, respectiv monosimetrice generalizate, sînt $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n$.

Vom demonstra următoarea lemă:

LEMA 1. *Numărul funcțiilor bisimetrice generalizate de n variabile este* $2^{n-1}\nu_b$.

Demonstrație.

Conform [4] avem

$$N_{2^n-1}\, S_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = S_{n-\alpha}(x_1, \ldots, x_n).$$

Rezultă că orice funcție bisimetrică este invariantă față de subgrupul $\{N_0, N_{2^n-1}\}$. Într-adevăr, numerele de simetrie ale funcției bisimetrice sînt complementare două cîte două sau, dacă n este par, $S_{\frac{n}{2}}(x_1, \ldots, x_n)$ este bisimetrică. Ca atare, orice funcție bisimetrică este invariantă față de N_{2^n-1}, transformarea care constă în negarea tuturor variabilelor. Reciproc [4] singurele transformări din grupul $\mathfrak{N}_n$ care invariază o funcție bisimetrică oarecare sînt N_0 și N_{2^n-1}. Prin urmare, efectuînd transformările care sînt reprezentanții claselor de resturi ale grupului $\mathfrak{N}_n$ față de grupul $\{N_0, N_{2^n-1}\}$ obținem din fiecare funcție bisimetrică 2^{n-1} funcții bisimetrice generalizate, unde 2^{n-1} este indicele subgrupului $\{N_0, N_{2^n-1}\}$ q.e.d.

În continuare vom demonstra următoarea lemă:

LEMA 2. *Numărul funcțiilor monosimetrice generalizate de n variabile este* $2^{n-1}\nu_m$.

Demonstrație.

Conform [4] singura transformare din $\mathfrak{N}_n$ care invariază o funcție monosimetrică oarecare este N_0. Orice altă transformare din $\mathfrak{N}_n$ aplică o funcție monosimetrică într-o altă funcție monosimetrică distinctă. De asemenea [4] mulțimea funcțiilor monosimetrice este o mulțime de perechi de funcții monosimetrice astfel încît, pentru fiecare pereche, numerele de simetrie ale unei funcții sînt complementare respectiv cu numerele de simetrie ale celeilalte funcții din pereche. Prin urmare, aplicînd cele 2^n transformări ale grupului $\mathfrak{N}_n$ asupra funcțiilor monosimetrice, obținem pentru fiecare pereche de funcții monosimetrice aceleași 2^n funcții monosimetrice generalizate. Rezultă că numărul funcțiilor monosimetrice generalizate este $2^n \cdot \frac{1}{2}\nu_m = 2^{n-1}\nu_m$. q.e.d.

Observația 2. Mulțimea funcțiilor polisimetrice generalizate coincide cu mulțimea funcțiilor polisimetrice [4]. Conform observației 1, observației 2, lemei 1 și lemei 2 rezultă că numărul funcțiilor simetrice generalizate este

$$\nu = 2^{n-1}(\nu_b + \nu_m) + 4 = 2^{2n} - 2^{n+1} + 4.$$

Acest număr a fost calculat prin altă metodă în [3].

§ 2. În acest paragraf vom calcula numărul tipurilor funcțiilor simetrice generalizate după grupul $\mathfrak{N}_n$ [1].

Să remarcăm în primul rînd că numărul tipurilor funcțiilor simetrice generalizate după grupul $\mathfrak{N}_n$, coincide cu numărul tipurilor funcțiilor simetrice generalizate după grupul hiperoctaedric $\mathcal{O}_n$ generat [3] de subgrupul $\mathfrak{S}_n$ și $\mathfrak{N}_n$, deoarece funcțiile simetrice generalizate sînt invariante față de transformările grupului $\mathfrak{S}_n$.

DEFINIȚIA 1. *O funcție simetrică generalizată* $S(x_1, \ldots, x_n)$ *se zice că este de același tip cu funcția simetrică generalizată* $\sum(x_1, \ldots, x_n)$ *după grupul* $\mathfrak{N}_n$, *dacă se deduc una din alta prin transformări ale grupului* $\mathfrak{N}_n$, *ca atare dacă se deduc una din alta înlocuind unele variabile prin negațiile lor.* Dacă $S(x_1, \ldots, x_n)$ și $\sum(x_1, \ldots, x_n)$ sînt de același tip (aparțin aceleiași clase [4]) după grupul $\mathfrak{N}_n$ vom scrie

$$S \underset{\sim}{\mathfrak{N}_n} \sum.$$

Relația $\underset{\sim}{\mathfrak{N}_n}$ este o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă, ca atare este o relație de echivalență.

Deoarece relația $\underset{\sim}{\mathfrak{N}_n}$ este reflexivă există cel puțin o transformare $N \in \mathfrak{N}_n$ astfel ca $S(x_1, \ldots, x_n) = NS(x_1, \ldots, x_n)$. Mulțimea transformărilor care invariază o funcție $S(x_1, \ldots, x_n)$ formează un grup $H \subset \mathfrak{N}_n$ pe care-l vom numi grupul de inerție [3] al acestei funcții. Mulțimea funcțiilor de același tip (din aceeași clasă) cu $S(x_1, \ldots, x_n)$ se obține efectuînd asupra funcției $S(x_1, \ldots, x_n)$ acele transformări care sînt reprezentanții claselor de resturi ale grupului $\mathfrak{N}_n$ față de H.

Efectuînd transformările din grupul $\mathfrak{N}_n$ asupra celor $\nu = 2^{2n} - 2^{n+1} + 4$ funcții simetrice generalizate, aceste funcții se permută între ele. Scrim aceste permutări ca matrici de permutări de ordin ν. Aplicația grupului $\mathfrak{N}_n$ pe grupul de matrici de permutări este o reprezentare liniară Γ de dimensiune ν.

Fie r numărul claselor de resturi ale grupului $\mathfrak{N}_n$ față de H. Efectuînd cele r transformări ale grupului $\mathfrak{N}_n$, care sînt reprezentanții claselor de resturi ale grupului $\mathfrak{N}_n$ față de H, asupra unei funcții $S(x_1, \ldots, x_n)$ obținem r funcții distincte care sînt de același tip după $\mathfrak{N}_n$. Aceste r funcții sînt de același tip și sînt toate funcțiile de acest tip. Cînd se efectuează asupra acestor r funcții transformările grupului $\mathfrak{N}_n$ obținem un grup de permutări omomorf cu $\mathfrak{N}_n$ care scrise ca matrici de permutări de ordin r realizează o reprezentare R de dimensiune r a grupului $\mathfrak{N}_n$. Se știe [5] că reprezentarea unui grup, corespunzătoare permutărilor

claselor de resturi față de un subgrup al său, conține reprezentarea identică unidimensională, o dată și numai o dată.

Deoarece efectuînd asupra celor ν funcții simetrice generalizate transformările grupului $\mathfrak{R}_n$, în fiecare clasă de funcții, funcțiile se permută între ele, rezultă că reprezentarea liniară Γ este reductibilă și conține fiecare dintre reprezentările liniare R o dată și numai o dată.

Fie a_1 numărul care arată de cîte ori reprezentarea identică unidimensională este conținută în Γ. Din teoria reprezentărilor liniare ale grupurilor se știe că

$$a_1 = \frac{1}{2^n} \sum n_c \chi_c \tag{1}$$

unde n_c este numărul de elemente dintr-o clasă $\mathfrak{C}$ de elemente conjugate a lui $\mathfrak{R}_n$; χ_c este caracterul clasei $\mathfrak{C}$ a lui $\mathfrak{R}_n$ în reprezentarea Γ iar însumarea se efectuează asupra tuturor claselor de elemente conjugate ale grupului $\mathfrak{R}_n$.

Deoarece reprezentarea Γ conține fiecare reprezentare R corespunzătoare unui subgrup H o singură dată iar fiecare reprezentare R conține reprezentarea identică unidimensională o singură dată, rezultă că a_1 reprezintă numărul de reprezentări R conținute în Γ, ca atare numărul de tipuri de funcții booleene după grupul $\mathfrak{R}_n$.

Grupul $\mathfrak{R}_n$ fiind abelian numărul claselor de elemente conjugate este egal cu numărul elementelor sale iar $n_c = 1$ pentru toate clasele de elemente conjugate.

Formula (1) în cazul grupului abelian $\mathfrak{R}_n$ devine:

$$a_1 = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \chi(N_k). \tag{1'}$$

Prin urmare trebuie să calculăm $\chi(N_k)$ caracterul elementului $\mathfrak{R}_k$ în reprezentarea Γ.

Fiecare funcție simetrică generalizată $S(x_1, \ldots, x_n)$ poate fi pusă în corespondență cu un număr binar cu 2^n cifre $\lambda_{ij} (j = 0, \ldots, 2^n - 1)$:

$$S^i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \lambda_{ij} u_j$$

unde $u_0 = x_1 x_2 \ldots x_n$, $u_1 = N_1 u_0, \ldots, u_{2^n-1} = N_{2^n-1} u_0$, iar $i = 1, \ldots, \nu = 2^{2^n} - 2^{n+1} + 4$.

Vom scrie funcțiile $S^i(x_1, \ldots, x_n)$ una sub alta în ordinea crescătoare a numerelor binare respective. Obținem o matrice cu ν linii și

2^n coloane fiecare element al matricii fiind 0 sau 1. Pentru $n = 2$ această matrice este (tabloul 1):

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Tabloul 1

Să remarcăm că $\chi(N_k)$ reprezintă numărul funcțiilor $S^i(x_1, \ldots, x_n)$ care rămîn invariante cînd se aplică asupra funcțiilor transformarea N_k.

Vom demonstra următoarea teoremă:

TEOREMA 1. $a_1 = 2^n + 2^{\left[\frac{n}{2}\right]} - \eta(n)$.

Demonstrație.

a) Avem $\chi(N_0) = 2^{2n} - 2^{n+1} + 4$. Într-adevăr, aplicînd N_0 cele ν funcții simetrice generalizate rămîn invariante și ca atare urma matricii de permutări corespunzătoare este ν.

b) Conform lemei 1, funcțiile bisimetrice generalizate rămîn invariante cînd se aplică N_{2^n-1}. Ca atare în suma din (1′) vom considera termenul $2^{n-1}\nu_b$.

c) Cele 2 funcții improprii 0 și 1 sînt invariante față de cele 2^n transformări ale grupului $\mathfrak{N}_n$. În suma din (1′) vom considera și termenul $2.2^n - 2 = 2^{n+1} - 2$, deoarece faptul că transformarea N_0 lasă invariante aceste 2 funcții a fost considerat la a).

d) Celelalte 2 funcții polisimetrice sînt invariante față de grupul $\mathfrak{N}_n^*$ format din toate transformările care aplică negații asupra unui număr par de variabile, deci toate negațiile N_k unde k scris în binar are un număr par de unități [3]. Ordinul acestui grup este 2^{n-1}. Ca atare în suma din (1′) vom considera și termenul $2^{n-1}.\ 2 - 2$ deoarece faptul că N_0 lasă aceste 2 funcții invariante a fost considerat la a). Deoarece orice transformare din $\mathfrak{N}_n$ aplică o funcție monosimetrică generalizată într-o altă funcție monosimetrică generalizată distinctă, rezultă că

$$a_1 = \frac{1}{2^n}\left[2^{2n} - 2^{n+1} + 4 + (2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} - 2 - 2\eta)\,2^{n-1} + 2^{n+1} + 2^n - 2 - 2\right] =$$

$$= 2^n + 2^{\left[\frac{n}{2}\right]} - \eta(n). \quad \text{q.e.d.}$$

Acest număr a fost determinat în [3] prin altă metodă. Pentru $n = 2, 3, 4, 5$ numerele care se obțin coincid cu cele obținute de autor în [4].

О ЧИСЛЕ ТИПОВ ОБОБЩЕННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

При помощи формулы (1), известной из теории линейных представлений конечных групп, автор вычисляет число типов обобщенных симметрических булевых функций от n переменных.

ON THE NUMBER OF TYPES OF GENERALIZED BOOLEAN SYMMETRIC FUNCTIONS

ABSTRACT

The Author calculates with the formula (1), from the theory of groups characters, the number of types of Boolean symmetric functions of n variables.

BIBLIOGRAFIE

1. GR. MOISIL, *Teoria algebrică a mecanismelor automate.* Ed. tehnică, București, 1959.
2. R. RIGHI, *Le funzioni di commutazione in genere e quelli simmetriche in particolare.* Ingegneria ferroviaria, **10**, *10* (1955).
3. Г. Н. ПОВАРОВ, *О групповой инвариантности булевых функций*, în *Применение логики в науке и технике*, Изд. Ак. Наук СССР, Москва, 1961.
4. P. CONSTANTINESCU, *Asupra clasificării funcțiilor booleene simetrice.* Studii și cercetări matematice, **XI**, *1* (1960).
5. F. D. MURNAGAN, *Теория представлений групп*, Изд. иностр.лит., Москва, 1950.
6. S. H. CALDWELL, *The Recognition and Identification of Symmetric Switching Functions.* Trans. AIEE **73**, *I* (1954).
7. D. SLEPIAN, *On the number of Symmetry Types of Boolean Functions of n Variables,* Canad. J. Math. **5**, *2* (1953).

ASUPRA CORESPONDENȚELOR SPECIALE ÎNTRE SPAȚIILE PROIECTIVE. II

DE

MARIUS I. STOKA

III *)

Ne vom ocupa acum de corespondențele speciale cu puncte comune neizolate.

Primul caz în care se realizează această corespondență este acela în care conexiunea Π^i_{jk} verifică sistemul (6) cu $\Pi^2_{21} = 0$.
Astfel sistemul (6) se scrie

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = \Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = \Pi^3_{11} = \Pi^3_{12} = \Pi^3_{22} = 0, \\ &\Pi^2_{22} = 2\Pi^3_{32}, \quad \Pi^1_{12} = -3\Pi^3_{32}, \quad \Pi^3_{33} = 2\Pi^2_{23}, \quad \Pi^1_{13} = -3\Pi^2_{23}. \end{aligned}\right\} \quad (6')$$

Înlocuind aceste valori în sistemul (34) obținem

$$\Pi^2_{22} = \Pi^2_{23} = 0,$$

deci

$$\Pi^1_{1j} = \Pi^2_{ij} = \Pi^3_{ij} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Avînd în vedere că cel puțin unul din numerele Π^1_{22}, Π^1_{23}, Π^1_{33} este nenul, rezultă că avem de considerat două cazuri și anume :

1. $\Pi^1_{22} \neq 0$, **)
2. $\Pi^1_{23} = 0$.

În primul caz, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = ax, \quad \bar{y} = by, \quad \bar{z} = cz,$$

---

*) Numerotarea paragrafelor și a formulelor este în continuare cu cele din nota I [1].

**) Cazul $\Pi^1_{33} \neq 0$ se obține din acest caz prin schimbarea indicilor 2 cu 3.

obținem

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \frac{a}{b^2}\Pi^1_{22},\quad \overline{\Pi}^1_{23} = \frac{a}{bc}\Pi^1_{23},\quad \overline{\Pi}^1_{33} = \frac{a}{c^2}\Pi^1_{33}. \tag{83}$$

Avînd în vedere că $\Pi^1_{22} \neq 0$, putem lua

$$a = \frac{b^2}{\Pi^1_{22}}$$

și relațiile (83) devin

$$\overline{\Pi}^1_{22} = 1,\quad \overline{\Pi}^1_{23} = \frac{b}{c}\frac{\Pi^1_{23}}{\Pi^1_{22}},\quad \overline{\Pi}^1_{33} = \left(\frac{b}{c}\right)^2\frac{\Pi^1_{33}}{\Pi^1_{22}}.$$

Dacă $\Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = 0$, rezultă că

$$\overline{\Pi}^1_{22} = 1,\quad \overline{\Pi}^1_{23} = \overline{\Pi}^1_{33} = 0.$$

Dacă $\Pi^1_{33} \neq 0$, $\Pi^1_{23} = 0$, putem lua

$$b = c\sqrt{\left|\frac{\Pi^1_{22}}{\Pi^1_{33}}\right|}$$

și avem

$$\overline{\Pi}^1_{22} = 1,\quad \overline{\Pi}^1_{33} = \pm 1,\quad \overline{\Pi}^1_{23} = 0.$$

Dacă $\Pi^1_{23} \neq 0$, putem lua

$$b = c\frac{\Pi^1_{22}}{\Pi^1_{23}}$$

și obținem

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{\Pi}^1_{23} = 1,\quad \overline{\Pi}^1_{33} = \alpha \qquad \left(\alpha = \frac{\Pi^1_{22}\,\Pi^1_{33}}{(\Pi^1_{23})^2}\right).$$

Deci, dacă $\Pi^1_{22} \neq 0$, prin schimbări convenabile de variabile conexiunea constantă Π^i_{jk}, care verifică sistemul (6) cu $\Pi^2_{21} = 0$, se reduce la una din formele

$$\begin{aligned} &1^\circ \qquad \Pi^1_{22} = 1,\ \Pi^1_{33} = \eta, \\ &2^\circ \qquad \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 1,\ \Pi^1_{33} = \alpha, \end{aligned} \qquad (\eta = 0, \pm 1)$$

componentele nescrise fiind nule.

În același mod, dacă $\Pi^1_{23} \neq 0$, se obțin conexiunile

$$\begin{aligned} &3^\circ \qquad \Pi^1_{23} = 1,\ \Pi^1_{33} = \varepsilon, \\ &4^\circ \qquad \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 1,\ \Pi^1_{33} = \alpha. \end{aligned} \qquad (\varepsilon = 0, 1)$$

Conexiunea 4° este identică cu conexiunea 2°.

Făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = -2x,\ \bar{y} = y,\ \bar{z} = z - y,$$

conexiunea $\Pi^1_{22} = 1$ se transformă în $\Pi^1_{23} = 1$, iar făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = -x,\ \bar{y} = -y,\ \bar{z} = y + z,$$

conexiunea $\Pi^1_{22} = -\Pi^1_{33} = 1$ se transformă în $\Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = 1$.

Deci, *conexiunea constantă* Π^i_{jk} *care verifică sistemul* (6) *cu* $\Pi^2_{21} = 0$ *se reduce, prin schimbări de variabile, la una din formele*

$$[\mathrm{I}]\ \Pi^1_{22} = 1,\ \Pi^1_{33} = \eta \qquad (\eta = 0, \pm 1),$$
$$[\mathrm{II}]\ \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 1,\ \Pi^1_{33} = \alpha, \qquad (\alpha \neq 0)\ ^*)$$

componentele nescrise fiind nule.

Vom considera, acum conexiunea constantă Π^i_{jk} care verifică sistemul (7) cu $\Pi^1_{33} \neq 0$ și

$$\Pi^1_{33}(6\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11}) - (3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})^2 = 0. \tag{7'}$$

Din sistemul (7) deducem

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^1_{11} = \frac{\mu^2(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) - \Pi^3_{11}}{2\mu},\ \Pi^2_{21} = \frac{\mu^2(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^3_{11}}{4\mu},\ \Pi^3_{22} = -4\Pi^1_{22}, \\ &\Pi^1_{12} = \frac{\mu^2\Pi^1_{23} - 3\Pi^3_{12}}{4\mu},\ \Pi^2_{22} = \frac{\mu^2\Pi^1_{23} + \Pi^3_{12}}{2\mu},\ \Pi^1_{33} = \frac{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}{\mu} \neq 0. \end{aligned}\right\}$$

Înlocuind aceste valori în (7') obținem

$$(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})\ [\mu^2(\Pi^1_{13} - 5\Pi^2_{23}) + \Pi^3_{11}] = 0$$

și, avînd în vedere că $3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13} \neq 0$, rezultă

$$\Pi^3_{11} = \mu^2(5\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}).$$

Deci, conexiunea Π^i_{jk} verifică relațiile

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^2_{23} = 0,\ \Pi^3_{11} = \mu^2(5\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}),\ \Pi^3_{22} = -\mu\Pi^1_{22}, \\ &\Pi^1_{11} = \mu(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}),\ \Pi^2_{21} = \mu\Pi^2_{23},\ \Pi^1_{33} = \frac{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}{\mu} \neq 0, \\ &\Pi^1_{12} = \frac{\mu^2\Pi^1_{23} - 3\Pi^3_{12}}{4\mu},\ \Pi^2_{22} = \frac{\mu^2\Pi^1_{23} + \Pi^3_{12}}{2\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

*) Conexiunea $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 1$ se reduce la $\Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = 1$ prin schimbarea indicilor 2 cu 3.

Avînd în vedere aceste valori, sistemul (34) se scrie

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^2_{23}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) = 0,\ \Pi^2_{23}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0,\ \Pi^2_{23}(7\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}) = 0,\\
&\Pi^2_{23}\ \Pi^1_{23} = 0,\ \Pi^3_{12}\Pi^2_{23} = 0,\ \mu^2\Pi^1_{23}(\Pi^1_{13} - 2\Pi^2_{23}) + \Pi^3_{12}\Pi^1_{13} = 0,\\
&\mu^2\Pi^1_{23}\,(11\,\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}) - \Pi^3_{12}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0,\\
&4\mu\,\Pi^1_{22}\,\Pi^2_{23} - \Pi^1_{23}(\mu^2\Pi^1_{23} + \Pi^3_{12}) = 0,\\
&6\mu^3\Pi^1_{22}\,\Pi^2_{23} + \Pi^3_{12}(\mu^2\Pi^1_{23} + \Pi^3_{12}) = 0,\\
&\mu^2\Pi^1_{23}(5\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}) - \Pi^3_{12}(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}) = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Din primele două ecuații ale acestui sistem rezultă

$$\Pi^2_{23} = 0,\ \Pi^1_{13} \neq 0,$$

care înlocuite în celelalte ecuații ne dau

$$\Pi^3_{12} = -\,\mu^2\Pi^1_{23}.$$

Cu aceste valori, relațiile (84) devin

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^2_{ij} = 0\ \ (i, j = 1, 2, 3),\ \Pi^1_{11} = \mu\Pi^1_{13},\ \Pi^1_{12} = \mu\Pi^1_{23},\ \Pi^1_{33} = \frac{\Pi^1_{13}}{\mu},\\
&\Pi^3_{11} = -\,\mu^2\Pi^1_{13},\ \Pi^3_{12} = -\,\mu^2\Pi^1_{23},\ \Pi^3_{22} = -\,\mu\Pi^1_{22},\ \Pi^1_{13} \neq 0,\ \mu \neq 0.
\end{aligned}\right\}$$

Dacă $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = -\,\Pi^1_{13}z,\ \bar{y} = \Pi^1_{13}(\mu x + z),\ \bar{z} = y,$$

conexiunea Π^i_{jk} devine identică cu conexiunea [I] cu $\eta = 0$.

Dacă $\Pi^1_{23} \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \mu\Pi^1_{13}x,\ \bar{y} = \mu\Pi^1_{23}y,\ \bar{z} = \Pi^1_{13}z,$$

conexiunea Π^i_{jk} devine

$$\overline{\Pi}^1_{1i} = \overline{\Pi}^1_{23} = \overline{\Pi}^1_{33} = -\,\overline{\Pi}^3_{1i} = -\,\overline{\Pi}^3_{23} = -\,\overline{\Pi}^3_{33} = 1,\ \overline{\Pi}^1_{22} = -\,\overline{\Pi}^3_{22} = \alpha,$$

componentele nescrise fiind nule.

Deci, *conexiunea constantă* Π^i_{jk}, *care verifică sistemul* (7) *cu* $\Pi^1_{33} \neq 0$, *și* $\Delta_2 = 0$, *poate fi adusă, prin schimbări de variabile, la una din formele* [I] *cu* $\eta = 0$ *sau*

$$[\mathrm{III}] \qquad \Pi^1_{1i} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = -\,\Pi^3_{1i} = \Pi^3_{23} = -\,\Pi^3_{33} = 1,\ \Pi^1_{22} = -\,\Pi^3_{22} = \alpha,$$

componentele nescrise fiind nule.

Ne vom ocupa acum de conexiunea constantă Π^i_{jk} care verifică sistemul (8) cu $6\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11} = 0$.

Sistemul (8) se scrie în acest caz

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^1_{33} = \Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = 0,\ \Pi^1_{13} = -\frac{3\Pi^2_{21}}{\lambda},\ \Pi^2_{23} = \frac{\Pi^2_{21}}{\lambda},\ \Pi^3_{33} = \frac{2\Pi^2_{21}}{\lambda},\\ &\Pi^3_{11} = 8\lambda\Pi^2_{21},\ \Pi^3_{12} = \frac{\lambda(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})}{2},\ \Pi^3_{22} = -\lambda\Pi^1_{22},\\ &\Pi^1_{23} = \frac{2\Pi^1_{12} + 3\Pi^2_{22}}{2\lambda},\ \Pi^1_{11} = -6\Pi^2_{21}. \end{aligned}\right\} \quad (8')$$

Cu aceste valori, ecuația (34), pentru $i = j = k = 1,\ l = 3,$ devine

$$\Pi^2_{21} = 0,$$

iar ecuațiile (34), pentru $i = 1,\ j = k = 2,\ l = 3$ și $i = 3,\ j = l = 2,\ k = 1$, ne dau

$$\Pi^2_{22}(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}) = 0,\ \Pi^2_{22}(3\Pi^2_{22} + 2\Pi^1_{12}) = 0.$$

De aici rezultă $\Pi^2_{22} = 0$.
Deci sistemul (8′) devine

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^i_{st} = \Pi^2_{21} = 0\ (i = 1, 2, 3;\ s, t = 1, 3),\ \Pi^3_{12} = -\lambda\Pi^1_{12},\\ &\Pi^1_{23} = \frac{\Pi^1_{12}}{\lambda},\ \Pi^3_{22} = -\lambda\Pi^1_{22}. \end{aligned}\right\} \quad (8'')$$

Cu aceste valori, celelalte ecuații din (34) și ecuațiile (34′) sînt identic satisfăcute.

Avînd în vedere că nu toate numerele Π^1_{22}, Π^1_{23}, Π^1_{33} pot fi nule și că $\Pi^1_{33} = 0$, rezultă că avem de considerat trei cazuri

1. $\Pi^1_{22} = 0,\ \Pi^1_{23} \neq 0$;
2. $\Pi^1_{22} \neq 0,\ \Pi^1_{23} = 0$;
3. $\Pi^1_{22} \neq 0,\ \Pi^1_{23} \neq 0$.

În primul caz, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \lambda x,\ \bar{y} = \Pi^1_{12} y,\ \bar{z} = z,$$

conexiunea Π^i_{jk} devine

$$\bar{\Pi}^1_{12} = \bar{\Pi}^1_{23} = -\bar{\Pi}^3_{12} = -\bar{\Pi}^3_{32} = 1,$$

celelalte componente fiind nule.

În al doilea caz, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \Pi^1_{22} x,\ \bar{y} = \Pi^1_{22} y,\ \bar{z} = \frac{\Pi^1_{22}}{\lambda} z,$$

conexiunea devine

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{\Pi}^3_{22} = 1,$$

componentele nescrise fiind nule.

Dacă Π^1_{22}, $\Pi^1_{23} \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = -\frac{(\Pi^1_{12})^2}{\Pi^1_{22}}x, \quad \bar{y} = \Pi^1_{12}y, \quad \bar{z} = -\frac{(\Pi^1_{12})^2}{\lambda\Pi^1_{22}}z,$$

conexiunea Π^i_{jk} devine

$$\overline{\Pi}^1_{12} = \overline{\Pi}^1_{23} = \overline{\Pi}^3_{22} = -\overline{\Pi}^3_{12} = -\overline{\Pi}^1_{22} = -\overline{\Pi}^3_{32} = 1,$$

celelalte componente fiind nule.

Deci, *conexiunea constantă* Π^i_{jk}, *care verifică sistemul* (8) *cu* $6\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11} = 0$, *poate fi adusă, prin schimbări de variabile, la una din formele*

$$[\text{IV}] \qquad \Pi^1_{12} = \Pi^1_{23} = -\Pi^3_{12} = -\Pi^3_{32} = 1,$$

$$[\text{V}\ ] \qquad \Pi^1_{22} = \Pi^3_{22} = 1,$$

$$[\text{VI}] \qquad \Pi^1_{12} = \Pi^1_{23} = \Pi^3_{22} = -\Pi^3_{12} = -\Pi^1_{22} = -\Pi^3_{32} = 1,$$

componentele nescrise fiind nule.

Vom considera acum conexiunea Π^i_{jk} care verifică sistemul (9) cu condiția

$$2\Pi^1_{12}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^2_{22}(7\Pi^1_{13} + 9\Pi^2_{23}) + \Pi^1_{23}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) = 0. \qquad (9')$$

Avînd în vedere ultimele relații din (9'), ecuațiile (34) pentru $i = j = 1$, $k = 2$, $l = 3$; $i = 1$, $j = k = 2$, $l = 3$ și $i = 1$, $j = l = 3$, $k = 2$ ne dau

$$\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21} = 0, \quad \Pi^2_{22} = 0, \quad \Pi^1_{13} + \Pi^2_{23} = 0.$$

Înlocuind aceste valori în (9) și (9') obținem

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^1_{11} = -\frac{\Pi^1_{12}\Pi^1_{13}}{\Pi^1_{23}}, \quad \Pi^2_{21} = \frac{\Pi^1_{12}\Pi^1_{13}}{2\Pi^1_{23}}, \quad \Pi^2_{11} = -\frac{2\Pi^1_{12}(\Pi^1_{13})^2}{(\Pi^1_{23})^2}, \\ &\Pi^3_{11} = -\frac{2\Pi^1_{13}(\Pi^1_{12})^2}{(\Pi^1_{23})^2}, \quad \Pi^2_{13} = -\frac{(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{22}}, \quad \Pi^3_{12} = -\frac{(\Pi^1_{12})^2}{\Pi^1_{23}}, \\ &\Pi^2_{23} = -\Pi^1_{13}, \quad \Pi^2_{22} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (85)$$

Cu aceste valori, ecuația (34) pentru $i = 3$, $j = k = 1$, $l = 2$ devine

$$\Pi^1_{12} \cdot \Pi^1_{13} = 0.$$

Vom presupune deci că $\Pi^1_{12} = 0$, cazul $\Pi^1_{13} = 0$ deducîndu-se din acesta prin schimbarea indicilor 2 cu 3.

Relațiile (85) devin deci

$$\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = \Pi^1_{12} = \Pi^2_{22} = \Pi^3_{32} = \Pi^2_{11} = \Pi^3_{11} = \Pi^3_{12} = 0,$$

$$\Pi^2_{13} = -\frac{(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{23}}, \quad \Pi^2_{23} = -\Pi^1_{13}.$$

Cu aceste valori, celelalte ecuații (34) și (34)′ sînt identic verificate. Avem deci de considerat două cazuri

$$1.\ \Pi^1_{13} = 0; \qquad 2.\ \Pi^1_{13} \neq 0.$$

În cazul întîi, conexiunea are o singură componentă nenulă Π^1_{23}, pe care o putem reduce la 1 printr-o schimbare de variabile de forma

$$\bar{x} = x,\ \bar{y} = \Pi^1_{23} y,\ \bar{z} = z.$$

Deci, dacă $\Pi^1_{13} = 0$, conexiunea Π^i_{jk} se reduce la forma

$$\Pi^1_{23} = 1.$$

Dacă $\Pi^1_{13} \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \Pi^1_{13} x,\ \bar{y} = \Pi^1_{13} z,\ \bar{z} = \Pi^1_{13} x + \Pi^1_{23} y,$$

conexiunea Π^i_{jk} se reduce la $\bar{\Pi}^1_{23} = 1$, celelalte componente fiind nule.

Deci, *conexiunea constantă* Π^i_{jk}, *care verifică sistemul* (9), (9′), *se reduce, prin schimbări de variabile, la forma*

$$[\text{VII}] \qquad \Pi^1_{23} = 1,$$

componentele nescrise fiind nule.

În cazul conexiunii Π^i_{jk} care verifică sistemul (10) cu condiția

$$(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})\ (5\Pi^1_{13} + 6\Pi^2_{23}) - \Pi^1_{33}\ (5\Pi^1_{11} + 6\Pi^2_{21}) = 0, \qquad (10')$$

ecuațiile (34) pentru $i = j = 1,\ k = 2,\ l = 3$ și $i = 1,\ j = l = 3,\ k = 2$, devin

$$\Pi^1_{12} = 0,\ \Pi^3_{12} = 0.$$

Din prima ecuație (10) și din ecuația (10′) obținem

$$\Pi^1_{11} = \frac{(2\Pi^1_{13} - 3\Pi^2_{23})(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})}{2\Pi^1_{13}},\ \Pi^2_{21} = \frac{\Pi^2_{23}(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})}{4\Pi^1_{33}}, \qquad (86)$$

care înlocuite în ecuația (34) pentru $i = k = 1,\ j = l = 3$ ne dau

$$\Pi^2_{23}\,(3\Pi^1_{13} - 7\Pi^2_{23}) = 0. \qquad (87)$$

Vom presupune întîi că $\Pi^2_{23} = 0$. În acest caz, din (10) şi (86) obţinem

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{12} = \Pi^2_{21} = \Pi^2_{22} = \Pi^2_{23} = \Pi^3_{12} = \Pi^3_{22} = \Pi^3_{32}, \\ &\Pi^3_{33} = -\Pi^1_{13},\ \Pi^1_{33} \neq 0, \\ &\Pi^1_{11} = -\Pi^3_{31} = \frac{(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{33}},\ \Pi^2_{13} = \frac{\Pi^2_{33}\Pi^1_{13}}{\Pi^1_{33}},\ \Pi^2_{11} = \frac{\Pi^2_{33}(\Pi^1_{13})^2}{(\Pi^1_{33})^2},\ \Pi^3_{11} = -\frac{(\Pi^1_{13})^3}{(\Pi^1_{33})^2}. \end{aligned}\right\}$$

Cu aceste valori celelalte ecuaţii din (34) şi sistemul (34′) sînt identic satisfăcute.

Dacă $\Pi^1_{13} = \Pi^2_{33} = 0$, singura componentă nenulă a conexiunii este Π^1_{33}. Făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \Pi^1_{33}x,\ \bar{y} = \Pi^1_{33}z,\ \bar{z} = y,$$

această conexiune devine identică cu conexiunea [I] cu $\eta = 0$.

Dacă $\Pi^1_{13} \neq 0$, $\Pi^2_{33} = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = -\Pi^1_{13}z,\ \bar{y} = \frac{\Pi^1_{13}}{\Pi^1_{33}}(\Pi^1_{13}x + \Pi^1_{33}z),\ \bar{z} = y,$$

conexiunea Π^i_{jk} devine identică cu conexiunea [I] cu $\eta = 0$.

Dacă $\Pi^2_{33} \neq 0$, $\Pi^1_{13} = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \frac{1}{\Pi^1_{33}}x,\ \bar{y} = y,\ \bar{z} = \frac{1}{\Pi^2_{33}}y,$$

conexiunea devine identică cu conexiunea [V].

Dacă Π^1_{13}, $\Pi^2_{33} \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \frac{(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^2_{33}}y,\ \bar{y} = \frac{(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{33}}x + z,\ \bar{z} = z,$$

conexiunea Π^i_{jk} devine

$$\overline{\Pi}^1_{22} = -\overline{\Pi}^3_{22} = 1,$$

celelalte componente fiind nule.

Vom presupune acum că $\Pi^2_{23} \neq 0$. Din relaţia (87) rezultă

$$\Pi^1_{13} = \frac{7}{5}\Pi^2_{23} \neq 0.$$

Cu această valoare, din (87) şi (10) deducem

$$\Pi^1_{11} = \frac{40(\Pi^2_{23})^2}{9\Pi^1_{33}},\ \Pi^2_{21} = \frac{4(\Pi^2_{23})^2}{9\Pi^1_{33}},\ \Pi^2_{13} = \frac{4\Pi^2_{23}\Pi^2_{33}}{3\Pi^1_{33}},\ \Pi^2_{11} = \Pi^3_{11} = 0.$$

Înlocuind aceste valori în celelalte ecuații (34) obținem $\Pi^2_{23} = 0$, ceea ce este absurd, avînd în vedere presupunerea făcută.

Deci, *conexiunea constantă* Π^i_{jk} *care verifică sistemul* (*10*), (*10'*), *poate fi adusă, prin schimbări de variabile, la una din formele* : [*I*] *cu* $\eta = 0$, [*V*] *sau*

$$[V']. \qquad \Pi^1_{22} = -\Pi^3_{22} = 1$$

componentele nescrise fiind nule.

Ne vom ocupa acum de conexiunea constantă Π^i_{jk} care verifică sistemul (11) cu condiția

$$32\,\Pi^2_{22}\Pi^2_{33}(\Pi^1_{23})^2 - (3\,\Pi^2_{22} + 2\,\Pi^1_{12})^2(\Pi^1_{33})^2 - 4(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})(3\,\Pi^2_{22} + \\ + \Pi^1_{12})\,\Pi^1_{23}\,\Pi^1_{33} + 4\,\Pi^1_{33}(\Pi^1_{23})^2(2\,\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) = 0. \tag{11'}$$

Avînd în vedere relațiile (11), ecuația (34) pentru $i = 1$, $j = k = 2$, $l = 3$ și pentru $i = k = 1$, $j = l = 2$, ne dă

$$\Pi^2_{22} = 0, \quad \Pi^1_{11} = 0.$$

Din prima ecuație (11) deducem

$$\Pi^3_{12} = -\frac{(\Pi^1_{12})^2}{\Pi^1_{23}}.$$

Cu aceste valori ecuația (34) pentru $i = 3$, $j = k = 1$, $l = 2$ ne dă

$$\Pi^3_{11}\,\Pi^1_{12} = 0. \tag{88}$$

Vom presupune întîi că $\Pi^1_{12} = 0$. În acest caz din (11') rezultă $\Pi^2_{21} = 0$, deci

$$\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = \Pi^1_{12} = \Pi^2_{22} = \Pi^3_{32} = \Pi^1_{22} = \Pi^3_{12} = \Pi^3_{23} = 0.$$

Ecuația (34), pentru $i = j = 2$, $k = 1$, $l = 3$ și $i = 1$, $j = l = 3$, $k = 2$, ne dă

$$\Pi^2_{11} = 0, \quad \Pi^3_{33} = 0.$$

Înlocuind aceste valori în sistemul (11) obținem

$$\Pi^2_{13} = -\frac{(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{23}}, \quad \Pi^2_{33} = -\frac{\Pi^1_{33}\,\Pi^1_{13}}{\Pi^1_{23}}, \quad \Pi^3_{11} = 0.$$

Cu aceste valori, celelalte ecuații (34) sînt identic satisfăcute.

Dacă $\Pi^1_{13} = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = -\Pi^1_{33}x, \; \bar{y} = -\Pi^1_{23}y, \; \bar{z} = \Pi^1_{23}y + \Pi^1_{33}z,$$

conexiunea devine identică cu conexiunea [I] cu $\eta = -1$.

Dacă $\Pi^1_{13} \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = -\frac{(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{33}} x, \quad \bar{y} = \Pi^1_{13} z, \quad \bar{z} = -\frac{\Pi^1_{13}\Pi^1_{23}}{\Pi^1_{33}} y,$$

conexiunea devine identică cu conexiunea [VI].

Vom considera acum cazul în care $\Pi^1_{12} \neq 0$. Din (88) rezultă că $\Pi^3_{11} = 0$. În acest caz din ecuațiile (11) rezultă

$$\Pi^2_{11} = 0, \quad \Pi^1_{13} = \Pi^2_{23}, \quad \Pi^2_{21} = \frac{\Pi^1_{12}\Pi^2_{33}}{\Pi^1_{33}}, \quad \Pi^2_{13} = \frac{(2\Pi^1_{13}\Pi^1_{23} - \Pi^1_{12}\Pi^1_{33})^2}{(\Pi^1_{23})^3},$$

$$\Pi^2_{33} = \frac{\Pi^1_{33}(2\Pi^1_{13}\Pi^1_{23} - \Pi^1_{12}\Pi^1_{13})}{(\Pi^1_{23})^2}.$$

Cu aceste valori, ecuația (11′) ne dă

$$\Pi^1_{13} = \frac{3\Pi^1_{12}\Pi^1_{33}}{4\Pi^1_{23}} \neq 0.$$

Scriind acum ecuația (34) pentru $i = 1$, $j = l = 3$, $k = 2$, obținem

$$\Pi^1_{12} = 2\Pi^1_{23}.$$

Deci conexiunea este

$$\Pi_{11} = \Pi^i_{22} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^3_{32} = 2\Pi^1_{23}, \quad \Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} = \frac{3}{2}\Pi^1_{33},$$

$$\Pi^3_{33} = -3\Pi^1_{33},$$

$$\Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = 2\Pi^1_{33}, \quad \Pi^3_{12} = -4\Pi^1_{23}, \quad \Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = \frac{(\Pi^1_{33})^2}{\Pi^1_{23}},$$

$$\Pi^1_{23} \neq 0, \quad \Pi^1_{33} \neq 0.$$

Înlocuind aceste valori în ecuația (34) pentru $i = j = k = 1, l = 2$, obținem

$$\Pi^1_{23}\Pi^1_{33} = 0,$$

ceea ce este imposibil.

Deci, *conexiunea constantă* Π^i_{jk} *care verifică sistemul* (*11*), (*11′*), *poate fi adusă, prin schimbări de variabile la una din formele* [*I*] *cu* $\eta = -1$ *sau* [*VI*].

Vom considera acum conexiunea Π^i_{jk} care verifică sistemul (12) cu condiția

$$(\Pi^1_{22})^3(\Pi^2_{33})^2 + (\Pi^1_{33})^3(\Pi^3_{22})^2 + 4\Pi^1_{33}\Pi^2_{33}(\Pi^1_{22})^2(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) - 2\Pi^3_{22}\Pi^1_{22}(\Pi^1_{33})^2(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}) + (\Pi^1_{22}\Pi^1_{33})^2(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) = 0. \tag{12′}$$

Scriind ecuația (34) pentru $i = j = 1, k = 2, l = 3$; $i = 1, j = k = 2$, $l = 3$ și $i = 1, j = l = 3, k = 2$ obținem

$$\Pi^2_{13} = \frac{\Pi^1_{13}\Pi^3_{12}}{\Pi^1_{22}}, \quad \Pi^3_{22} = \frac{\Pi^1_{22}(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})}{\Pi^1_{33}}, \quad \Pi^2_{33} = -\frac{\Pi^1_{33}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})}{\Pi^1_{22}}.$$

Înlocuind aceste valori în sistemul (12), (12′) obținem

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = \frac{(\Pi^1_{22})^2(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})}{(\Pi^1_{33})^2}, \quad \Pi^3_{12} = \frac{(\Pi^1_{22})^2(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})}{(\Pi^1_{33})^3},\\
&\Pi^2_{13} = \frac{\Pi^1_{22}(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})}{(\Pi^1_{33})^2}, \quad \Pi^2_{33} = -\frac{\Pi^1_{22}(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})}{\Pi^1_{33}},\\
&\Pi^3_{22} = \frac{\Pi^1_{22}(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})}{\Pi^1_{33}}, \quad \Pi^1_{11} = \frac{-2(\Pi^1_{22})^3(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})^2}{(\Pi^1_{33})^4},\\
&\Pi^2_{11} = \frac{(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})\Pi^1_{22}[(\Pi^1_{33})^3(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})^2 + 5(\Pi^1_{22})^3(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})^2]}{(\Pi^1_{33})^6},\\
&\Pi^2_{21} = \frac{(\Pi^1_{33})^3(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})^2 + (\Pi^1_{22})^3(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})^2}{(\Pi^1_{33})^4},\\
&\Pi^3_{11} = \frac{(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})[(\Pi^1_{33})^3(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})^2 + 5(\Pi^1_{22})^3(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})^2]}{(\Pi^1_{33})^5}.
\end{aligned}\right\}$$

Scriind ecuația (34) pentru $i = 2$, $j = l = 3$, $k = 1$ și $i = 3$, $j = l = 2$, $k = 1$ rezultă

$$\left.\begin{aligned}
&(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})[3(\Pi^1_{22})^3(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})^2 + (\Pi^1_{33})^3(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})^2] = 0,\\
&(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})[3(\Pi^1_{22})^3(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})^2 - (\Pi^1_{33})^3(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})(\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Vom presupune întîi că $\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13} = 0$. În acest caz prima ecuație a acestui sistem este satisfăcută, iar din a doua rezultă $3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13} = 0$, deci $\Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} = 0$.

Cu aceste valori toate componentele tensorului Π^i_{jk} sînt nule afară de Π^1_{22} și Π^1_{33}, deci printr-o schimbare de variabile conexiunea devine identică cu conexiunea [I] cu $\eta = \pm 1$.

Dacă $\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13} \neq 0$, din prima ecuație (89) rezultă

$$(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})^2 = -\frac{(\Pi^1_{33})^3}{3(\Pi^1_{22})^3}(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})^2 \neq 0, \quad (89')$$

care înlocuite în a doua ne dă

$$\Pi^2_{23} = 0.$$

Deci $\Pi^1_{13} \neq 0$. Cu aceste valori ecuația (89′) devine

$$(\Pi^1_{33})^3 + 3(\Pi^1_{22})^3 = 0$$

și deci

$$\Pi^1_{33} = -\sqrt[3]{3}\,\Pi^1_{22}.$$

conexiunea Π^i_{jk} se scrie în acest caz

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{3}}\frac{(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{22}},\quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}\Pi^1_{13},\quad \Pi^2_{13} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\frac{(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{22}},\\
&\Pi^3_{12} = \frac{(\Pi^1_{13})^2}{3\,\Pi^1_{22}},\quad \Pi^3_{22} = -\Pi^2_{33} = \frac{\Pi^1_{13}}{\sqrt[3]{3}},\quad \Pi^2_{11} = \frac{2}{9}\frac{(\Pi^1_{13})^3}{(\Pi^1_{22})^2},\quad \Pi^3_{11} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{9}\frac{(\Pi^1_{13})^3}{(\Pi^1_{22})^2},\\
&\Pi^1_{33} = -\sqrt[3]{3}\,\Pi^1_{22},\quad \Pi^2_{23} = 0,\quad \Pi^1_{13} \neq 0,\quad \Pi^1_{22} \neq 0.
\end{aligned}\right\}$$

Înlocuind aceste expresii în ecuația (37) pentru $i = 3$, $j = k = 1$, $l = 2$, obținem $\Pi^1_{13} = 0$, ceea ce este absurd.

Deci, *conexiunea constantă* Π^i_{jk}, *care verifică sistemul* (*12*), (*12′*), *poate fi adusă prin schimbări de variabile la forma* [I] *cu* $\eta = \pm 1$.

Ne vom ocupa acum de conexiunea Π^i_{jk} care verifică sistemul (13) cu condiția

$$\begin{aligned}
&(\Pi^1_{22})^3\,(\Pi^2_{33})^2 + 8\Pi^1_{22}\Pi^1_{23}\Pi^1_{33}\Pi^2_{33}\Pi^3_{22} + (\Pi^1_{33})^3\,(\Pi^3_{22})^2 +\\
&+ 2\Pi^1_{22}\Pi^1_{33}\,[2\,\Pi^1_{22}\Pi^2_{33}\,(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) - \Pi^1_{33}\Pi^3_{22}\,(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})\,] - \qquad (13')\\
&\qquad - (\Pi^1_{22}\Pi^1_{33})^2\,(2\,\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) = 0.
\end{aligned}$$

Având în vedere că Π^1_{22} și Π^1_{23} sînt nenule, printr-o schimbare de variabile putem presupune $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 1$. Deci sistemul (13), (13′) se scrie

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^1_{33}(2\Pi^1_{12} + 3\Pi^2_{22} + 2\Pi^3_{22}) - \Pi^2_{33} = 0,\\
&\Pi^1_{33}(2\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11}) + \Pi^1_{33}\Pi^3_{22}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) - \Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) = 0,\\
&\Pi^1_{33}(2\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}) - 2\Pi^2_{33} + (\Pi^1_{33})^2\,\Pi^3_{22} = 0,\\
&\Pi^3_{22}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22} + \Pi^3_{22}) - \Pi^3_{12} = 0,\\
&\Pi^2_{33}\,[\,\Pi^1_{33}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^2_{33}\,] - \Pi^2_{13}(\Pi^1_{33})^2 = 0,\\
&\Pi^1_{33}\Pi^2_{33}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) - 2(\Pi^2_{33})^2(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22} + \Pi^3_{22}) + \Pi^2_{11}(\Pi^1_{33})^2 = 0,\\
&\Pi^1_{33}\Pi^3_{22}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) - 2\Pi^2_{33}\Pi^3_{22}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22} + \Pi^3_{22}) + \Pi^1_{33}\Pi^3_{11} = 0,\\
&(\Pi^2_{33})^2 + 8\Pi^2_{33}\Pi^3_{22}\Pi^1_{33} + (\Pi^3_{22})^2(\Pi^1_{33})^3 + 2\Pi^1_{33}\,[2\Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) -\\
&- \Pi^1_{33}\Pi^3_{22}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})\,] - (\Pi^1_{33})^2(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) = 0,\\
&\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 1,\quad \Pi^1_{33} \neq 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (90)$$

Scriind ecuația (34) pentru $i = 1$, $j = k = 2$, $l = 3$ și $i = 1$, $j = l = 3$, $k = 2$, obținem

$$\Pi^2_{33} = 2(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) - \Pi^1_{33}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}), \quad \Pi^3_{22} = \frac{\Pi^1_{23} - \Pi^1_{13} - 2\Pi^2_{22}}{\Pi^1_{33}}. \tag{91}$$

Cu aceste valori, ecuația întîia și a treia din (90) ne dă

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^1_{13} = \Pi^1_{33}(\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) - \Pi^2_{22}, \\ &\Pi^2_{23}(3\Pi^1_{33} - 4) - 4\Pi^2_{22}(\Pi^1_{33} - 1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Vom presupune întîi că $\Pi^1_{33} = 1$. În acest caz din (92) rezultă

$$\Pi^2_{23} = 0, \quad \Pi^1_{13} = \Pi^1_{12},$$

care înlocuite în celelalte ecuații (90) și în (91) ne dau

$$\Pi^2_{33} = -\Pi^2_{22}, \quad \Pi^3_{22} = -\Pi^1_{12} - 2\Pi^2_{22}, \quad \Pi^1_{11} = -(\Pi^1_{12})^2 - 4\Pi^1_{12}\Pi^2_{22} - 9(\Pi^2_{22})^2,$$

$$\Pi^2_{21} = (\Pi^1_{12})^2 + 2\Pi^1_{12}\Pi^2_{22} + 4(\Pi^2_{22})^2, \quad \Pi^3_{12} = (\Pi^2_{22} - \Pi^1_{12})(2\Pi^2_{22} + \Pi^1_{12}),$$

$$\Pi^2_{13} = \Pi^2_{22}(\Pi^2_{22} - \Pi^1_{12}),$$

$$\Pi^2_{11} = \Pi^2_{22}[3(\Pi^1_{12})^2 + 10\Pi^1_{12}\Pi^2_{22} + 15(\Pi^2_{22})^2], \quad \Pi^3_{11} = (\Pi^1_{12} + 2\Pi^2_{22})[3(\Pi^1_{12})^2 + 8\Pi^1_{12}\Pi^2_{22} + 17(\Pi^2_{22})^2].$$

Ecuația (34) pentru $i = 2$, $j = l = 3$, $k = 1$ și $i = 3$, $j = l = 2$, $k = 1$ ne dă

$$(\Pi^1_{12} + 2\Pi^2_{22})[3(\Pi^1_{12})^2 + 7\Pi^1_{12}\Pi^2_{22} + 18(\Pi^2_{22})^2] = 0,$$

$$\Pi^2_{22}[(\Pi^1_{12})^2 + 2\Pi^1_{12}\Pi^2_{22} + 4(\Pi^2_{22})^2] = 0,$$

de unde rezultă $\Pi^1_{12} = \Pi^2_{22} = 0$.

Deci, dacă $\Pi^1_{33} = 1$, conexiunea Π^i_{jk} are singurele componente nenule $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} \neq 0$, deci sîntem în cazul [II] cu $\alpha = 1$.

Vom presupune acum că $\Pi^1_{33} \neq 1$. Din (92) rezultă

$$\Pi^2_{22} = \frac{b(3c - 4)}{4(c - 1)}, \quad \Pi^1_{12} = \frac{4a - b(3c - 4)}{4c},$$

unde am pus $\Pi^1_{13} = a$, $\Pi^2_{23} = b$, $\Pi^1_{33} = c$ $\quad (c \neq 0, 1)$.

Cu aceste valori ecuațiile (90), (91) devin

$$\Pi^2_{33} = \frac{bc(3c - 2)}{4(c - 1)}, \quad \Pi^3_{22} = \frac{2a(1 - c) + b(2 - c)}{2c(c - 1)},$$

$$\Pi^2_{21} = \frac{8(c - 1)^2 a^2 - 4(c - 1)^2 ab - (9c^3 - 23c^2 + 12)b^2}{16c(c - 1)^2},$$

$$\Pi^1_{11} = \frac{24(c-1)^2 ab + (9c^3 - 18c^2 - 20c + 24)b^2}{16c(c-1)^2},$$

$$\Pi^3_{12} = \frac{-8(c-1)^2 a^2 + 2(c-1)(c-2)(3c-4)ab + (c-2)^2(3c-2)b^2}{8c^2(c-1)^2},$$

$$\Pi^2_{13} = \frac{b(3c-2)[4a(c-1) + b(3c^2 - 6c + 4)]}{16c(c-1)^2}.$$

În acest caz din ecuațiile (34) rezultă $a = b = 0$ și deci, singurele componente ale conexiunii sînt $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 1$, $\Pi^1_{33} \neq 0, 1$. Sîntem deci în cazul [II] cu $\alpha \neq 1$.

Deci, *conexiunea constantă* Π^i_{jk} *care verifică sistemul* (*13*), (*13'*) *poate fi adusă prin schimbări de variabile la forma* [*II*].

Ne vom ocupa acum de conexiunea care verifică sistemul (15), (17), (22), (23). Din (17) rezultă

$$\Pi^1_{12} = \frac{\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23} - \lambda^2\Pi^3_{22}}{4\lambda}, \quad \Pi^2_{22} = \frac{\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23} + \lambda^2\Pi^3_{22}}{2\lambda}, \tag{17'}$$

$$\Pi^2_{33} = -\lambda(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}).$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile (34) obținem

$$\left.\begin{aligned}
&(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})^2 + \lambda^2\Pi^3_{22}(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0,\\
&\Pi^2_{11}\Pi^2_{22} + (\Pi^1_{11})^2 - \Pi^3_{11}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0,\\
&\Pi^2_{11}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) - 2\Pi^1_{11}\Pi^2_{13} + \lambda\Pi^3_{11}(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0,\\
&\Pi^3_{11}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) - 2\lambda\Pi^1_{11}\Pi^3_{12} - \lambda\Pi^2_{11}\Pi^3_{22} = 0,\\
&\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) - \lambda^2\Pi^3_{12}(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0,\\
&\Pi^3_{12}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23} + \lambda^2\Pi^3_{22}) - \lambda\Pi^3_{22}(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{23}) = 0,\\
&\lambda(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) + 2\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0,\\
&(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) + \lambda\Pi^3_{12}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) - \lambda\Pi^2_{13}\Pi^3_{22} = 0,\\
&(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) + \lambda\Pi^3_{12}(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) + \lambda\Pi^2_{13}\Pi^3_{22} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Vom presupune întîi că $3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23} = 0$. Din prima ecuație (93) rezultă că $\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23} = 0$ și deci

$$\Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} = 0.$$

Cu aceasta sistemul (17') ne dă

$$\Pi^1_{12} = -\frac{\lambda}{4}\Pi^3_{22}, \qquad \Pi^2_{22} = \frac{\lambda}{2}\Pi^3_{22}.$$

În acest caz prima neegalitate (23) nu este satisfăcută și deci $3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23} \neq 0$. Prima ecuație (93) ne dă

$$\Pi^3_{22} = -\frac{(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})^2}{\lambda^2(3\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})}$$

și deci

$$\Pi^1_{12} = \frac{\Pi^1_{13}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})}{\lambda(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})}, \quad \Pi^2_{22} = \frac{(\Pi^2_{23})^2 - (\Pi^1_{13})^2}{\lambda(3\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})}.$$

Cu aceste valori prima neegalitate (23) nu este satisfăcută.

Deci, *sistemul (15), (17), (22), (23) nu are soluții dacă conexiunea* Π^i_{jk} *este constantă.*

Același rezultat se obține și în cazul sistemului (15), (17) (22), (24).

Ne vom ocupa acum de sistemul (15), (26), (27).

Vom presupune întîi că $a = 0$. În acest caz, din primele două neegalități (26) rezultă $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b \neq 0$, iar din (27)

$$\Pi^3_{22} = 0, \quad \Pi^2_{22} = 2\Pi^1_{12},$$

care înlocuite în ecuația (34) pentru $i = k = 1$, $j = l = 2$ ne dau

$$\Pi^1_{12} = 0,$$

și deci $a_2 = 0$, ceea ce este imposibil.

Deci nu putem avea $a = 0$.

În cazul $b = 0$, din neegalitățile (26) rezultă $a \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$, iar din (27)

$$\Pi^2_{33} = 0, \quad \Pi^2_{23} = -3\Pi^1_{13},$$

care înlocuite în ecuația (34) pentru $i = k = 1$, $j = l = 3$ ne dau

$$\Pi^1_{13} = 0,$$

și deci $b_1 = 0$, ceea ce este imposibil.

Deci avem $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Vom presupune acum că avem $c = 0$. În acest caz sistemul (26), (27) devine

$$\left.\begin{aligned}
&[2\Pi^2_{33}\Pi^3_{12} + (3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11})]a + [2\Pi^3_{22}\Pi^2_{13} + \\
&\qquad + (\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})(3\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21})]b = 0,\\
&2a\Pi^2_{13} + (\Pi^1_{11} - 2\Pi^2_{21})b = 0, \Pi^2_{11} = \Pi^3_{11} = 0,\\
&a(3\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) + 2b\Pi^3_{12} = 0,\\
&a^2\Pi^2_{33} + 2ab(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + b^2(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}) = 0,\\
&a^2(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) - 2ab(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) - b^2\Pi^3_{22} = 0,\\
&(2\Pi^1_{12} - \Pi^2_{22})(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{22}) - \Pi^2_{33}\Pi^3_{22} \neq 0,\\
&\Pi^2_{33}a^2 - (\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})b^2 \neq 0, (3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})a^2 + \Pi^3_{22}b^2 \neq 0.
\end{aligned}\right\} \quad (94)$$

Scriind ecuația (34) pentru $i = l = 2, j = k = 1$; $i = 2, j = k = 1$, $l = 3$ și $i = 3, j = k = 1, l = 2$, obținem

$$\Pi^1_{11}\Pi^2_{13} = 0,\ \Pi^1_{11}\Pi^3_{12} = 0,\ \Pi^1_{11}(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) = 0. \tag{95}$$

Vom presupune întîi că $\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = 0$. În acest caz din (94) rezultă $\Pi^2_{13} = \Pi^3_{12} = 0$, iar celelalte ecuații (34) devin

$$\left.\begin{aligned} \Pi^2_{22}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) + \Pi^3_{22}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0, \\ (\Pi^1_{13})^2 - (\Pi^2_{23})^2 + \Pi^2_{22}\Pi^2_{33} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Dacă $\Pi^2_{22} = 0$, (96) devine

$$\left.\begin{aligned} \Pi^3_{22}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0,\ (\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0, \\ 2\Pi^1_{12}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) - \Pi^2_{33}\Pi^3_{22} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{96'}$$

iar prima neegalitate (94)

$$\Pi^1_{12}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) \neq 0,$$

deci

$$\Pi^1_{12} \neq 0,\ \Pi^1_{13} + \Pi^2_{23} \neq 0.$$

Sistemul (96′) ne dă în acest caz

$$\Pi^3_{22} = 0,\ \Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} \neq 0.$$

Înlocuind aceste valori în (94) obținem

$$\left.\begin{aligned} \Pi^1_{13}\,a - \Pi^1_{12}\,b = 0, \\ \Pi^2_{33}\,a^2 - 2\Pi^1_{12}\,b^2 = 0, \\ \Pi^2_{33}\,a^2 + 2\Pi^1_{12}\,b^2 \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

de unde deducem

$$\Pi^2_{33} = \frac{2(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{12}}.$$

Deci conexiunea este

$$\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = \Pi^2_{22} = \Pi^3_{33} = \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = \Pi^2_{11} = \Pi^3_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^3_{12} = \Pi^3_{22} = 0$$

$$\Pi^3_{22} = -\Pi^1_{12} \neq 0,\ \Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} \neq 0,\ \Pi^2_{33} = \frac{2(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{12}}.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x,\ \bar{y} = \Pi^1_{12}\,y,\ \bar{z} = \Pi^1_{13}\,z,$$

conexiunea devine

$$\overline{\Pi}^1_{12} = \overline{\Pi}^1_{13} = \overline{\Pi}^2_{23} = -\overline{\Pi}^3_{32} = 1,\ \overline{\Pi}^2_{33} = -\overline{\Pi}^3_{33} = 2,$$

componentele nescrise fiind nule.

Vom considera acum cazul în care $\Pi^2_{22} \neq 0$, $\Pi^3_{22} = 0$. Din (96) rezultă

$$\Pi^2_{33} = \frac{(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})}{\Pi^1_{12}},\ \Pi^3_{22} = -\frac{\Pi^2_{22}}{2} \neq 0.$$

Înlocuind aceste valori în (94) rezultă

$$3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23} = 0,\ 3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23} \neq 0,$$

deci, dacă $\Pi^2_{22} \neq 0$, avem $\Pi^3_{22} \neq 0$ și (96) ne dă

$$\Pi^2_{33} = -\frac{(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})}{\Pi^2_{22}},\ \Pi^1_{12} = -\frac{(\Pi^2_{22})^2 + \Pi^3_{22}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})}{2\Pi^2_{22}}.$$

Cu aceste valori sistemul (94) devine

$$(\Pi^2_{22})^2 - \Pi^3_{22}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) = 0,\ \Pi^1_{13} \neq 0.$$

Conexiunea este deci

$$\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = \Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^3_{11} = \Pi^3_{12} = 0,$$

$$\Pi^2_{23} = \frac{\Pi^1_{13}(\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})}{\Pi^1_{12}},\ \Pi^2_{33} = \frac{(\Pi^1_{13})^2(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})}{(\Pi^1_{12})^2},\ \Pi^3_{22} = -\frac{\Pi^1_{12}\Pi^2_{22}}{\Pi^1_{13}},$$

$$\Pi^1_{12} \neq 0,\ \Pi^2_{22} \neq 0,\ \Pi^1_{13} \neq 0.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x,\ \bar{y} = \Pi^1_{12} y,\ \bar{z} = \Pi^1_{13} z,$$

conexiunea Π^i_{jk} devine

$$\overline{\Pi}^1_{12} = \overline{\Pi}^1_{13} = 1,\ \overline{\Pi}^2_{22} = -\overline{\Pi}^3_{22} = \alpha,\ \overline{\Pi}^2_{23} = -\overline{\Pi}^3_{32} = \alpha + 1,$$
$$\overline{\Pi}^2_{33} = -\overline{\Pi}^3_{33} = \alpha + 2\ (\alpha \neq 0),$$

componentele nescrise fiind nule.

Vom considera acum cazul în care $\Pi^1_{11} = 0$, $\Pi^2_{21} \neq 0$. Sistemul (94) devine

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^2_{13}\Pi^3_{12} + (\Pi^2_{21})^2 = 0,\\
&[\Pi^2_{33}\Pi^3_{12} + \Pi^2_{21}(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})]\Pi^3_{12} - [\Pi^3_{22}\Pi^2_{13} + \Pi^2_{21}(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12})]\Pi^2_{21} = 0,\\
&\Pi^2_{33}(\Pi^3_{12})^2 - 2\Pi^2_{21}\Pi^3_{21}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + (\Pi^2_{21})^2(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}) = 0,\\
&(\Pi^3_{12})^2(3\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + 2\Pi^2_{21}\Pi^3_{12}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) - \Pi^3_{22}(\Pi^2_{21})^2 = 0,\\
&(2\Pi^1_{11} - \Pi^2_{22})(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) - \Pi^2_{33}\Pi^3_{22} \neq 0,\\
&\Pi^2_{33}(\Pi^3_{12})^2 - (\Pi^2_{21})^2(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}) \neq 0,\\
&(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})(\Pi^3_{12})^2 + \Pi^3_{22}(\Pi^2_{21})^2 \neq 0,
\end{aligned}\right\} \quad (98)$$

iar celelalte ecuații (34)

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^3_{12}\Pi^2_{22} - \Pi^3_{22}\Pi^2_{21} = 0,\\
&\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) - \Pi^2_{33}\Pi^2_{21} = 0,\\
&\Pi^2_{13}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) + \Pi^2_{33}\Pi^3_{12} = 0,\\
&2\Pi^2_{21}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) + \Pi^3_{12}(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) + \Pi^2_{13}\Pi^3_{22} = 0,\\
&\Pi^2_{13}(2\Pi^1_{12} - \Pi^2_{22}) - 2\Pi^2_{21}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^2_{33}\Pi^3_{12} = 0,\\
&\Pi^3_{12}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^2_{13}\Pi^3_{22} = 0,\\
&(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{23}) - \Pi^2_{33}\Pi^3_{22} = 0,\\
&(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) + \Pi^2_{22}\Pi^2_{33} = 0,\\
&\Pi^2_{22}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) + \Pi^3_{22}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{22}) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (99)$$

Din prima ecuație (98) deducem

$$\Pi^3_{12} = -\frac{(\Pi^2_{21})^2}{\Pi^2_{13}} \qquad (\Pi^2_{13} \neq 0),$$

care înlocuită în (99) ne dă

$$\Pi^1_{13} = \frac{\Pi^1_{12}\Pi^2_{13}}{\Pi^2_{21}},\ \Pi^2_{23} = \frac{\Pi^2_{13}(\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})}{\Pi^2_{21}},\ \Pi^2_{33} = \frac{(\Pi^2_{13})^2(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})}{(\Pi^2_{21})^2},$$

$$\Pi^3_{22} = -\frac{\Pi^2_{21}\Pi^2_{22}}{\Pi^2_{13}}.$$

Cu aceste valori sistemul (98) ne dă

$$\Pi^1_{12} \neq 0.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \Pi^2_{21}\, x,\ \bar{y} = \Pi^1_{12}\, y,\ \bar{z} = \frac{\Pi^1_{12}\Pi^2_{13}}{\Pi^2_{21}} z,$$

conexiunea devine

$$\bar{\Pi}^1_{12} = \bar{\Pi}^1_{13} = \bar{\Pi}^2_{21} = \bar{\Pi}^2_{13} = -\Pi^3_{12} = -\bar{\Pi}^3_{13} = 1,\ \bar{\Pi}^2_{22} = -\bar{\Pi}^3_{22} = \alpha,$$
$$\bar{\Pi}^2_{23} = -\bar{\Pi}^3_{32} = \alpha + 1,\ \bar{\Pi}^2_{33} = -\bar{\Pi}^3_{33} = \alpha + 2,$$

celelalte componente fiind nule.

În cazul în care $\Pi^1_{11} \neq 0$, din (95) rezultă

$$\Pi^2_{13} = \Pi^3_{12} = 0,\ \Pi^1_{11} = -2\Pi^2_{21} \neq 0,$$

care înlocuite în (94) ne dau $\Pi^2_{21} = 0$, ceea ce este imposibil.

Vom considera acum cazul în care $c \neq 0$. Sistemul (26), (27) devine

$$\left.\begin{aligned}
&[\Pi^2_{11}(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})+\Pi^2_{33}\Pi^3_{11}]\,a^2+[\Pi^2_{11}\Pi^3_{22}+\Pi^3_{11}(2\Pi^1_{12}-\Pi^2_{22})]\,b^2+\\
&\quad+\ [(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})(2\Pi^1_{12}-\Pi^2_{22})-\Pi^2_{33}\Pi^3_{22}]\,c^2=0,\\
&a^2\Pi^2_{33}+2ab\,(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})+b^2(\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12})=0,\\
&a^2(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})-2ab\,(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})-b^2\Pi^3_{22}=0,\\
&a^2\Pi^2_{11}+ac\,(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})+c^2(\Pi^2_{22}-2\Pi^1_{12})=0,\\
&a^2\Pi^3_{11}-2\Pi^3_{12}\,ac+\Pi^3_{22}c^2=0,\\
&b^2\Pi^2_{11}-2\Pi^2_{13}\,bc+\Pi^2_{33}c^2=0,\\
&b^2\Pi^3_{11}+(3\Pi^1_{11}+\Pi^2_{21})\,bc-(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})c^2=0,\\
&(2\Pi^1_{12}-\Pi^2_{22})(3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})-\Pi^2_{33}\Pi^3_{22}=0,\\
&\Pi^2_{33}a^2+(2\Pi^1_{12}-\Pi^2_{22})\,b^2\neq 0,\ (3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})\,a^2+\Pi^3_{22}b^2\neq 0,
\end{aligned}\right\}\quad(100)$$

iar sistemul (34)

$$\left.\begin{aligned}
&2\Pi^3_{12}\Pi^2_{22}-\Pi^3_{22}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})=0,\\
&\Pi^3_{11}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})-2\Pi^3_{12}\Pi^1_{11}-\Pi^3_{12}\Pi^2_{11}=0,\\
&2\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})-\Pi^2_{33}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})=0,\\
&\Pi^2_{13}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})+\Pi^2_{33}\Pi^3_{12}=0,\\
&2\Pi^2_{13}\Pi^1_{11}-\Pi^2_{11}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})+\Pi^2_{33}\Pi^3_{11}=0,\\
&2(\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})+2\Pi^3_{12}(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})=0,\\
&(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})+\Pi^2_{22}\Pi^2_{33}=0,\\
&\Pi^2_{22}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})+\Pi^3_{22}(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})=0,\\
&\Pi^3_{12}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})+\Pi^2_{13}\Pi^3_{22}=0,\\
&2\Pi^2_{13}\Pi^2_{22}+(2\Pi^2_{21}+\Pi^1_{11})(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0,\\
&\Pi^1_{11}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})+\Pi^2_{11}\Pi^2_{22}+\Pi^3_{11}(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})=0.
\end{aligned}\right\}\quad(101)$$

Vom presupune că $\Pi^3_{22}=0$. În acest caz, din prima neegalitate (100) rezultă

$$2\Pi^1_{12}-\Pi^2_{22}\neq 0,\ 3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23}=0, \qquad (102)$$

iar a opta ecuație (101) se scrie

$$\Pi^2_{22}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})=0. \qquad (103)$$

Presupunînd că $\Pi^2_{22}+2\Pi^1_{12}=0$, din a treia ecuație (100) rezultă $3\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23}=0$, care contrazice neegalitatea (102), deci $\Pi^2_{22}+2\Pi^1_{12}\neq 0$.

Din (103) rezultă $\Pi^2_{22}=0$ şi deci $\Pi^1_{12}\neq 0$.

Cu aceaste valori sistemul (101) devine

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^3_{12}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0,\ (\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0,\ (\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0,\\
&\Pi^1_{12}\Pi^3_{11}-\Pi^1_{11}\Pi^3_{12}=0,\ 2\Pi^1_{12}\Pi^2_{13}+\Pi^2_{33}\Pi^3_{12}=0,\\
&2\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})-\Pi^2_{33}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})=0,\\
&2\Pi^1_{12}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})+\Pi^3_{12}(3\Pi^2_{23}+\Pi^1_{13})=0,\\
&\Pi^1_{11}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})+\Pi^3_{11}(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})=0,\\
&2\Pi^2_{13}\Pi^1_{11}-\Pi^2_{11}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})+\Pi^2_{33}\Pi^3_{11}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(101')$$

Considerînd cazul în care $\Pi^1_{13}\neq\Pi^2_{23}$, din acest sistem rezultă

$$\Pi^2_{11}=\Pi^2_{13}=\Pi^3_{11}=\Pi^3_{12}=0,\ \Pi^1_{11}=-2\Pi^2_{21},\ \Pi^2_{23}=-\Pi^1_{13}\neq 0,$$

care înlocuite în (100) ne dau $\Pi^1_{12}\Pi^1_{13}=0$, ceea ce este absurd.

Deci avem $\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}$. Din (73′) rezultă

$$\Pi^2_{13}=\frac{\Pi^2_{33}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{22})}{4\Pi^1_{13}},\ \Pi^3_{11}=-\frac{\Pi^1_{11}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})}{2\Pi^1_{13}},\ \Pi^3_{12}=-\frac{\Pi^1_{12}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})}{2\Pi^1_{13}},$$

iar sistemul (100)

$$\Pi^2_{11}=\frac{\Pi^1_{11}\Pi^2_{21}}{\Pi^1_{12}},\ \Pi^2_{33}=\frac{2(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{12}},\ (\Pi^1_{11}-2\Pi^2_{21})(\Pi^1_{11}+\Pi^2_{21})=0.\quad(100')$$

Presupunînd $\Pi^1_{11}=2\Pi^2_{21}$, conexiunea Π^i_{jk} se scrie

$$\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=\Pi^2_{22}=\Pi^3_{22}=0,\ \Pi^1_{11}=2\Pi^2_{21},\ \Pi^3_{31}=-3\Pi^2_{21},\ \Pi^3_{32}=-\Pi^1_{12}\neq 0,$$

$$\Pi^2_{23}=\Pi^1_{13}\neq 0,\ \Pi^3_{33}=-2\Pi^1_{13},\ \Pi^2_{11}=\frac{2(\Pi^2_{21})^2}{\Pi^1_{12}},\ \Pi^2_{13}=\frac{2\Pi^1_{13}\Pi^2_{21}}{\Pi^1_{12}},\ \Pi^2_{33}=\frac{2(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{12}},$$

$$\Pi^3_{11}=-\frac{4(\Pi^2_{21})^2}{\Pi^1_{13}},\ \Pi^3_{12}=-\frac{2\Pi^1_{12}\Pi^2_{21}}{\Pi^1_{13}}.$$

Făcînd o schimbare de variabile, această conexiune devine

$$\overline{\Pi}^1_{12}=\overline{\Pi}^1_{13}=\overline{\Pi}^2_{23}=-\overline{\Pi}^3_{32}=1,\ \overline{\Pi}^2_{33}=-=\overline{\Pi}^3_{33}=2,\ \overline{\Pi}^2_{21}=\varepsilon,\ \overline{\Pi}^1_{11}=\overline{\Pi}^2_{11}=\overline{\Pi}^2_{13}=-\overline{\Pi}^3_{12}=2\varepsilon,$$

$$\overline{\Pi}^3_{31}=-3\varepsilon,\ \overline{\Pi}^3_{11}=-4\varepsilon\qquad(\varepsilon=0,1),$$

componentele nescrise fiind nule.

Dacă $\Pi^1_{11}\neq 2\Pi^2_{21}$, din (100′) rezultă $\Pi^1_{11}=-2\Pi^2_{21}\neq 0$ şi conexiunea Π^i_{jk} se scrie

$$\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=\Pi^2_{22}=\Pi^2_{13}=\Pi^3_{11}=\Pi^3_{12}=\Pi^3_{22}=0,\ \Pi^1_{11}=-2\Pi^2_{21}\neq 0,\ \Pi^3_{31}=\Pi^2_{21},$$

$$\Pi^3_{32}=-\Pi^1_{12},\ \Pi^2_{23}=\Pi^1_{13}\neq 0,\ \Pi^3_{33}=-2\Pi^2_{13},\ \Pi^2_{11}=-\frac{2(\Pi^2_{21})^2}{\Pi^1_{12}},\ \Pi^2_{33}=\frac{2(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{12}}.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \Pi_{21}^{2}\, x, \bar{y} = \Pi_{12}^{1}\, y, \bar{z} = \Pi_{13}^{1}\, z,$$

această conexiune devine

$$\bar{\Pi}_{12}^{1} = \bar{\Pi}_{13}^{1} = \bar{\Pi}_{21}^{2} = \bar{\Pi}_{31}^{3} = \bar{\Pi}_{23}^{2} = -\bar{\Pi}_{32}^{3} = 1,\ \bar{\Pi}_{11}^{1} = \bar{\Pi}_{11}^{2} = -\bar{\Pi}_{33}^{2} = \bar{\Pi}_{33}^{3} = -2,$$

celelalte componente fiind nule.

Vom considera acum cazul în care $\Pi_{22}^{3} \neq 0$. Din sistemul (101) rezultă

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi_{13}^{2} = \frac{\Pi_{12}^{3}(\Pi_{23}^{2} - \Pi_{13}^{1})}{\Pi_{22}^{3}},\ \Pi_{11}^{2} = \frac{\Pi_{11}^{3}(2\Pi_{12}^{1} + \Pi_{22}^{2}) - 2\Pi_{11}^{1}\Pi_{12}^{3}}{\Pi_{22}^{3}},\\
&\Pi_{13}^{1} + \Pi_{23}^{2} = -\frac{\Pi_{22}^{2}(2\Pi_{12}^{1} + \Pi_{22}^{2})}{\Pi_{22}^{3}},\ \Pi_{11}^{1} + 2\Pi_{21}^{2} = \frac{2\Pi_{12}^{3}\Pi_{22}^{2}}{\Pi_{22}^{3}},\\
&\Pi_{22}^{2}[(\Pi_{13}^{1} - \Pi_{23}^{2})(2\Pi_{12}^{1} + \Pi_{22}^{2}) - \Pi_{33}^{2}\Pi_{22}^{3}] = 0,\\
&\Pi_{11}^{3}[(\Pi_{13}^{1} - \Pi_{23}^{2})(2\Pi_{12}^{1} + \Pi_{22}^{2}) - \Pi_{33}^{2}\Pi_{22}^{3}] = 0,\\
&\Pi_{12}^{3}[(\Pi_{13}^{1} - \Pi_{23}^{2})(2\Pi_{12}^{1} + \Pi_{22}^{2}) - \Pi_{33}^{2}\Pi_{22}^{3}] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (101'')$$

Dacă $(\Pi_{13}^{1} - \Pi_{23}^{2})(2\Pi_{21}^{2} + \Pi_{22}^{2}) - \Pi_{33}^{2}\Pi_{22}^{3} \neq 0$, din acest sistem rezultă că $\Pi_{11}^{3} = \Pi_{12}^{3} = 0$, care înlocuite în a cincea ecuație (100) ne dă $\Pi_{22}^{3} = 0$, ceea ce este absurd. Deci

$$(\Pi_{13}^{1} - \Pi_{23}^{2})(2\Pi_{12}^{1} + \Pi_{22}^{2}) - \Pi_{33}^{2}\Pi_{22}^{3} = 0.$$

Din această relație și (101'') rezultă

$$\Pi_{21}^{2} = \frac{2\Pi_{22}^{2}\Pi_{12}^{3} - \Pi_{11}^{1}\Pi_{22}^{3}}{2\Pi_{22}^{3}},\ \Pi_{23}^{2} = -\frac{\Pi_{13}^{1}\Pi_{22}^{3} + \Pi_{22}^{2}(2\Pi_{12}^{1} + \Pi_{22}^{2})}{\Pi_{22}^{3}},$$

$$\Pi_{13}^{2} = -\frac{\Pi_{12}^{3}[2\Pi_{13}^{1}\Pi_{22}^{3} + \Pi_{22}^{2}(2\Pi_{12}^{1} + \Pi_{22}^{2})]}{(\Pi_{22}^{3})^{2}},\ \Pi_{11}^{2} = \frac{\Pi_{11}^{3}(2\Pi_{12}^{1} + \Pi_{22}^{2}) - 2\Pi_{11}^{1}\Pi_{12}^{3}}{\Pi_{22}^{3}},$$

$$\Pi_{33}^{2} = \frac{(2\Pi_{12}^{1} + \Pi_{22}^{2})[2\Pi_{13}^{1}\Pi_{22}^{3} + \Pi_{22}^{2}(2\Pi_{12}^{1} + \Pi_{22}^{2})]}{(\Pi_{22}^{3})^{2}}.$$

Cu aceste valori prima neegalitate (100) devine

$$\Pi_{22}^{2}[\Pi_{13}^{1}\Pi_{22}^{3} + \Pi_{12}^{1}(2\Pi_{12}^{1} + \Pi_{22}^{2})] \neq 0,$$

deci

$$\Pi_{22}^{2} \neq 0,\ \Pi_{13}^{1}\Pi_{22}^{3} + \Pi_{12}^{1}(2\Pi_{12}^{1} + \Pi_{22}^{2}) \neq 0.$$

Bazați pe aceste neegalități, din ecuația a doua și a treia a sistemului (100) deducem

$$a\,\Pi_{22}^{2} + b\,\Pi_{22}^{3} = 0,\ \Pi_{13}^{1}\Pi_{22}^{3} + \Pi_{12}^{1}\Pi_{22}^{2} = 0,$$

iar din celelalte două neegalități (100)

$$\Pi^1_{12} \neq 0, \quad \Pi^1_{13} \neq 0, \quad \Pi^1_{12} + \Pi^2_{22} \neq 0.$$

Cu aceste valori, sistemul (100) se scrie

$$2\Pi^1_{12}\Pi^3_{11} - \Pi^1_{11}\Pi^3_{12} = 0, \quad 4(\Pi^1_{11})^2\Pi^3_{11} - \Pi^3_{22}(\Pi^1_{11})^2 = 0,$$

sau

$$\Pi^3_{11} = \frac{\Pi^1_{11}\Pi^3_{12}}{2\Pi^1_{12}}, \quad \Pi^1_{11}(2\Pi^1_{12}\Pi^3_{12} - \Pi^3_{22}\Pi^1_{11}) = 0.$$

Dacă $\Pi^1_{11} = 0$, conexiunea Π^i_{jk} este

$$\Pi^1_{11}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=\Pi^2_{11}=\Pi^3_{11}=0, \quad \Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=\frac{\Pi^2_{22}\Pi^3_{12}}{\Pi^3_{22}}, \quad \Pi^2_{13}=-\frac{\Pi^3_{12}(\Pi^2_{22})^2}{(\Pi^3_{22})^2},$$

$$\Pi^1_{13}=-\frac{\Pi^1_{12}\Pi^2_{22}}{\Pi^3_{22}}, \quad \Pi^2_{23}=-\frac{\Pi^2_{22}(\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})}{\Pi^3_{22}}, \quad \Pi^3_{33}=\frac{\Pi^2_{22}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})}{\Pi^3_{22}},$$

$$\Pi^2_{33}=\frac{(\Pi^2_{22})^2(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})}{(\Pi^3_{22})^2},$$

$$\Pi^3_{32}=-(\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})\neq 0, \quad \Pi^1_{12}\neq 0, \quad \Pi^2_{22}\neq 0, \quad \Pi^3_{22}\neq 0.$$

Făcînd o schimbare de variabile, această conexiune devine

$$\bar{\Pi}^1_{12}=\bar{\Pi}^3_{22}=1, \quad \bar{\Pi}^2_{22}=-\bar{\Pi}^1_{13}=\alpha, \quad \bar{\Pi}^2_{21}=-\bar{\Pi}^3_{31}=\varepsilon, \quad \bar{\Pi}^2_{13}=\alpha\varepsilon, \quad \bar{\Pi}^2_{23}=-\alpha(\alpha+1),$$

$$\bar{\Pi}^3_{33}=\alpha(\alpha+2), \quad \bar{\Pi}^2_{33}=\alpha^2(\alpha+2), \quad \bar{\Pi}^3_{12}=\frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad \bar{\Pi}^3_{32}=-(\alpha+1)\ (\varepsilon=0,1\,;\ \alpha\neq 0,-1),$$

componentele nescrise fiind nule.

Dacă $\Pi^1_{11} \neq 0$, conexiunea este

$$\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=0, \quad \Pi^1_{13}=-\frac{\Pi^1_{12}\Pi^2_{22}}{\Pi^3_{22}}, \quad \Pi^2_{23}=-\frac{\Pi^2_{22}(\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})}{\Pi^3_{22}},$$

$$\Pi^3_{33}=\frac{\Pi^2_{22}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})}{\Pi^3_{22}}, \quad \Pi^2_{11}=\frac{(\Pi^1_{11})^2(\Pi^2_{21}-2\Pi^1_{12})}{4(\Pi^1_{12})^2}, \quad \Pi^2_{21}=\frac{\Pi^1_{11}(\Pi^2_{22}-\Pi^1_{12})}{2\Pi^1_{12}},$$

$$\Pi^3_{31}=-\frac{\Pi^1_{11}(\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})}{2\Pi^1_{12}}, \quad \Pi^2_{13}=-\frac{\Pi^1_{11}(\Pi^2_{22})^2}{2\Pi^1_{12}\Pi^3_{22}}, \quad \Pi^2_{33}=\frac{(\Pi^2_{22})^2(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})}{(\Pi^3_{22})^2},$$

$$\Pi^3_{11}=\frac{\Pi^3_{22}(\Pi^1_{11})^2}{4(\Pi^1_{12})^2}, \quad \Pi^3_{12}=\frac{\Pi^3_{22}\Pi^1_{11}}{2\Pi^2_{12}}, \quad \Pi^3_{32}=-(\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})\neq 0,$$

$$\Pi^1_{11}\neq 0, \quad \Pi^1_{12}\neq 0, \quad \Pi^2_{22}\neq 0, \quad \Pi^3_{22}\neq 0.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x}=\Pi^1_{11}x, \quad \bar{y}=\Pi^1_{12}y, \quad \bar{z}=\frac{(\Pi^1_{12})^2}{\Pi^3_{22}}z,$$

această conexiune devine

$$\bar{\Pi}^1_{11}=\bar{\Pi}^1_{12}=\bar{\Pi}^3_{22}=2\bar{\Pi}^3_{12}=4\bar{\Pi}^3_{11}=1,\ \bar{\Pi}^2_{22}=-\bar{\Pi}^1_{13}=\alpha,\ \bar{\Pi}^2_{21}=\frac{\alpha-1}{2},$$

$$\bar{\Pi}^3_{32}=2\bar{\Pi}^3_{31}=-(\alpha+1),$$

$$\bar{\Pi}^2_{23}=-\alpha(\alpha-1),\ \bar{\Pi}^3_{33}=\alpha(\alpha+2),\ \bar{\Pi}^2_{13}=-\frac{\alpha^2}{2},\ \bar{\Pi}^2_{33}=\alpha^2(\alpha+2),$$

$$\bar{\Pi}^2_{11}=\frac{\alpha-2}{4}\ (\alpha\neq-1,0),$$

componentele nescrise fiind nule.

Deci, *tensorul proiectiv constant* Π^i_{jk}, *care verifică sistemul* (*15*), (*26*), (*27*), *poate fi adus, prin schimbări de variabile, la una din formele*

1° $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=1,\ \Pi^2_{22}=-\Pi^3_{22}=\alpha,\ \Pi^2_{23}=-\Pi^3_{32}=\alpha+1,\ \Pi^2_{33}=-\Pi^3_{33}=\alpha+2,$

$$\Pi^2_{21}=\Pi^2_{13}=-\Pi^3_{12}=-\Pi^3_{13}=\varepsilon\ (\varepsilon=0,1);$$

2° $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=\Pi^2_{23}=-\Pi^3_{32}=1,\ \Pi^1_{11}=\Pi^2_{11}=-\Pi^2_{33}=\Pi^3_{33}=-2;$

3° $\Pi^1_{12}=\Pi^3_{22}=1,\ \Pi^2_{22}=-\Pi^1_{13}=\alpha,\ \Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=\varepsilon,\ \Pi^2_{13}=-\alpha\varepsilon,\ \Pi^2_{23}=-\alpha(\alpha+1),$

$\Pi^3_{33}=\alpha(\alpha+2),\ \Pi^2_{33}=\alpha^2(\alpha+2),\ \Pi^3_{12}=\frac{\varepsilon}{\alpha},\ \Pi^3_{32}=-(\alpha+1)\ (\varepsilon=0,1;\ \alpha\neq0,-1);$

4° $\Pi^1_{11}=\Pi^1_{12}=\Pi^3_{22}=2\Pi^3_{12}=4\Pi^3_{11}=1,\ \Pi^2_{22}=-\Pi^1_{13}=\alpha,\ \Pi^2_{21}=\frac{\alpha-1}{2},$

$$\Pi^3_{32}=2\Pi^3_{31}=-(\alpha+1),$$

$\Pi^2_{23}=-\alpha(\alpha+1),\ \Pi^3_{33}=\alpha(\alpha+2),\ \Pi^2_{13}=-\frac{\alpha^2}{2},\ \Pi^2_{33}=\alpha^2(\alpha+2)\ (\alpha\neq0,-1);$

componentele nescrise fiind nule.

Făcînd schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)x-\frac{\alpha+1}{2}y-\frac{\alpha+3}{2}z,\\ \bar{y}&=y+z,\\ \bar{z}&=\varepsilon x+\frac{2\alpha+1}{2}y+\frac{2\alpha+5}{2}z,\end{aligned}\right\}$$

conexiunea 1° devine

$$\bar{\Pi}^1_{23}=\bar{\Pi}^1_{12}=-\bar{\Pi}^3_{32}=\bar{\Pi}^3_{22}=1,$$

componentele nescrise fiind nule.

La fel, făcînd transformarea

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x - \frac{y}{2} + \frac{\alpha-1}{2} z, \\ \bar{y} &= y - \alpha z, \\ \bar{z} &= \frac{y}{2} + \frac{2-\alpha}{2} z, \end{aligned}\right\}$$

conexiunea 3° devine identică cu [VIII], iar prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{2} + \frac{2\alpha-1}{2} y - \frac{\alpha(2\alpha-5)}{2} z, \\ \bar{y} &= y - \alpha z \\ \bar{z} &= x + \frac{y}{2} - \frac{\alpha z}{2}, \end{aligned}\right\}$$

conexiunea 4° devine identică cu aceeași conexiune [VIII].

Deci, *tensorul constant* Π^i_{jk}, *care verifică sistemul* (*15*), (*26*), (*27*), *poate fi redus, prin schimbări de variabile la una din formele*

[VIII] $\Pi^1_{23}=\Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=\Pi^3_{22}=1$;

[IX] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=\Pi^2_{23}=\Pi^3_{32}=1,\ \Pi^1_{11}=\Pi^2_{11}=-\Pi^2_{33}=\Pi^3_{33}=-2$;

componentele nescrise fiind nule.

Vom considera acum cazul în care conexiunea verifică sistemul (29), (31), (33).

Ținînd seama de sistemul (29), sistemul (34) se scrie

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^3_{12}\Pi^1_{11}=0,\ \Pi^3_{12}\Pi^1_{12}=0,\ \Pi^3_{12}\Pi^1_{13}=0,\ \Pi^3_{12}\Pi^2_{33}=0, \\ &4(\Pi^1_{13})^2+\Pi^1_{12}\Pi^2_{33}=0, \\ &2(\Pi^1_{12}\Pi^2_{11}+\Pi^1_{13}\Pi^3_{11})-\Pi^1_{11}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})=0, \\ &\Pi^1_{12}\Pi^2_{13}-\Pi^1_{13}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})=0, \\ &4\Pi^1_{13}\Pi^2_{11}-2\Pi^1_{11}\Pi^2_{13}-\Pi^2_{33}\Pi^3_{11}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (104)$$

Dacă $\Pi^3_{12}\neq 0$, din (76) rezultă

$$\Pi^1_{11}=\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{33}=0,$$

care înlocuite în (31) ne dau $a=b=0$, care contrazic neegalitatea (33). Deci $\Pi^3_{12}=0$.

Cu această valoare, (33) ne dă

$$2\Pi^2_{21}+3\Pi^1_{11}\neq 0,\ a\neq 0,$$

iar prima ecuație (31) devine $\Pi^1_{12}=0$.

Înlocuind aceste valori în (104) obținem $\Pi^1_{13} = 0$.

Din (31) rezultă în acest caz $a(3\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) = 0$ ceea ce este absurd.

Deci, *dacă conexiunea* Π^i_{jk} *este constantă, sistemul* (29), (31), (33) *nu are soluții.*

Ne vom ocupa acum de conexiunile proiective constante care verifică sistemul (14′) și determină corespondențe speciale cu puncte neizolate comune. În partea a II-a a lucrării am arătat că aceste conexiuni sînt:

1° $\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^3_{12}=\alpha$;

2° $\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=1$;

3° $\Pi^1_{23}=\Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=1,\ \Pi^3_{12}=\alpha$;

4° $\Pi^1_{23}=\Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=\Pi^3_{22}=1$;

5° $\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=1$;

6° $\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=-\Pi^2_{13}=1,\ \Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=-2,\ \Pi^3_{12}=4$;

7° $\Pi^1_{i3}=-\Pi^2_{i3}=1,\ (i=1,2,3)$;

8° $\Pi^1_{22}=1,\ \Pi^3_{12}=\varepsilon,\ (\varepsilon=0,1)$;

9° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^3_{12}=\eta,\ (\eta=0,\pm 1)$;

10° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=-\Pi^3_{12}=1$;

11° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=-\Pi^1_{12}=\Pi^3_{32}=1,\ \Pi^3_{12}=\alpha$;

12° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=1,\ \Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=\alpha,\ \Pi^3_{12}=-\alpha^2,\ (\alpha\neq -1)$;

13° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^3_{12}=\mu,\ \Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=-2\mu,\ \Pi^2_{13}=-4\mu,\ (\mu=0,-1)$;

14° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=-\Pi^2_{13}=1,\ \Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=-\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=\dfrac{1}{2}$,

$\Pi^3_{12}=\dfrac{1}{4},\ \Pi^3_{33}=-2,\ \Pi^2_{33}=4$;

15° $\Pi^1_{13}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{11}=\Pi^1_{12}=-\Pi^1_{22}=-\Pi^2_{23}=1,\ \Pi^3_{12}=\alpha,\ \Pi^3_{31}=\Pi^3_{11}=2\alpha,$

$\Pi^2_{21}=-(2\alpha+1),\ \Pi^2_{11}=\Pi^2_{13}=-(4\alpha+1)\ \ (\alpha\leqslant 0)$;

16° $\Pi^1_{13}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^2_{23}=4\alpha-1,\ \Pi^3_{33}=-4\alpha,\ \Pi^2_{33}=8\alpha,$

$\Pi^1_{11}=-\Pi^2_{22}=1-2\alpha,\ \Pi^1_{12}=1-\alpha,\ \Pi^3_{32}=-\alpha,\ \Pi^2_{13}=-(8\alpha^2-4\alpha+1),$

$\Pi^3_{31}=\alpha(4\alpha-1),\ \Pi^3_{12}=\alpha^2,\ \Pi^3_{11}=2\alpha^2(1-2\alpha),\ \Pi^2_{21}=-(4\alpha^2-3\alpha+1),$

$\Pi^2_{11}=(2\alpha-1)(4\alpha^2-2\alpha+1),\ \left(\alpha\neq 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$;

17° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=-\Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=-\Pi^3_{12}=1$;

18° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=\Pi^3_{32}=1$, $\Pi^2_{22}=-\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=4$, $\Pi^1_{12}=-5$, $\Pi^3_{12}=-9$, $\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=-12$, $\Pi^1_{11}=24$, $\Pi^3_{11}=72$;

19° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=1$, $\Pi^1_{11}=2(1-\alpha)(\alpha-2)(\alpha-3)$,

$\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)$, $\Pi^1_{12}=-\dfrac{\alpha^2-6\alpha+7}{2}$, $\Pi^2_{22}=2(1-\alpha)$,

$\Pi^3_{32}=\dfrac{\alpha^2-2\alpha-3}{2}$, $\Pi^1_{13}=(1-\alpha)(\alpha-3)$, $\Pi^2_{23}=1-\alpha^2$, $\Pi^3_{33}=2(\alpha-1)^2$,

$\Pi^2_{11}=4(\alpha-1)^2(\alpha-2)^2$, $\Pi^2_{33}=-4(\alpha-1)^2$, $\Pi^3_{12}=-(\alpha-2)^2$,

$\Pi^3_{11}=4(1-\alpha)(\alpha-2)^2$, $(\alpha\neq 1)$;

20° $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=1$;

21° $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=\Pi^2_{22}=\Pi^2_{23}=-\Pi^3_{32}=\Pi^2_{33}=-\Pi^3_{33}=-\Pi^3_{22}=1$;

22° $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=-\Pi^3_{32}=1$, $\Pi^2_{33}=-\Pi^3_{33}=2$;

23° $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=-\Pi^2_{22}=\Pi^3_{22}=\Pi^2_{33}=-\Pi^3_{33}=1$;

24° $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=\Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=\Pi^2_{13}=-\Pi^3_{12}=1$;

25° $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=-\Pi^2_{21}=\Pi^3_{32}=-\Pi^2_{13}=\Pi^3_{12}=1$, $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=-\Pi^3_{32}=\lambda$, $\Pi^2_{33}=-\Pi^3_{33}=2\lambda$, $(\lambda=\pm 1)$;

26° $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=\Pi^1_{12}=\Pi^2_{23}=-\Pi^3_{32}=1$, $\Pi^2_{33}=2$, $\Pi^3_{33}=\pm\sqrt{2}$,

$\Pi^1_{13}=-\Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=-1\pm\sqrt{2}$, $\Pi^1_{11}=2(-1\pm\sqrt{2})$,

$\Pi^2_{13}=-\Pi^3_{12}=3\pm 2\sqrt{2}$, $\Pi^2_{11}=2(4\pm 3\sqrt{2})$, $\Pi^3_{22}=-2\pm\sqrt{2}$;

27° $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=1$, $\Pi^1_{13}=\alpha$, $\Pi^2_{23}=\Pi^3_{32}=\beta$, $\Pi^2_{22}=-(\beta+1)$,

$\Pi^2_{33}=1-\beta$, $\Pi^3_{33}=-(\alpha+\beta)$, $\Pi^1_{11}=1-\alpha^2$, $\Pi^3_{22}=\alpha-\beta$, $\Pi^2_{21}=-(\alpha\beta+\beta+1)$,

$\Pi^3_{31}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta$, $\Pi^2_{13}=-\Pi^3_{12}=\alpha\beta-\alpha+\beta$, $\Pi^2_{11}=-(\alpha-1)(\alpha\beta-\alpha+\beta+1)$,

$\Pi^3_{11}=-(\alpha+1)(\alpha^2+\alpha\beta-\alpha+\beta)$;

28° $\Pi^1_{13}=-\Pi^1_{11}=\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=1$, $\Pi^2_{23}=-\Pi^2_{22}=-\Pi^2_{33}=\Pi^3_{32}=\dfrac{2(\alpha-1)^2}{\alpha}$,

$\Pi^3_{33}=-\dfrac{2\alpha^2-3\alpha+2}{\alpha}$, $\Pi^2_{21}=-\Pi^2_{13}=\Pi^3_{12}=\dfrac{2(\alpha-2)(\alpha-1)^2}{\alpha^2}$,

$\Pi^3_{31}=-\dfrac{2\alpha^3-9\alpha^2+10\alpha-4}{\alpha^2}$, $\Pi^3_{22}=\dfrac{(2-\alpha)(2\alpha-1)}{\alpha}$,

$\Pi^2_{11}=\dfrac{2(3\alpha-2)(\alpha-1)^2}{\alpha^2}$, $\Pi^3_{11}=\dfrac{6\alpha^3-17\alpha^2+14\alpha-4}{\alpha^2}$, $(\alpha\neq 0)$,

29° $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=\Pi^2_{23}=-\Pi^2_{22}=-\Pi^2_{33}=-\Pi^3_{22}=\Pi^3_{32}=-\Pi^3_{33}=1$;

30° $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=1$, $\Pi^2_{21}=-\Pi^2_{13}=\Pi^3_{12}=-\Pi^3_{31}=\varepsilon$ $(\varepsilon=0,1)$;

31° $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=-\Pi^3_{32}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=1$, $\Pi^2_{33}=-\Pi^3_{33}=2$,

$\Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=\Pi^2_{13}=-\Pi^3_{12}=\alpha$;

32° $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=-\Pi^3_{32}=-\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=1$, $\Pi^1_{33}=1-\alpha^2$,

$\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=-\Pi^2_{13}=\alpha+1$, $\Pi^3_{33}=-2(\alpha+1)$, $\Pi^2_{33}=2(\alpha+1)^2$,

$$\Pi^3_{12}=\frac{1}{\alpha+1},\quad (\alpha\neq 0,\pm 1);$$

33° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1$, $\Pi^1_{33}=\alpha$, $(\alpha\neq 0)$;

34° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1$, $\Pi^1_{33}=-1-\alpha^2$, $\Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=\lambda$, $\Pi^2_{13}=\lambda(\alpha+1)$,

$$\Pi^3_{12}=-\frac{\lambda}{\alpha+1},\quad (\alpha\neq 0,\pm 1;\ \lambda=\pm 1;\ \lambda\alpha(\alpha+1)>0);$$

35° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=1$;

36° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=\Pi^2_{22}=-\Pi^3_{22}=\Pi^2_{23}=-\Pi^3_{32}=\Pi^2_{33}=-\Pi^3_{33}=1$;

37° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^2_{22}=\Pi^2_{23}=1$, $\Pi^1_{13}=-\alpha$, $\Pi^3_{33}=\alpha-1$, $\Pi^1_{33}=\Pi^2_{33}=1-\alpha^2$,

$$\Pi^1_{12}=-\frac{\alpha}{\alpha+1},\ \Pi^3_{22}=\Pi^3_{32}=-\frac{1}{\alpha+1},\ (\alpha\neq 0\ \pm 1);$$

38° $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^2_{22}=1$, $\Pi^1_{12}=\Pi^3_{32}=-\frac{1}{2}$, $\Pi^1_{33}=1-\alpha^2$, $\Pi^1_{13}=-\Pi^2_{23}=-\frac{\alpha+1}{2}$,

$$\Pi^3_{12}=\frac{1}{4\alpha},\ \Pi^3_{22}=-\frac{1}{\alpha+1},\ \Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=-\frac{\alpha+1}{4\alpha},$$

$$\Pi^2_{13}=-\frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha},\quad (\alpha\neq 0,\pm 1)$$

Conexiunea 1°, cu $\alpha=0$, este identică cu conexiunea [VII]. Dacă $\alpha>0$, prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{x+\alpha y+(\alpha+2)z}{2\sqrt{\alpha}},\\ \bar{y}&=\frac{y+z}{\sqrt{\alpha}},\\ \bar{z}&=\frac{x-\alpha y-(\alpha+2)z}{2\sqrt{\alpha}},\end{aligned}\right\}$$

ea devine identică cu conexiunea [VIII] cu $\alpha > 0$, iar dacă $\alpha < 0$, prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \sqrt{-\alpha}\, x, \\ \bar{y} &= \sqrt{-\alpha}\, y, \\ \bar{z} &= z - \frac{\sqrt{-\alpha}}{2} y, \end{aligned}\right\}$$

devine identică cu conexiunea 9° cu $\eta = -1$.

Conexiunea 3°, cu $\alpha = -1$, este identică cu conexiunea [IV]. Dacă $\alpha > -1$, prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x - \alpha y - (\alpha + 2) y}{2\sqrt{\alpha+1}}, \\ \bar{y} &= \frac{y + z}{\sqrt{\alpha+1}}, \\ \bar{z} &= \frac{(\sqrt{\alpha+1}-1)\, x + [\alpha y + (\alpha+2) z]\,(\sqrt{\alpha+1}+1)}{2\sqrt{\alpha+1}} \end{aligned}\right\}$$

ea devine identică în conexiunea [VIII] cu $\alpha > -1$. Dacă $\alpha < -1$ punînd $\alpha = -1 - \beta^2\ (\beta \neq 0)$ şi, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = -\frac{z}{\beta},\ \bar{y} = \frac{\sqrt{-\alpha}}{\beta}\, y,\ \bar{z} = \sqrt{-\alpha}\, x + \frac{z}{\beta},$$

conexiunea 3°, cu $\alpha < -1$, devine identică cu conexiunea 1° cu $\alpha < 0$.

Conexiunea 4° este identică cu conexiunea [VIII].

După cum am arătat, conexiunea 5° este identică cu conexiunea [I] cu $\eta = -1$.

Prin transformarea

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{2} - 3y - \frac{3y}{4}, \\ \bar{y} &= 2y + z, \\ \bar{z} &= x + y, \end{aligned}\right\}$$

conexiunea 6° devine identică cu conexiunea [VIII].

Dacă $\varepsilon = 0$, conexiunea 8° este identică cu conexiunea [I] cu $\eta = 0$.

Conexiunea 9°, cu $\eta = 0$, este identică cu conexiunea [I], cu $\eta = -1$, după cum am arătat mai sus.

Dacă $\eta = 1$, prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{3z}{2}, \\ \bar{y} &= y, \\ \bar{z} &= x - z, \end{aligned}\right\}$$

conexiunea 9° devine identică cu conexiunea [VIII].

În cazul conexiunii 11°, dacă $\alpha = -1$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = z, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = -x,$$

se obține conexiunea [VI].

Dacă $\alpha > -1$, prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= -\frac{x}{2} + \frac{4-3\sqrt{\alpha+1}}{4\sqrt{\alpha+1}}\, y + \frac{z}{2}, \\ \bar{y} &= \frac{y}{\sqrt{\alpha+1}} \\ \bar{z} &= \frac{\sqrt{\alpha+1}+1}{2}\, x + \frac{3(\alpha-1)}{4\sqrt{\alpha+1}}\, y + \frac{2-\sqrt{\alpha+1}}{2}\, z, \end{aligned}\right\}$$

conexiunea 11° devine identică cu conexiunea [VIII], iar dacă $\alpha < -1$, prin transformarea

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{\sqrt{-1-\alpha}}, \\ \bar{y} &= \frac{y}{\sqrt{-1-\alpha}}, \\ \bar{z} &= \frac{x}{\sqrt{-1-\alpha}} + \frac{\sqrt{-1-\alpha}-1}{2\sqrt{-1-\alpha}} + z, \end{aligned}\right\}$$

conexiunea 11° devine identică cu conexiunea 9°.

Conexiunea 12°, pentru $\alpha = 0$, devine identică cu conexiunea 10° prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = x + z.$$

Conexiunea 13°, pentru $\mu = 0$, este identică cu conexiunea 9° cu $\eta = 0$, iar pentru $\mu = -1$ este identică cu conexiunea 6° deci cu [VIII].

În cazul conexiunii 15°, cu $\beta = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = z - x, \quad \bar{z} = x + y,$$

obținem conexiunea 7°.

Prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x + 2z, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z,$$

conexiunea 17° devine identică cu conexiunea [IV].

Conexiunea 18° devine identică cu conexiunea [VIII] prin transformarea

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2x - y + 3z}{16}, \\ \bar{y} &= \frac{2x - 5y + 7z}{8}, \\ \bar{z} &= \frac{2x - y + z}{8}. \end{aligned}\right\}$$

Prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{4x + 35y - 2z}{8}, \\ \bar{y} &= \frac{-4x - 55y + 10z}{16}, \\ \bar{z} &= \frac{4x + 87y - 10z}{32} \end{aligned}\right\}$$

conexiunea 19°, cu $\alpha = 2$, devine identică cu conexiunea [VIII].

Dacă $\alpha \neq 2$, conexiunea 19° devine identică cu [VIII] prin transformarea

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{8(\alpha - 1)^2 (x + z) + y}{(\alpha - 1)^2 (\alpha^2 - 2\alpha + 5)}, \\ \bar{y} &= \frac{4(\alpha-1)^3 (3\alpha-7)\, x + (\alpha^4 - 4\alpha^3 + 12\alpha^2 - 18\alpha + 11)\, y + 2(\alpha-1)^2 (5\alpha^2 - 10\alpha - 7) z}{(\alpha-1)^2 (\alpha^2 - 2\alpha + 5)}, \\ \bar{z} &= \frac{4(3\alpha^2 - 6\alpha - 1)\, x + (\alpha^2 - 2\alpha + 7)\, y + 2(5\alpha^2 - 10\alpha - 7) z}{(\alpha - 1)^2 (\alpha^2 - 2\alpha + 5)}. \end{aligned}\right\}$$

Conexiunea 20° este identică cu conexiunea [I] cu $\eta = -1$.

Prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x - \frac{1}{2} y + z, \\ \bar{y} &= \frac{3}{2} y - z, \\ \bar{z} &= -\frac{y}{2} + z, \end{aligned}\right\}$$

conexiunea 22° devine identică cu conexiunea [VIII].

Conexiunea 23° devine identică cu conexiunea [VIII] prin transformarea

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{8x + 5y + 2z}{8}, \\ \bar{y} &= \frac{y + 2z}{4}, \\ \bar{z} &= \frac{3y - 2z}{4}. \end{aligned}\right\}$$

Conexiunea 24° se transformă în conexiunea [VIII] prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{4x + 3y + 6z}{8}, \\ \bar{y} &= \frac{-4x - 3y + 2z}{8}, \\ \bar{z} &= \frac{4x + 11y - 2z}{8}. \end{aligned}\right\}$$

Dacă $\lambda = 1$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = y - x, \quad \bar{y} = x, \quad \bar{z} = y + z - x,$$

conexiunea 25° se transformă în conexiunea 21°, iar dacă $\lambda = -1$, conexiunea 25° devine identică cu conexiunea 10° prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = 2x + z, \quad \bar{y} = x, \quad \bar{z} = y - x.$$

Conexiunea 26° devine identică cu conexiunea 21° prin transformarea

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y - x, \quad \bar{z} = z - (1 \pm \sqrt{2})\, x.$$

Conexiunea 27°, cu $\beta \neq 0$, se transformă în conexiunea [VIII] prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} (\alpha - 2\beta + 1)\,\bar{x} - 2\bar{y} - \bar{z} &= x + \frac{y}{4} + \frac{z}{2}, \\ (\alpha + 2\beta + 1)\,\bar{x} + \bar{y} - \bar{z} &= z - \frac{y}{2}, \\ (\alpha + 2\beta - 1)\,x - \bar{y} - \bar{z} &= \frac{y}{\beta}, \end{aligned}\right\}$$

iar conexiunea 27°, cu $\beta = 0$, se transformă în conexiunea [VI] prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = -z, \quad \bar{y} = x + 2z, \quad \bar{z} = -x + y - (\alpha + 1)\, z.$$

Conexiunea 28°, pentru $\alpha = 1$, devine identică cu conexiunea [III] cu $\alpha = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = z, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = x + y.$$

Dacă $\alpha > 1$, conexiunea 28° devine identică cu conexiunea [VIII] prin transformarea

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= -\frac{\alpha}{4(\alpha-1)^{3/2}}\left[x + \frac{(11\alpha-3)\sqrt{\alpha-1} + 8\alpha}{4(\alpha-1)^{3/2}}\, y - \frac{z}{2}\right], \\ \bar{y} &= \frac{4x - y + 6z}{8}, \\ \bar{z} &= x + \frac{6\alpha + (5\alpha-1)\sqrt{\alpha-1}}{4(\alpha-1)^{3/2}}\, y + \frac{z}{2}, \end{aligned}\right\}$$

iar dacă $\alpha < 1$, devine identică cu conexiunea 9° prin transformarea

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\alpha}{4(1-\alpha)}\, z + \frac{\alpha\,[\alpha + (1-\alpha)^{3/2}]}{8(1-\alpha)^{5/2}}\, y, \\ \bar{y} &= \frac{x}{2} - \frac{\alpha}{4(1-\alpha)^{3/2}}\, y \\ \bar{z} &= \frac{x}{2} - \frac{\alpha\,[3\alpha - 2 + (1-\alpha)^{3/2}]}{8(1-\alpha)^{5/2}}\, y - \frac{\alpha}{4(1-\alpha)}\, z. \end{aligned}\right\}$$

Conexiunea 29° devine identică cu conexiunea 10° prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = -x, \quad \bar{y} = -x - z, \quad \bar{z} = -x - y - z.$$

Conexiunea 30°, pentru $\varepsilon = 0$, este identică cu conexiunea [I], cu $\eta = -1$, iar pentru $\varepsilon = 1$, prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{4x - y - 6z}{16}, \\ \bar{y} &= \frac{8x + 19y - 8z}{32}, \\ \bar{z} &= \frac{8x - 13y - 8z}{32}, \end{aligned}\right\}$$

devine identică cu conexiunea [VIII].

Prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= x + \frac{z}{2},\\ \bar{y} &= \frac{\alpha}{2}x + \frac{6-\alpha}{4}y + \frac{\alpha-4}{4}z,\\ \bar{z} &= -\frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha-2}{4}y + \frac{4-\alpha}{4}z,\end{aligned}\right\}$$

conexiunea 31° se transformă în conexiunea [VIII].

Dacă $\alpha < -1$, conexiunea 32° se transformă în conexiunea 9°, cu $\eta = -1$, prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= x - \sqrt{-\alpha-1}\left(\frac{\alpha+2}{2}y + z\right),\\ \bar{y} &= \sqrt{-\alpha-1}\left(\frac{\alpha+4}{2}y + z\right),\\ \bar{z} &= \frac{1}{\sqrt{-\alpha-1}}\left(\frac{\alpha+2}{2}y + z\right),\end{aligned}\right\}$$

iar dacă $\alpha > -1$, prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sqrt{\alpha+1}+1}{2}x + \frac{7\sqrt{\alpha+1}-1}{8}y + \frac{3-\sqrt{\alpha+1}}{4}z,\\ \bar{y} &= -\frac{\sqrt{\alpha+1}}{8}(4x - 5y - 2z),\\ \bar{z} &= \frac{1}{8\sqrt{\alpha+1}}(3x - 3y - 2z),\end{aligned}\right\}$$

conexiunea 32° devine identică cu conexiunea [VIII].

Conexiunea 33° este identică cu conexiunea [II].

Prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2x - y + 6z}{4},\\ \bar{y} &= \frac{(\alpha+1)^2}{2\alpha}\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{\alpha+1}}x + \frac{3\alpha(\alpha+1)\lambda - 4(\alpha^2+1)}{8\alpha}\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha\lambda}}y - \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{\alpha+1}}z,\\ \bar{z} &= -\frac{\alpha+1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{\alpha+1}}x + \frac{4(\alpha+1) - 3\lambda\alpha}{8\alpha}\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha\lambda}}y + \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{\alpha+1}}z,\end{aligned}\right\}$$

conexiunea 34° devine identică cu conexiunea [VIII].

Conexiunea 35° este identică cu conexiunea [II] pentru $\alpha = 1$.
Conexiunea 36° se transformă în conexiunea [V] cu $\lambda = 1$.
Conexiunea 37° se transformă în conexiunea [VIII] prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\alpha+1}{2\alpha^2}x + \frac{4\alpha^3-4\alpha^2-11\alpha-4}{4\alpha^4}y + \frac{\alpha+3}{4\alpha^2}z, \\ \bar{y} &= \frac{\alpha+1}{2\alpha}\left(x + \frac{11\alpha+4}{4\alpha}y + \frac{1}{2}z\right), \\ \bar{z} &= -\frac{1}{2\alpha}x + \frac{3\alpha+4}{8\alpha^2}y - \frac{1}{4\alpha}z. \end{aligned}\right\}$$

Deci, tensorul proiectiv constant π^i_{jk}, care verifică sistemul (14′) determinînd o corespondență specială cu puncte comune neizolate, poate fi redus prin schimbări convenabile de variabile la una din formele :

[X] $\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=1$;

[XI] $\Pi^1_{i3}=-\Pi^2_{i3}=1, \quad (i=1,2,3)$;

[XII] $\Pi^1_{22}=\Pi^3_{12}=1$;

[XIII] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=-\Pi^3_{12}=1$;

[XIV] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=-\Pi^3_{12}=-\Pi^3_{32}=1$;

[XV] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=1,\ \Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=\alpha,\ \Pi^3_{12}=-\alpha^2,\ (\alpha\neq 0,\ -1)$;

[XVI] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=-\Pi^2_{13}=1,\ \Pi^3_{33}=-2,\ \Pi^2_{33}=4,$

$$\Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=-\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=\frac{1}{2},\ \Pi^3_{12}=\frac{1}{4};$$

[XVII] $\Pi^1_{11}=\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=-\Pi^2_{22}=-\Pi^2_{23}=1,\ \Pi^2_{21}=-(2\alpha+1),$

$\Pi^3_{31}=\Pi^3_{11}=2\alpha,\ \Pi^3_{12}=\alpha,\ \Pi^2_{11}=\Pi^2_{13}=-(4\alpha+1), \qquad (\alpha<0)$;

[XVIII] $\Pi^1_{13}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^1_{11}=-\Pi^2_{32}=\dfrac{1-\alpha}{2},\ \Pi^2_{21}=-\dfrac{\alpha^2-\alpha+2}{4},$

$$\Pi^3_{31}=\frac{\alpha^2+\alpha}{4},\ \Pi^1_{12}=\frac{3-\alpha}{4},\ \Pi^3_{32}=-\frac{\alpha+1}{4},\ \Pi^2_{23}=\alpha,\ \Pi^3_{33}=-(\alpha+1),$$

$$\Pi^2_{11}=\frac{(\alpha-1)(\alpha^2-3)}{8},\ \Pi^3_{11}=\frac{(1-\alpha)(\alpha+1)^2}{16},\ \Pi^2_{33}=2(\alpha+1),$$

$$\Pi^3_{12}=\frac{(\alpha+1)^2}{16},\ \Pi^2_{13}=-\frac{\alpha^2+1}{2},\ (\alpha\neq\pm 1);$$

[XIX] $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=\Pi^2_{hk}=-\Pi^3_{hk}=1, \quad (h,k=2,3);$

[XX] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^2_{22}=1,\ \Pi^1_{33}=1-\alpha^2,\ \Pi^1_{12}=\Pi^3_{32}=-\frac{1}{2},$

$$\Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=-\frac{\alpha+1}{4\alpha},\ \Pi^1_{13}=-\Pi^2_{23}=\frac{\alpha+1}{2},\ \Pi^2_{13}=-\frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha},$$

$$\Pi^3_{12}=\frac{1}{4\alpha},\ \Pi^3_{22}=-\frac{1}{\alpha+1},\ (\alpha\neq 0,\pm 1);$$

componentele nescrise fiind nule.

Rezultă:

TEOREMA 4. *Conexiunea proiectivă constantă, care determină o corespondență specială cu puncte comune neizolate între spațiile A_3 și E_3, poate fi adusă, prin schimbări de variabile la formele:*

[I] $\Pi^1_{22}=1,\ \Pi^1_{33}=\eta,\quad (\eta=0,\pm 1);$

[II] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^1_{33}=\alpha,\quad (\alpha\neq 0);$

[III] $\Pi^1_{1i}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=-\Pi^3_{1i}=-\Pi^3_{23}=-\Pi^3_{33}=1,$

$\Pi^1_{22}=-\Pi^3_{22}=\alpha,\quad (i=1,2,3);$

[IV] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{23}=-\Pi^3_{12}=-\Pi^3_{32}=1;$

[V] $\Pi^1_{22}=1,\ \Pi^3_{22}=\lambda,\quad (\lambda=\pm 1);$

[VI] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{23}=-\Pi^3_{12}=\Pi^3_{22}=-\Pi^1_{22}=-\Pi^3_{32}=1;$

[VII] $\Pi^1_{23}=1;$

[VIII] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=-\Pi^3_{23}=1;$

[IX] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=\Pi^2_{23}=-\Pi^3_{32}=1,\ \Pi^1_{11}=\Pi^2_{11}=-\Pi^2_{33}=\Pi^3_{33}=-2;$

[X] $\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=1;$

[XI] $\Pi^1_{i3}=-\Pi^2_{i3}=1;\quad (i=1,2,3);$

[XII] $\Pi^1_{22}=\Pi^3_{12}=1;$

[XIII] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=-\Pi^3_{12}=1;$

[XIV] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=-\Pi^3_{12}=-\Pi^3_{32}=1;$

[XV] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=1,\ \Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=\alpha,\ \Pi^3_{12}=-\alpha^2,\quad (\alpha\neq 0,-1);$

[XVI] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=-\Pi^2_{13}=1,\ \Pi^3_{33}=-2,\ \Pi^2_{33}=4,$

$$\Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=-\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=\frac{1}{2},\ \Pi^3_{12}=\frac{1}{4};$$

[XVII] $\Pi^1_{11}=\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=-\Pi^2_{22}=-\Pi^2_{23}=1,\ \Pi^2_{21}=-(2\alpha+1),$
$\Pi^3_{31}=\Pi^3_{11}=2\alpha,\ \Pi^3_{12}=\alpha,\ \Pi^2_{11}=\Pi^2_{13}=-(4\alpha+1),\quad (\alpha<0);$

[XVIII] $\Pi^1_{13}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^1_{11}=-\Pi^2_{22}=\dfrac{1-\alpha}{2},\ \Pi^2_{21}=-\dfrac{\alpha^2-\alpha+2}{4},$

$\Pi^3_{31}=\dfrac{\alpha^2+\alpha}{4},\ \Pi^1_{12}=\dfrac{3-\alpha}{4},\ \Pi^3_{32}=-\dfrac{\alpha+1}{4},\ \Pi^2_{23}=\alpha,$

$\Pi^3_{33}=-(\alpha+1),\ \Pi^2_{11}=\dfrac{(\alpha-1)(\alpha^2-3)}{8},\ \Pi^3_{11}=\dfrac{(1-\alpha)(\alpha+1)^2}{16},$

$\Pi^2_{33}=2(\alpha+1),\ \Pi^3_{12}=\dfrac{(6+1)^2}{16},\ \Pi^2_{13}=-\dfrac{\alpha^2+1}{2},\quad (\alpha\neq\pm1);$

[XIX] $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=\Pi^2_{hk}=-\Pi^3_{hk}=1,\quad (h,k=2,3);$

[XX] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^2_{22}=1,\ \Pi^1_{33}=1-\alpha^2,\ \Pi^1_{12}=\Pi^3_{32}=-\dfrac{1}{2},$

$\Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=-\dfrac{\alpha+1}{4\alpha},\ \Pi^1_{13}=-\Pi^2_{23}=-\dfrac{\alpha+1}{2},\ \Pi^2_{13}=-\dfrac{(\alpha+1)^2}{4\alpha},$

$\Pi^3_{12}=\dfrac{1}{4\alpha},\ \Pi^3_{22}=-\dfrac{1}{\alpha+1},\quad (\alpha\neq0,\ \pm1);$

componentele nescrise fiind nule.

Vom determina acum transformările punctuale corespunzătoare conexiunilor [I],..., [XX] determinate mai sus.

În cazul conexiunii [I], sistemul (64) devine

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}=0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\eta\frac{\partial v}{\partial x}=0,\end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v=a_1\left(x-\frac{y^2+\eta z^2}{2}\right)+a_2\,y+a_3\,z+a_4\,.$$

Deci, transformarea punctuală este

$$u^1=x-\frac{y^2+\eta z^2}{2}\ (\eta=0,\pm1),\quad u^2=y,\quad u^3=z \tag{105}$$

și spațiul A_3 este echivalent în mare cu spațiul E_3.

În cazul conexiunii [II] sistemul (64) devine

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}=0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\alpha\frac{\partial v}{\partial x}=0, \end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v=a_1\left(x-\frac{y^2+2yz+\alpha z^2}{2}\right)+a_2y+a_3z+a_4.$$

Deci, transformarea punctuală este

$$u^1=x-\frac{y^2+2yz+\alpha z^2}{2}\quad(\alpha\neq 0),\quad u^2=y,\quad u^3=z \tag{106}$$

și spațiul A_3 este echivalent în mare cu spațiul E_3.

În cazul conexiunii [III] sistemul (64) se scrie

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}=0, \end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v=a_1(x+z)+a_2y+a_3\left(z+\frac{x^2+\alpha y^2+z^2+2xy+2yz+2xz}{2}\right)+a_4.$$

Deci transformarea punctuală este

$$\left.\begin{aligned} u^1&=x+z,\\ u^2&=y\\ u^3&=z+\frac{(x+y+z)^2+(\alpha-1)y^2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

spațiul A_3 fiind echivalent în mare cu spațiul E_3.

Considerînd conexiunea [IV] sistemul (64) devine

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z} = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v = a_1\,(x + z) + a_2\, y + a_3\,(z + x\, y + yz) + a_4.$$

Deci transformarea punctuală este

$$u^1 = x + z, \quad u^2 = y, \quad u^3 = z + y\,(x + z), \tag{108}$$

și spațiul A_3 este echivalent în mare cu spațiul E_3.

În cazul conexiunii [V] sistemul (64) se scrie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

cu soluția

$$v = a_1 \left(x - \frac{y^2}{2}\right) + a_2\, y + a_3 \left(z - \lambda \frac{y^2}{2}\right) + a_4.$$

Deci, transformarea punctuală este

$$u^1 = x - \frac{y^2}{2}, \quad u^3 = y, \quad u^3 = z - \lambda \frac{y^2}{2}, \tag{109}$$

și spațiul A_3 este echivalent în mare cu E_3.

În cazul conexiunii [VI] sistemul (64) devine

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\}$$

avînd soluția

$$v = a_1\,(x + z) + a_2\, y + a_3 \left(z + xy + yz - \frac{y^2}{2}\right) + a_4.$$

Transformarea punctuală este deci

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= x + z, \\ u^2 &= y, \\ u^3 &= z + y\left(x - \frac{y}{2} + z\right), \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

spațiul A_3 fiind echivalent în mare cu E_3.

Considerînd conexiunea [VII], sistemul (64) va fi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

cu soluția

$$v = a_1\,(x - yz) + a_2\,y + a_3\,z + a_4.$$

Transformarea punctuală este deci

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= x - yz, \\ u^2 &= y, \\ u^3 &= z, \end{aligned}\right\} \qquad (111)$$

și spațiile A_3 și E_3 sînt echivalente în mare.

În cazul conexiunii [VIII], sistemul (64) devine

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial z} = v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

avînd soluția

$$v = a_1\,e^{-y}\left(x + \frac{y}{4} + \frac{y}{2}\right) + a_2\,e^{y}\left(z - \frac{y}{2}\right) + a_3\,e^{y} + a_4\,e^{-y}.$$

Transformarea punctuală este deci

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= x + \frac{y}{4} + \frac{y}{2}, \\ u^2 &= \left(z - \frac{y}{2}\right)e^{2y}, \\ u^3 &= e^{2y}, \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

și spațiul A_3 nu este echivalent în mare cu E_3.

Considerînd conexiunea [IX], sistemul (64) se scrie

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -v, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = -v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = v, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = v, \end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v = e^{x-y-z}\,[a_1 x + e^{z-2x-2y}\,(a_2 \cos z + a_3 \sin z) + a_4].$$

Transformarea punctuală este deci

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= x, \\ u^2 &= e^{z-2x-2y} \cos z, \\ u^3 &= e^{z-2x-2y} \sin z, \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

și spațiul A_3 nu este echivalent în mare cu E_3.

În cazul conexiunii [X], sistemul (64) se scrie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

avînd soluția

$$v = a_1\left(x + yz + \frac{y^3}{6}\right) + a_2 y + a_3 z + a_4.$$

Transformarea punctuală este deci

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= x - yz + \frac{y^3}{6}, \\ u^2 &= y, \\ u^3 &= z, \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

și spațiul A_3 este echivalent în mare cu E_3.

Considerînd conexiunea [XI], sistemul (64) devine

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v = a_1(x+y) + a_2\left[x - z\left(x+y+\frac{y}{2}\right)\right] + a_3 z + a_4.$$

Deci transformarea punctuală este

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= x+y, \\ u^2 &= x - y\left(x+y+\frac{y}{2}\right), \\ u^3 &= z, \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

spațiile A_3 și E_3 fiind echivalente în mare.

Dacă considerăm conexiunea [XII], sistemul (64) se scrie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

avînd soluția

$$v = a_1\left(x - \frac{y^2}{2}\right) + a_2 y + a_3\left(z - xy + \frac{y^3}{6}\right) + a_4.$$

Transformarea punctuală este deci

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= x - \frac{y^2}{2}, \\ u^2 &= y, \\ u^3 &= z - xy + \frac{y^3}{6}, \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

și spațiile A_3 și E_3 sînt echivalente în mare.

În cazul conexiunii [XIII] sistemul (64) este

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -v,$$

cu soluția

$$v = a_1\left[x\cos y - \left(\frac{y}{2}+z\right)\sin y\right] + a_2\left[x\sin y + \left(\frac{y}{2}+z\right)\cos y\right] +$$
$$+ a_3 \sin y + a_4 \cos y.$$

Deci, transformarea punctuală este

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= x - \left(\frac{y}{2} + z\right) \operatorname{tg} y, \\ u^2 &= x \operatorname{tg} y + \frac{y}{2} + z, \\ u^3 &= \operatorname{tg} y, \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

spațiile A_3 și E_3 nefiind echivalente în mare.

Considerînd conexiunea [XIV] sistemul (64) se scrie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

cu soluția

$$v = a_1\left(x + z - \frac{y^2}{2}\right) + a_2 y + a_3\left[x - y\left(x + \frac{y}{2} + z\right) + \frac{y^3}{6}\right] + a_4.$$

Transformarea punctuală este deci

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= x + z - \frac{y^2}{2}, \\ u^2 &= y, \\ u^3 &= x - y\left(x + \frac{y}{2} + z\right) + \frac{y^3}{6}, \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

și spațiile A_3 și E_3 sînt echivalente în mare.

Dacă considerăm conexiunea [XV], sistemul (64) devine

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \alpha\frac{\partial v}{\partial x} - \alpha^2\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} - \alpha\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\}$$

cu soluția

$$v = a_1\left(\alpha x + z - \frac{\alpha+1}{2}y^2\right) + a_2 y + a_3\left[x - y\left(\alpha x + \frac{y}{2} + z\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha+1}{6}y^3\right] + a_4.$$

Transformarea punctuală este deci

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= \alpha x + z - \frac{\alpha+1}{2} y^2, \\ u^2 &= y, \\ u^3 &= x - y\left(\alpha x + \frac{y}{2} + z\right) - \frac{\alpha+1}{6} y^3, \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

și spațiul A_3 este echivalent în mare cu E_3.

Considerînd conexiunea [XVI], sistemul (64) devine

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 4\frac{\partial v}{\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\}$$

avînd soluția

$$v = a_1\left[x - 2z - \frac{1}{2}(y+2z)^2\right] + a_2(y+2z) + a_3\left[4z - (x-z)(y+2z) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}(y+2z)^3\right] + a_4.$$

Deci transformarea punctuală este

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= x - 2z - \frac{1}{2}(y+2z)^2, \\ u^2 &= y + 2z, \\ u^3 &= 4z - (x-z)(y+2z) + \frac{1}{6}(y+2z)^3, \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

spațiile A_3 și E_3 fiind echivalente în mare.

În cazul conexiunii [XVII], sistemul (64) se scrie

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} - (4\alpha+1)\frac{\partial v}{\partial y} + 2\alpha\frac{\partial v}{\partial z} = -\alpha v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - (2\alpha+1)\frac{\partial v}{\partial y} + \\ &\quad + \alpha\frac{\partial v}{\partial z} = -\alpha v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} - (4\alpha+1)\frac{\partial v}{\partial y} + 2\alpha\frac{\partial v}{\partial z} = -2\alpha v, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = -\alpha v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = -2\alpha v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -4\alpha v, \end{aligned}\right\}$$

şi are soluţia

$$v = a_1 e^{\sqrt{-\alpha}(x+y+2z)} x + a_2 e^{-\sqrt{-\alpha}(x+y+2z)} x + a_3 e^{\sqrt{-\alpha}(x+y-2z)} + a_4 e^{-\sqrt{-\alpha}(x+y-2z)}.$$

Transformarea punctuală este deci

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= e^{2\sqrt{-\alpha}(x+y)} x, \\ u^2 &= e^{-4\sqrt{-\alpha} z} x, \\ u^3 &= e^{2\sqrt{-\alpha}(x+y-2z)}, \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

şi spaţiile A_3 şi E_3 nu sînt echivalente în mare.

Dacă considerăm conexiunea [XVIII], sistemul (64) devine

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1-2\alpha)\frac{\partial v}{\partial x} + (2\alpha-1)(4\alpha^2-2\alpha+1)\frac{\partial v}{\partial y} - 2\alpha^2(2\alpha-1)\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + (1-\alpha)\frac{\partial v}{\partial x} - (4\alpha^2-3\alpha+1)\frac{\partial v}{\partial y} + \alpha^2\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} - (8\alpha^2-4\alpha^2+1)\frac{\partial v}{\partial y} + \alpha(4\alpha-1)\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} + \\ &\quad + (2\alpha-1)\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} + (4\alpha-1)\frac{\partial v}{\partial y} - \alpha\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 8\alpha\frac{\partial v}{\partial y} - 4\alpha\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\}$$

cu soluţia

$$\begin{aligned} v = a_1 &\left(\frac{\alpha x - z}{\alpha} - \frac{[(2\alpha-1)x - y - 2z]^2}{2}\right) + a_2[(2\alpha-1)x - y - 2z] + \\ &+ a_3\left(-\frac{z}{\alpha^2} - \frac{[(2\alpha-1)x - y - 2z][(6\alpha-1)x - y - 6z]}{4\alpha} + \right. \\ &\left. + \frac{[(2\alpha-1)x - y - 2z]^3}{6}\right) + a_4. \end{aligned}$$

Transformarea punctuală este deci

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= \frac{\alpha x - z}{\alpha} - \frac{[(2\alpha-1)x - y - 2z]^2}{2}, \\ u^2 &= (2\alpha-1)x - y - 2z, \\ u^3 &= \frac{z}{\alpha^2} - \frac{[(2\alpha-1)x - y - 2z][(6\alpha-1)x - y - 2z]}{4\alpha} + \\ &\quad + \frac{[(2\alpha-1)x - y - 2z]^3}{6} \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

şi spaţiile A_3 şi E_3 sînt echivalente în mare.

În cazul conexiunii [XIX], sistemul (64) este

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0, \end{aligned}\right\}$$

având soluția

$$v=a_1\left[y-\frac{(y+z)^2}{2}\right]+a_2(y+z)+a_3\left[x-\frac{y^2-z^2}{2}+\frac{(y+z)^3}{6}\right]+a_4.$$

Deci, transformarea punctuală este

$$\left.\begin{aligned} u^1&=y-\frac{(y+z)^2}{2},\\ u^2&=y+z,\\ u^3&=x-\frac{y^2-z^2}{2}+\frac{(y+z)^3}{6}, \end{aligned}\right\}\tag{123}$$

spațiile A_3 și E_3 fiind echivalente în mare.

Considerînd conexiunea [XX], sistemul (64) se scrie

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\alpha+1}{4\alpha}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{4\alpha}\frac{\partial v}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}-\frac{\alpha+1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\alpha+1}{4\alpha}\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{\alpha+1}\frac{\partial v}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\alpha+1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-(\alpha^2-1)\frac{\partial v}{\partial x}=0, \end{aligned}\right\}$$

și are soluția

$$v=a_1\left(x+2\alpha z+\frac{\alpha-1}{2\alpha(\alpha+1)}[y+(\alpha+1)z]^2\right)+a_2[y+(\alpha+1)z]+$$

$$+a_3\left(4\alpha z-\left(x-\frac{2\alpha y}{\alpha+1}\right)[y+(\alpha+1)z]-\frac{\alpha-1}{6(\alpha+1)}[y+(\alpha+1)z]^3\right)+a_4.$$

Transformarea punctuală este deci

$$\left.\begin{aligned} u^1&=x+2\alpha z+\frac{\alpha-1}{2\alpha(\alpha+1)}[y+(\alpha+1)z]^2,\\ u^2&=y+(\alpha+1)z,\\ u^3&=4\alpha z-\left(x-\frac{2\alpha y}{\alpha+1}\right)[y+(\alpha+1)z]-\frac{\alpha-1}{6(\alpha+1)}[y+(\alpha+1)z]^3 \end{aligned}\right\}\tag{124}$$

și spațiul A_3 este echivalent în mare cu E_3.

Avem deci:

TEOREMA 5. *Transformările punctuale atașate conexiunilor proiective constante care determină, între spațiile A_3 și E_3, corespondențe speciale cu puncte comune neizolate, pot fi aduse, prin schimbări de variabile, la una din formele (105), ..., (124), echivalența dintre spațiile A_3 și E_3 fiind globală în cazul transformărilor (105) — (111), (114) — (116), (118) — (120), (122) — (124).*

Vom determina acum grupurile totale de mișcări ale transformărilor punctuale (105),..., (124).

În cazul conexiunii [I], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = a_1^2 = a_1^3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad a_1^1 = 2a_2^2, \quad \eta(a_2^2 - a_3^3) = 0, \quad \eta a_2^3 + a_3^2 = 0.$$

Dacă $\eta = 0$, avem opt transformări infinitezimale independente

$$X_i f = p_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = 2xp_1 + yp_2, \quad X_5 f = yp_1, \quad X_6 f = zp_1,$$
$$X_7 f = yp_3, \quad X_8 f = zp_3,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_4^2 x + \alpha_5 y + \alpha_6 z + \alpha_1, \\ y' &= \alpha_4 y + \alpha_2, \\ z' &= \alpha_7 y + \alpha_8 z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

Deci, *transformarea punctuală (105) cu $\eta = 0$ admite ca grup total de mișcări grupul maxim (125).*

Dacă $\eta = \pm 1$, avem șapte transformări infinitezimale independente

$$\left.\begin{aligned} &X_i f = p_i \ (i = 1, 2, 3), \ X_4 f = 2xp_1 + yp_2 + zp_3, \ X_5 f = yp_1, \\ &X_6 f = zp_1, \ X_7 f = yp_3 \pm zp_2, \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

care determină grup cu structura

$$(X_i X_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (X_1 X_5) = (X_1 X_6) = (X_1 X_7) = (X_2 X_6) =$$
$$= (X_3 X_5) = (X_4 X_7) = (X_5 X_6) = 0,$$
$$(X_1 X_4) = X_1, \ (X_2 X_4) = X_2, \ (X_2 X_5) = X_1, \ (X_2 X_7) = X_3, \ (X_3 X_4) = X_3,$$
$$(X_3 X_6) = X_1,$$
$$(X_3 X_7) = \pm X_2, \ (X_4 X_5) = -X_5, \ (X_4 X_6) = -X_6, \ (X_5 X_6) = \pm X_6,$$
$$(X_6 X_7) = X_5.$$

Deci, *transformarea punctuală (105) cu $\eta = \pm 1$ admite ca grup total de mișcări grupul (126).*

În cazul conexiunii [II], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = 0 \ (i = 1, 2, 3), \quad a_1^2 = a_1^3 = 0, \quad a_1^1 = 2\,(a_2^2 + a_2^3),$$
$$a_3^3 = a_2^2 - a_3^2 + (2 - \alpha)\, a_2^3, \quad (\alpha + 1)\, a_3^2 - \alpha\,(\alpha - 1)\, a_2^3 = 0.$$

Dacă $\alpha = -1$, avem șapte operatori independenți

$X_i f = p_i \ (i = 1, 2, 3)$, $X_4 f = 2xp_1 + yp_2 + zp_3$, $X_5 f = yp_1$, $X_6 f = zp_1$, $X_7 f = zp_2 - zp_3$,

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_4^2 x + \alpha_5 y + \alpha_6 z + \alpha_1, \\ y' &= \alpha_1 y + \alpha_1\left(1 - \frac{1}{\alpha_4}\right) z, \\ z' &= \frac{\alpha_1}{\alpha_4} z. \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

Dacă $\alpha \neq -1$, avem de asemenea șapte operatori independenți $X_i f = p_i \ (i = 1, 2, 3)$, $X_4 f = 2xp_1 + yp_2 + zp_3$, $X_5 f = yp_1$, $X_6 f = zp_1$,

$$X_7 f = 2xp_1 + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\alpha + 1} zp_2 + \left[y - \frac{2(\alpha^2 - \alpha - 1)}{\alpha + 1}\right] p_3.$$

Dintre acești operatori, doar primii șase formează grup și anume

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_4^2 x + \alpha_5 y + \alpha_6 z + \alpha_1, \\ y' &= \alpha_4 y + \alpha_2, \\ z' &= \alpha_4 z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Deci, *grupul total de mișcări al transformării punctuale (106) este grupul (127), dacă* $\alpha = -1$ *și grupul (128), dacă* $\alpha \neq -1$,0.

Considerînd conexiunea [III], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = a_1^i = a_3^i = 0 \ (i = 1, 2, 3), \quad (\alpha - 1) a_2^2 = 0, \quad a_2^1 = -a_2^2 - a_2^3.$$

Dacă $\alpha = 1$ avem cinci transformări infinitezimale independente

$X_i f = p_i \ (i = 1, 2, 3)$, $X_4 f = yp_1 - yp_2$, $X_5 f = yp_1 - yp_3$,

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + (\alpha_4 + \alpha_5) y + \alpha_1, \\ y' &= (1 - \alpha_4) y + \alpha_2, \\ z' &= -\alpha_5 y + z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{129}$$

Dacă $\alpha \neq 1$, avem patru transformări infinitezimale independente

$$X_i f = p_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = yp_1 - yp_3,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \alpha_4 y + \alpha_1, \\ y' &= y + \alpha_2, \\ z' &= -\alpha_4 y + z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

Deci, *transformarea punctuală (107) admite ca grup total de mișcări grupul (129), dacă* $\alpha = 1$ *și (130), dacă* $\alpha \neq 0$.

Considerînd conexiunea [IV], sistemul (73), (74) devine

$$a_i = 0 \ (i = 1, 2, 3), \ a_1^2 = a_3^2 = a_1^3 = 0, \ a_1^1 = a_3^1 + a_3^3, \ a_2^1 = -a_2^3, \ a_2^2 = -a_3^1.$$

Avem deci șase operatori independenți

$$X_i f = p_i \ (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = (x + z)\, p_1 - y p_2,$$
$$X_5 f = x p_1 + z p_3, \quad X_6 f = y p_1 - y p_3.$$

Dintre aceștia operatori doar primii cinci formează grup și anume

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_4 \alpha_5 x + \alpha_5 (\alpha_4 - 1) y + \alpha_1, \\ y' &= \frac{1}{\alpha_4} y + \alpha_2, \\ z' &= \alpha_5 z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

Rezultă că, *grupul (131) este grupul total de mișcări al transformării punctuale (108).*

În cazul conexiunii [V], sistemul (76), (74) se scrie

$$a_i = 0 \ (i = 1, 2, 3), \ a_1^2 = a_3^2 = 0, \ a_1^1 = 2 a_2^2 \mp a_2^1, \ a_1^3 = \pm (2a_2^2 - a_3^3).$$

Avem deci opt transformări infinitezimale independente

$$\left.\begin{aligned} &X_i f = p_i \ (i = 1, 2, 3), \ X_4 f = 2x p_1 + y p_2 \pm 2x p_3, \ X_5 f = y p_1, \\ &X_6 f = (z \pm x)\, p_1, \ X_7 f = y p_3, \ X_8 f = (z \pm x)\, p_3, \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

care formează un grup cu structura

$$(X_i X_j) = 0 \ (i, j = 1, 2, 3), \ (X_1 X_5) = (X_1 X_7) = (X_2 X_6) = (X_2 X_8) =$$
$$= (X_3 X_4) = (X_3 X_5) = (X_3 X_7) = (X_4 X_8) = (X_5 X_7) = 0,$$
$$(X_1 X_4) = 2 (X_1 \pm X_3), \ (X_1 X_6) = \pm X_1,$$
$$(X_1 X_8) = \pm X_3, \ (X_2 X_4) = X_2, \ (X_2 X_5) = X_1, \ (X_2 X_7) = X_3,$$
$$(X_3 X_6) = X_1, \ (X_3 X_8) = X_3,$$
$$(X_4 X_5) = -X_5 \mp 2X_7, \ (X_4 X_6) = -2 (X_6 \pm X_8), \ (X_4 X_7) = X_7,$$
$$(X_5 X_6) = \pm X_5, \ (X_5 X_8) = \pm X_7, \ (X_6 X_7) = -X_5, \ (X_7 X_8) = X_7.$$

Deci, *transformarea punctuală (109) admite ca grup total de mișcări grupul maxim (132).*

Considerînd conexiunea [VI], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = 0 \ (i = 1, 2, 3), \ a_1^1 = a_3^1 = a_1^2 = a_3^2 = 0, \ a_1^3 = a_3^3 = -a_2^2, \ a_2^1 = a_2^2 - a_2^3.$$

Deci, avem cinci operatori independenți

$$X_i f = p_i \ (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = y p_1 + y p_2 - (x + z) p_3, \quad X_5 f = y p_1 - y p_3,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \frac{\alpha_4 + \alpha_5}{\alpha_5} (e^{\alpha_4} - 1) y + \alpha_1, \\ y' &= e^{\alpha_4} y + \alpha_2, \\ z' &= (1 - e^{-\alpha_4}) x + \left[\frac{\alpha_4 + \alpha_5}{\alpha_4} (e^{-\alpha_4} - 1) - (\alpha_4 + 2\alpha_5) e^{\alpha_4} \right] y + e^{-\alpha_4} z. \end{aligned}\right\} \tag{133}$$

Rezultă că, *grupul (133) este grupul total de mișcări al transformării punctuale (110).*

În cazul conexiunii [VII], sistemul (73), (74) devine

$$a_i = 0 \ (i = 1, 2, 3), \quad a_1^2 = a_3^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0, \quad a_1^1 = a_2^2 + a_3^3.$$

Avem deci șapte operatori independenți

$$X_i f = p_i \ (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = x p_1 + y p_2, \quad X_5 f = x p_1 + z p_3,$$

$$X_6 f = y p_1, \quad X_7 f = z p_1,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_4 \alpha_5 x + \alpha_6 y + \alpha_7 z + \alpha_1, \\ y' &= \alpha_4 y + \alpha_2, \\ z' &= \alpha_5 z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{134}$$

Deci, *transformarea punctuală (111) admite ca grup total de mișcări grupul (134).*

Considerînd conexiunea [VIII], sistemul (73), (74) devine

$$a_i = a_i^2 = a_i^3 = 0 \ (i = 1, 2, 3), \quad a_1^1 = 2 (2a_2^1 + a_2^3), \quad a_3^1 = 2 (a_2^1 + a_2^3), \quad a_3^3 = -2a_2^3.$$

Avem deci cinci operatori infinitezimali independenți

$$X_i f = p_i \ (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = (4x + y + 2z) p_1, \quad X_5 f = 2 (x + z) p_1 + (y - 2z) p_3,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= (\alpha_4 + 1) x + \frac{\alpha_4 + \alpha_5}{4} y + \frac{\alpha_4 - \alpha_5}{2} z + \alpha_1, \\ y' &= y + \alpha_2, \\ z' &= -\frac{\alpha_5}{2} y + (\alpha_5 + 1) z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

Deci, *transformarea punctuală (112) admite ca grup total de mișcări grupul (135).*

Vom considera acum conexiunea [IX]. Sistemul (73), (74) se scrie $a_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $a_2^1 = a_3^1 = a_2^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0$, $a_1^2 = a_1^1$, $a_3^2 = -a_3^3$, deci avem cinci transformări infinitezimale independente

$$X_i f = p_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = xp_1 + xp_2, \quad X_5 f = zp_2 - zp_3,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_4 x + \alpha_1, \\ y' &= (\alpha_4 - 1) x + y + (1 - \alpha_5) z + \alpha_2, \\ z' &= \alpha_5 z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

Deci, *grupul total de mișcări al transformării punctuale (113) este grupul (136).*

Dacă considerăm conexiunea [X], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = a_1^2 = a_3^2 = a_1^3 = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad a_3^1 = 2a_2^3, \quad a_1^1 = 4a_2^2, \quad a_3^3 = 2a_2^2.$$

Deci, avem șase transformări infinitezimale independente și anume:

$$X_i f = p_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = 4xp_1 + yp_2 + 2zp_3, \quad X_5 f = yp_1,$$
$$X_6 f = 2zp_1 + yp_3.$$

Dintre acestea doar primele cinci formează grup și anume:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_4^4 x + \alpha_4 \alpha_5 (\alpha_4^3 - 1) y + \alpha_1, \\ y' &= \alpha_4 y + \alpha_2, \\ z' &= \alpha_4^2 z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

Deci, *grupul total de mișcări al transformării punctuale (114) este grupul (137).*

În cazul conexiunii [XI], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = a_i^3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad a_1^1 = 2a_3^1 + 2a_3^2 - a_1^2,$$
$$a_2^1 = -a_1^2, \quad a_2^2 = 2a_3^1 + 2a_3^2 + a_1^2.$$

Avem deci șase operatori independenți

$$X_i f = p_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = (x + y)(p_1 - p_2),$$

$$X_5 f = (2x + z) p_1 + 2yp_2, \quad X_6 f = 2xp_1 + (2y + z) p_2,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= (\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + 1) x + \alpha_4 y + \alpha_5 z + \alpha_1, \\ y' &= -\alpha_4 x + (-\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + 1) y + \alpha_6 z + \alpha_2, \\ z' &= z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Deci, *grupul total de mișcări al transformării punctuale (115) este grupul (138).*

În cazul conexiunii [XII], sistemul (73), (74) devine

$$a_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad a_3^1 = a_1^2 = a_3^2 = 0, \quad a_1^1 = 2a_2^2, \quad a_1^3 = 2a_2^1, \quad a_3^3 = 3a_2^2,$$

și deci avem șase operatori independenți

$$X_i f = p_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = 2xp_1 + yp_2 + 3zp_3,$$
$$X_5 f = yp_1 + 2xp_3, \quad X_6 f = yp_3,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_4^2 x + \alpha_5 y + \alpha_1, \\ y' &= \alpha_4 y + \alpha_2, \\ z' &= 2\alpha_4 \alpha_5 x + \alpha_6 y + \alpha_4^3 z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

Deci, *transformarea punctuală (116) admite ca grup total de mișcări grupul (139).*

Considerînd conexiunea [XIII], sistemul (73), (74) se scrie

$$a_i = a_i^2 = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad a_1^1 = a_3^3 = 2a_2^3, \quad a_3^1 = -a_1^3 = 2a_2^1.$$

Avem deci cinci transformări infinitezimale independente

$$X_i f = p_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = 2xp_1 + (y + 2z) p_3,$$
$$X_5 f = (y + 2z) p_1 - 2xp_3,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= (1 + 2\alpha_4) x + \alpha_5 (y + 2z) + \alpha_1, \\ y' &= y + \alpha_2, \\ z' &= -2\alpha_5 x + \alpha_4 y + (1 + 2\alpha_4) z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

Deci, *grupul total de mișcări al transformării punctuale (117) este grupul (140).*

Dacă considerăm conexiunea [XIV], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = a_i^2 = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad a_3^1 = a_1^3 = 0, \quad a_1^1 = a_3^3 = 2\,(a_2^1 + a_2^3).$$

Deci, avem cinci operatori independenți

$$X_i f = p_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = (2x + y) p_1 + 2zp_3,$$
$$X_5 f = 2xp_1 + (y + 2z) p_3,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= (\alpha_4 + 1) x + \alpha_4 \alpha_5 y + \alpha_1, \\ y' &= y + \alpha_2, \\ z' &= \alpha_4 \left(\frac{1}{2} - \alpha_5\right) y + (\alpha_4 + 1) z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

Deci, *transformarea punctuală (118) admite ca grup total de mișcări grupul (141).*

În cazul conexiunii [XV], sistemul (73), (74) este

$$\left.\begin{aligned} &a_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad a_1^2 = a_3^2 = 0, \quad a_1^1 = 6(\alpha a_2^1 + a_2^3) - (2\alpha + 3) a_3^1, \\ &a_2^2 = 2(\alpha a_2^1 + a_2^3) - (\alpha + 1) a_3^1, \quad a_1^3 = -\alpha(2\alpha a_2^1 - a_3^1 + 2a_2^3), \\ &a_3^3 = 4(\alpha a_2^1 + a_2^3) - (3\alpha + 2) a_3^1. \end{aligned}\right\}$$

Deci, avem șase operatori independenți și anume:

$$X_i f = p_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = 6xp_1 + 2yp_2 + (-2\alpha x + y + 4z) p_3,$$

$$X_5 f = [(2\alpha + 3) x - z] p_1 + (\alpha + 1) yp_2 - [\alpha x + (\alpha + 1) z] p_3,$$

$$X_6 f = (6\alpha x + y) p_1 + 2\alpha y p_2 - 2\alpha(\alpha x - 2z) p_3.$$

Dintre acești operatori, doar primii patru determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_4^3 x + \alpha_1, \\ y' &= \alpha_4 y + \alpha_2, \\ z' &= -\alpha_4^2(\alpha_4 - 1) x + \frac{\alpha_4(\alpha_4 - 1)}{2} y + \alpha_4^2 z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{142}$$

Deci, *grupul total de mișcări al transformării punctuale (119) este grupul (142).*

Considerînd conexiunea [XVI], sistemul (73), (74) devine

$$a_i = a_j^i = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Deci, avem trei operatori infinitezimali independenți

$$X_i f = p_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

care determină grupul

$$x' = x + \alpha_1, \quad y' = y + \alpha_2, \quad z' = z + \alpha_3. \tag{143}$$

Rezultă că, *grupul total de mișcări al transformării punctuale (120) este grupul (143).*

Dacă considerăm conexiunea [XVII], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = a_j^i = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

deci, *grupul total de mișcări al transformării punctuale (121) este grupul (143).*

Același rezultat se obține și în cazul conexiunii [XVIII].

Deci, *transformarea punctuală (122) are ca grup total de mișcări grupul (143).*

În cazul conexiunii [XIX], sistemul (73), (74) se scrie

$$a^i = a_1^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad a_k^h = 0 \quad (h, k = 2, 3), \quad a_3^1 = a_2^1,$$

deci avem patru transformări infinitezimale independente

$$X_i f = p_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = (y + z)\, p_1,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \alpha_4 (y + z) + \alpha_1, \\ y' &= y + \alpha_2, \\ z' &= z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{144}$$

Deci, *grupul total de mișcări al transformării punctuale* (*123*) *este grupul* (*144*).

Considerînd conexiunea [XX], sistemul (73), (74) devine

$$a_i = a^i_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Deci, *grupul total de mișcări al transformării punctuale* (*124*) *este grupul* (*143*).

Rezultă:

TEOREMA 6. *Transformările punctuale atașate conexiunilor proiective constante care determină, între spațiile A_3 și E_3, corespondențe speciale cu puncte comune neizolate, au ca grupuri totale de mișcări grupurile* (*125*), ..., (*144*).

IV

Ne vom ocupa acum de corespondențele speciale cu puncte comune izolate.

În primul rînd această corespondență se realizează dacă conexiunea Π^i_{jk} verifică sistemul (6) cu $\Pi^2_{21} \neq 0$. Astfel sistemul (6) se scrie:

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = \Pi^3_{11} = \Pi^3_{12} = \Pi^3_{22} = 0, \quad \Pi^2_{22} = 2\Pi^3_{32}, \quad \Pi^1_{12} = -3\Pi^3_{32}, \\ &\Pi^3_{33} = 2\Pi^2_{23}, \quad \Pi^1_{13} = -3\Pi^2_{23}, \quad \Pi^3_{31} = \Pi^2_{21} \neq 0, \quad \Pi^1_{11} = -2\Pi^2_{21} \neq 0. \end{aligned}\right\}$$

Cu aceste valori, sistemul (34) ne dă

$$\Pi^1_{22} = -\frac{4(\Pi^3_{32})^2}{\Pi^2_{21}}, \quad \Pi^1_{33} = -\frac{4(\Pi^2_{23})^2}{\Pi^2_{21}}, \quad \Pi^1_{23} = -\frac{4\Pi^2_{23}\Pi^3_{32}}{\Pi^2_{21}}.$$

Avînd în vedere că cel puțin una din cantitățile $\Pi^1_{22}, \Pi^1_{23}, \Pi^1_{33}$ trebuie să fie nenulă, rezultă că avem de considerat două cazuri

1. $\Pi^3_{32} \neq 0, \quad \Pi^2_{23} = 0,$ *)
2. $\Pi^3_{32} \neq 0, \quad \Pi^2_{23} \neq 0.$

*) Cazul $\Pi^2_{23} \neq 0$, $\Pi^3_{32} = 0$ se deduce din cazul 1 prin schimbarea indicilor 2 cu 3.

În cazul 1, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \Pi^2_{21}\, x + \Pi^3_{32} y, \quad \bar{y} = \Pi^3_{32}\, y, \quad \bar{z} = z,$$

conexiunea devine

$$\Pi^1_{11} = -2, \quad \overline{\Pi}^2_{21} = \overline{\Pi}^3_{31} = 1,$$

celelalte componente fiind nule.

În cazul 2, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \Pi^2_{21}\, x + \Pi^3_{32}\, y + \Pi^2_{23}\, z, \quad \bar{y} = \Pi^3_{32}\, y, \quad \bar{z} = \Pi^2_{23}\, z,$$

obținem aceeași conexiune ca mai sus.

Deci, conexiunea constantă Π^i_{jk} care verifică sistemul (6) cu $\Pi^2_{21} \neq 0$, poate fi adusă, prin schimbări de variabile, la forma

$$[1] \quad \Pi^1_{11} = -2, \quad \Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = 1.$$

Vom determina acum conexiunea constantă, care verifică sistemul (7) cu condițiile

$$\Pi^1_{33} \neq 0, \quad \Pi^1_{33}(6\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11}) - (3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})^2 \neq 0. \tag{7''}$$

Din (7) deducem

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = 0, \\ &\Pi^1_{11} = \frac{\mu^2(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) - \Pi^3_{11}}{2\mu}, \quad \Pi^2_{21} = \frac{\mu^2(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^3_{11}}{4\mu}, \quad \Pi^3_{22} = -\mu\Pi^1_{22}, \\ &\Pi^1_{12} = \frac{\mu^2\Pi^1_{23} - 3\Pi^3_{12}}{4\mu}, \quad \Pi^2_{22} = \frac{\Pi^1_{23} + \Pi^3_{12}}{2\mu}, \quad \Pi^1_{33} = \frac{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}{\mu}, \end{aligned}\right\}$$

care înlocuite în (7'') ne dau

$$3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13} \neq 0, \quad \Pi^3_{11} + \mu^2(\Pi^1_{13} - 5\Pi^2_{23}) = 0. \tag{145}$$

Cu aceste valori sistemul (34) devine

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^3_{11}\Pi^1_{23} - \Pi^3_{12}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) = 0, \\ &\mu^2(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})^2 + \Pi^3_{11}(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}) = 0, \\ &\mu^2\Pi^1_{23}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^3_{12}(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}) = 0, \\ &\Pi^3_{12}(\mu^2\Pi^1_{23} + \Pi^3_{12}) + \mu\Pi^1_{22}[\mu^2(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^3_{11}] = 0, \\ &\Pi^1_{23}(\mu^2\Pi^1_{23} + \Pi^3_{12}) - 4\mu\Pi^1_{22}\Pi^2_{23} = 0, \\ &2\Pi^3_{12}(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) + \Pi^1_{23}[\mu^2(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) - \Pi^3_{11}] = 0, \\ &\mu\Pi^1_{22}[\mu^2(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}) + \Pi^3_{11}] + (\Pi^3_{12})^2 - \mu^4(\Pi^1_{23})^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

Din primele trei ecuații ale acestui sistem deducem

$$\Pi^3_{11} = -\frac{\mu^2(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})^2}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}, \quad \Pi^3_{12} = -\frac{\mu^2\Pi^1_{23}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}.$$

Cu aceste valori, neegalitatea a doua din (145) ne dă

$$\Pi^2_{23} \neq 0,$$

iar celelalte ecuații din sistemul (146)

$$\Pi^2_{22} = \frac{\mu(\Pi^1_{23})^2}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}.$$

Conexiunea Π^i_{jk} se scrie deci

$$\Pi^1_{11} = \frac{\mu[(\Pi^1_{13})^2 - (\Pi^2_{23})^2]}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}, \quad \Pi^2_{21} = \frac{\mu\Pi^2_{23}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}, \quad \Pi^3_{31} = -\frac{\mu(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(\Pi^1_{13} + 2\Pi^2_{23})}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}},$$

$$\Pi^1_{12} = \frac{\mu\Pi^1_{13}\Pi^1_{23}}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}, \quad \Pi^2_{22} = \frac{2\mu\Pi^1_{23}\Pi^2_{23}}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}, \quad \Pi^3_{32} = -\frac{\mu\Pi^1_{23}(\Pi^1_{13} + 2\Pi^2_{23})}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}},$$

$$\Pi^1_{22} = \frac{\mu(\Pi^1_{23})^2}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}, \quad \Pi^1_{33} = \frac{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}{\mu}, \quad \Pi^3_{11} = -\frac{\mu^2(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})^2}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}},$$

$$\Pi^3_{12} = -\frac{\mu^2\Pi^1_{23}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}, \quad \Pi^3_{22} = -\frac{\mu^2(\Pi^1_{23})^2}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}, \quad \Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = 0,$$

$$\Pi^2_{23} \neq 0, \quad 3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13} \neq 0, \quad \mu \neq 0.$$

Dacă $\Pi^1_{23} = 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \frac{\mu\Pi^2_{23}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}} x + \Pi^2_{23} z, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = \Pi^2_{23}(\mu x + z),$$

conexiunea devine identică cu conexiunea [I].

Dacă $\Pi^1_{23} \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\Pi^2_{23}}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}}[\mu(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})x + \mu\Pi^1_{23} y + (3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}) z], \\ \bar{y} &= \Pi^2_{23}\left(\mu x + \frac{\mu\Pi^1_{23}}{3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13}} y + z\right), \\ \bar{z} &= \Pi^2_{23} z, \end{aligned}\right\}$$

conexiunea Π^i_{jk} devine identică cu conexiunea [I].

Deci, *conexiunea constantă* Π^i_{jk}, *care verifică sistemul* (7), (7''), *poate fi adusă, prin schimbări de variabile, la forma* [I].

Ne vom ocupa acum de conexiunea care verifică sistemul (8) cu condiția

$$6\,\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11} \neq 0.$$

Sistemul (8) ne dă

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^1_{11} = -\frac{\Pi^3_{11} + 4\lambda^2\Pi^2_{23}}{2\lambda},\quad \Pi^2_{21} = \frac{\Pi^3_{11} - 4\lambda^2\Pi^2_{23}}{4\lambda},\quad \Pi^3_{31} = \frac{\Pi^3_{11} + 12\lambda^2\Pi^2_{23}}{4\lambda},\\ &\Pi^1_{12} = \frac{\lambda^2\Pi^1_{23} - 3\Pi^3_{12}}{4\lambda},\quad \Pi^2_{22} = \frac{\lambda^2\Pi^1_{23} + \Pi^3_{12}}{2\lambda},\quad \Pi^3_{32} = -\frac{3\lambda^2\Pi^1_{23} - \Pi^3_{12}}{4\lambda},\\ &\Pi^3_{22} = -\lambda\Pi^1_{22},\quad \Pi^3_{33} = 2\Pi^2_{23},\quad \Pi^1_{13} = -3\Pi^2_{23},\quad \Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = \Pi^1_{33} = 0, \end{aligned}\right\}$$

iar neegalitatea (8''')

$$\Pi^3_{11} - 8\,\lambda^2\Pi^2_{23} \neq 0. \tag{147}$$

Înlocuind aceste valori în ecuația (34) pentru $i = 1$, $k = 2$, $j = l = 3$, obținem

$$\Pi^1_{23}\Pi^2_{23} = 0. \tag{148}$$

Vom presupune în primul rînd că $\Pi^1_{23} = 0$. În acest caz, avînd în vedere că $\Pi^1_{33} = 0$ rezultă $\Pi^1_{22} \neq 0$.

Cu aceste valori, ecuația (34) pentru $i = l = 2$, $j = k = 1$ și $i = 3$, $j = l = 2$, $k = 1$ ne dă

$$\Pi^2_{23} = 0,\quad \Pi^3_{11} = 0,$$

care contrazic neegalitatea (147).

Deci avem $\Pi^1_{23} \neq 0$, care înlocuită în (148) ne dă $\Pi^2_{23} = 0$.

În acest caz celelalte ecuații (34) ne dau $\Pi^3_{11} = 0$, ceea ce este absurd, în baza neegalității (147).

Deci, *dacă conexiunea proiectivă* Π^i_{jk} *este constantă, sistemul* (8), (8''') *nu are soluții.*

Vom considera acum conexiunea Π^i_{jk}, care verifică sistemul (9) cu condiția

$$2\Pi^1_{12}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^2_{22}(7\Pi^1_{13} + 9\Pi^2_{23}) + \Pi^1_{23}(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) \neq 0. \tag{9''}$$

Avînd în vedere ultimele relații (9), ecuațiile (34) pentru $i = j = 1$, $k = 2$, $l = 3$; $i = 1$, $j = k = 2$, $l = 3$ și $i = 1$, $j = l = 3$, $k = 2$ ne dau

$$\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21} = 0,\quad \Pi^2_{22} = 0,\quad \Pi^1_{13} + \Pi^2_{23} = 0.$$

Cu aceste valori, sistemul (9), (9'') devine

$$\Pi^2_{11} = \frac{2\Pi^1_{13}(2\Pi^2_{21}\Pi^1_{23} + \Pi^1_{12}\Pi^1_{13})}{(\Pi^1_{23})^2},\quad \Pi^2_{13} = -\frac{(\Pi^1_{13})^2}{\Pi^1_{23}},\quad \Pi^3_{12} = -\frac{(\Pi^1_{12})^2}{\Pi^1_{23}},$$

$$\Pi^3_{11} = \frac{2\Pi^1_{12}(2\Pi^2_{21}\Pi^1_{23} + \Pi^1_{12}\Pi^1_{13})}{(\Pi^1_{23})^2},\quad \Pi^1_{12}\Pi^1_{13} + \Pi^1_{23}\Pi^2_{11} \neq 0.$$

Înlocuind aceste valori în celelalte ecuații (34) obținem

$$\Pi^1_{12} = 0, \quad \Pi^2_{11} = 0,$$

care contrazice neegalitatea de mai sus.

Deci, *sistemul (9), (9'') nu are soluții, dacă conexiunea* Π^i_{jk} *este constantă.*

Să determinăm acum conexiunea constantă Π^i_{jk} care verifică sistemul (10) cu condiția

$$(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})(5\Pi^1_{13} - 6\Pi^2_{23}) - \Pi^1_{33}(5\Pi^1_{11} + 6\Pi^2_{21}) \neq 0. \qquad (10'')$$

Având în vedere ultimele relații (10), ecuația (34) pentru $i = j = 1$, $k = 2$, $l = 3$ și $i = 1$, $j = l = 3$, $k = 2$ ne dă

$$\Pi^1_{12} = 0, \quad \Pi^3_{12} = 0.$$

Sistemul (10) devine în acest caz

$$\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21} = \frac{(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})}{\Pi^1_{33}}, \quad \Pi^2_{13} = \frac{\Pi^2_{33}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})}{\Pi^1_{33}},$$

$$\Pi^2_{11} = \frac{\Pi^2_{33}[2\Pi^1_{11}\Pi^1_{33} - (\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})]}{(\Pi^1_{33})^2},$$

$$\Pi^3_{11} = -\frac{(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})[2\Pi^1_{11}\Pi^1_{33} - (\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})]}{(\Pi^1_{33})^2}.$$

Cu aceste valori, celelalte ecuații (34) ne dau

$$\left.\begin{aligned} \Pi^1_{11} &= \frac{(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})}{\Pi^1_{33}}, \quad \Pi^2_{21} = \frac{\Pi^2_{23}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})}{\Pi^1_{33}}, \\ \Pi^2_{11} &= \frac{\Pi^2_{33}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})^2}{(\Pi^1_{33})^2}, \quad \Pi^3_{11} = -\frac{(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})^2(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})}{(\Pi^1_{33})^2}, \end{aligned}\right\}$$

iar neegalitatea (10'')

$$\Pi^2_{23} \neq 0, \quad 3\Pi^1_{13} - 7\Pi^2_{23} \neq 0.$$

Dacă $\Pi^2_{33} = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \frac{\Pi^2_{23}}{\Pi^1_{33}}[(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})x + \Pi^1_{33}z], \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = \frac{\Pi^2_{23}}{\Pi^1_{13}}[(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})x + \Pi^1_{33}z],$$

conexiunea Π^i_{jk} se reduce la conexiunea [I].

Dacă $\Pi^2_{33} \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \frac{\Pi^2_{23}}{\Pi^1_{33}}[(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})x + \Pi^1_{33}z], \bar{y} = \frac{(\Pi^2_{23})^2}{\Pi^2_{33}}y, \quad \bar{z} = \frac{\Pi^2_{23}}{\Pi^1_{33}}[(3\Pi^2_{23} + \Pi^1_{13})x + \Pi^1_{33}z],$$

conexiunea devine identică cu conexiunea [I].

Deci, *conexiunea proiectivă constantă* Π^i_{jk} *care verifică sistemul* (*10*), (*10''*) *poate fi adusă, prin schimbări de variabile, la forma* [*I*].

Vom considera acum sistemul (11) cu condiția

$$32\,\Pi^2_{22}\,\Pi^2_{33}\,(\Pi^1_{23})^2-(3\Pi^2_{22}+2\Pi^1_{12})^2\,(\Pi^1_{33})^2-4\,(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13})\,(3\Pi^2_{22}-\Pi^1_{12})\,\Pi^1_{23}\,\Pi^1_{33}+$$
$$+4\Pi^1_{33}\,(\Pi^1_{23})^2\,(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})\neq 0. \qquad (11'')$$

Avînd în vedere ultimele relații (11), ecuația (34) pentru $i=1$, $j=k=2$, $l=3$; $i=k=1$, $j=l=2$ și $i=3$, $j=k=1$, $l=2$ ne dă

$$\Pi^1_{11}=0,\quad \Pi^2_{22}=0,\quad \Pi^1_{12}\,\Pi^3_{11}=0. \qquad (149)$$

Vom presupune întîi că $\Pi^1_{12}=0$. Înlocuind aceste valori în a patra ecuație (11) rezultă $\Pi^2_{21}=0$, ceea ce este absurd în baza neegalității (11''). Deci $\Pi^1_{12}\neq 0$. Din (149) rezultă $\Pi^3_{11}=0$.

Celelalte ecuații (34) se scriu

$$\left.\begin{array}{l}
\Pi^2_{11}\,(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0,\ \Pi^3_{12}\,(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0,\ (\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})\,(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0,\\
2\Pi^1_{23}\,\Pi^2_{21}+\Pi^1_{33}\,\Pi^3_{12}=0,\ 2\Pi^1_{23}\,\Pi^2_{21}+\Pi^3_{12}\,\Pi^1_{13}+2\Pi^1_{12}\,(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0,\\
\Pi^1_{33}\,\Pi^1_{12}-\Pi^1_{23}\,(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})=0,\ \Pi^1_{23}\,\Pi^2_{11}-2\Pi^2_{13}\,\Pi^1_{12}-\Pi^2_{33}\,\Pi^3_{12}=0,\\
2\Pi^1_{12}\,\Pi^2_{13}-\Pi^1_{23}\,\Pi^2_{11}+\Pi^3_{12}\,\Pi^2_{33}-2\Pi^2_{21}\,(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0,\\
\Pi^2_{11}\,\Pi^1_{33}+2\Pi^2_{21}\,\Pi^2_{33}-2\Pi^2_{13}\,(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})=0,\ 4\Pi^1_{12}\,\Pi^2_{21}+\Pi^3_{12}\,(3\Pi^2_{23}+\Pi^1_{13})=0.
\end{array}\right\} \qquad (150)$$

Presupunînd că $\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23}\neq 0$, din primele trei ecuații (114) rezultă

$$\Pi^2_{11}=0,\quad \Pi^3_{12}=0,\quad \Pi^2_{23}=-\Pi^1_{13}\neq 0,$$

care înlocuite în următoarele două ecuații ne dau

$$\Pi^2_{21}=0,\quad \Pi^1_{12}\Pi^1_{13}=0.$$

Ultima egalitate este imposibilă, deci $\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}$.

Cu aceste valori sistemul (11) devine:

$$\left.\begin{array}{l}
(\Pi^1_{12})^2+\Pi^1_{23}\Pi^3_{12}=0,\ \Pi^1_{12}(\Pi^1_{13})^2-2\,\Pi^1_{13}\,\Pi^1_{23}\,\Pi^1_{33}+\Pi^2_{33}\,(\Pi^1_{23})^2=0,\\
\Pi^2_{13}(\Pi^1_{33})^2-\Pi^1_{23}(\Pi^2_{33})^2=0,\ \Pi^1_{32}\Pi^2_{21}-\Pi^1_{12}\Pi^2_{33}=0,\ \Pi^2_{11}=0,
\end{array}\right\} \qquad (11''')$$

neegalitatea (11'') se scrie

$$\Pi^1_{33}\Pi^3_{12}-2\,\Pi^1_{33}\,\Pi^2_{21}\neq 0, \qquad (11^{IV})$$

iar sistemul (150)

$$\left.\begin{array}{l}
2\,\Pi^1_{23}\Pi^2_{21}+\Pi^1_{33}\Pi^3_{12}=0,\ \Pi^3_{12}(\Pi^1_{13}-\Pi^1_{33})=0,\ \Pi^1_{33}\Pi^1_{12}-2\,\Pi^1_{23}\Pi^1_{13}=0,\\
2\Pi^2_{13}\Pi^1_{12}+\Pi^2_{33}\Pi^3_{12}=0,\ \Pi^2_{21}\Pi^2_{33}-2\Pi^1_{13}\Pi^2_{13}=0,\ \Pi^1_{12}\Pi^2_{21}+\Pi^1_{13}\Pi^3_{12}=0.
\end{array}\right\} \qquad (150')$$

Avînd în vedere (150'), neegalitatea (11^{IV}) ne dă $\Pi^3_{12}\neq 0$. Cu aceste valori, din (11''') rezultă $\Pi^1_{23}=0$, ceea ce este absurd.

Deci, *dacă conexiunea* Π^i_{jk} *este constantă sistemul* (*11*), (*11''*) *nu are soluții.*

Ne vom ocupa acum de conexiunea proiectivă constantă care verifică sistemul (12) cu condiția

$$(\Pi^1_{22})^3(\Pi^2_{33})^2+(\Pi^1_{33})^3(\Pi^3_{22})^2+4\Pi^1_{33}\Pi^2_{33}(\Pi^1_{22})^2(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})-$$
$$-2\Pi^3_{22}\Pi^1_{22}(\Pi^1_{33})^2(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13})+(\Pi^1_{22}\Pi^1_{33})^2(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})\neq 0. \tag{12''}$$

Scriind ecuația (34) pentru $i=j=1, k=2, b=3$; $j=k=2$, $i=1, l=3$ și $i=1, j=l=3, k=2$ obținem

$$\Pi^2_{13}=\frac{\Pi^1_{33}\Pi^3_{12}}{\Pi^1_{22}},\quad \Pi^3_{22}=\frac{\Pi^1_{22}(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13})}{\Pi^1_{33}},\quad \Pi^2_{33}=-\frac{\Pi^1_{33}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})}{\Pi^1_{22}}. \tag{151}$$

Cu aceste valori, sistemul (12) ne dă

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^1_{12}=\Pi^2_{22}=\frac{(\Pi^1_{22})^2(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})}{(\Pi^1_{33})^2},\quad \Pi^3_{12}=\frac{(\Pi^1_{22})^2(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13})(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})}{(\Pi^1_{33})^3},\\
&\Pi^2_{11}=\frac{\Pi^1_{22}(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})\,[(\Pi^1_{33})^4(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})+2(\Pi^1_{22})^3(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})^2]}{(\Pi^1_{33})^6},\\
&\Pi^3_{11}=\frac{(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})\,[(\Pi^1_{33})^4(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})+2(\Pi^1_{22})^3(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{22})^2]}{\Pi^1_{22}(\Pi^1_{33})^4},\\
&(\Pi^1_{22})^3(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})^2+(\Pi^1_{33})^3[\Pi^1_{33}(2\Pi^2_{21}+\Pi^1_{11})-(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})^2]=0,
\end{aligned}\right\}\tag{151'}$$

iar neegalitatea (12'')

$$(\Pi^1_{33})^4(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})-3(\Pi^1_{22})^3(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})^2-(\Pi^1_{33})^3(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})^2\neq 0. \tag{12'''}$$

Cu aceste valori, ecuația (34) pentru $i=1, j=l=3, k=2$ și $i=3, j=l=2, k=1$ ne dă

$$\left.\begin{aligned}
&(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})\,[2(\Pi^1_{22})^3(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})^2(\Pi^1_{22}+\Pi^1_{33})+(\Pi^1_{33})^5(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})+\\
&\qquad+(\Pi^1_{22})(\Pi^1_{33})^4(2\Pi^2_{21}+\Pi^1_{11})\,]=0,\\
&(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})\,[2(\Pi^1_{22})^3(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})^2+(\Pi^1_{33})^3(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13})(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})-\\
&\qquad-2\Pi^1_{11}(\Pi^1_{33})^4\,]=0.
\end{aligned}\right\}\tag{152}$$

Vom presupune întîi că $\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=0$. În acest caz (151), (151') și (152) ne dau

$$\Pi^1_{12}=\Pi^2_{22}=\Pi^3_{32}=\Pi^2_{11}=\Pi^2_{13}=\Pi^2_{33}=\Pi^3_{11}=\Pi^3_{12}=\Pi^3_{22}=0,\quad \Pi^1_{11}=-2\Pi^2_{21},$$

iar neegalitatea (12''')

$$\Pi^2_{21}\neq 0.$$

Înlocuind aceste valori în celelalte ecuații (34) obținem $\Pi^2_{21}=0$, ceea ce este absurd.

Vom considera acum cazul $\Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} \neq 0$. Din (151), (151′) și (152) rezultă :

$$\Pi^2_{13} = \Pi^3_{11} = \Pi^3_{12} = \Pi^3_{22} = \Pi^3_{31} = \Pi^3_{32} = 0, \quad \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = \frac{16(\Pi^1_{22})^3(\Pi^1_{13})^2}{(\Pi^1_{33})^4},$$

$$\Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = \frac{4\Pi^1_{13}(\Pi^1_{22})^2}{(\Pi^1_{33})^2}, \quad \Pi^2_{11} = -\frac{64(\Pi^1_{13})^3(\Pi^1_{22})^4}{(\Pi^1_{33})^6}, \quad \Pi^2_{33} = -\frac{4\Pi^1_{13}\Pi^1_{22}}{\Pi^1_{33}},$$

$$\Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} \neq 0, \quad \Pi^3_{33} = -2\Pi^1_{13},$$

iar neegalitatea (12‴) este satisfăcută.

Cu aceste valori, ecuația (34) pentru $i = j = k = 1$, $l = 2$ ne dă $\Pi^1_{13}\Pi^1_{22} = 0$, ceea ce este imposibil.

Deci avem $\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23} \neq 0$.

Vom presupune acum că $\Pi^1_{13} + 3\Pi^2_{23} = 0$. În acest caz din (151), (151′) și (152) rezultă :

$$\Pi^1_{11} = \frac{8(\Pi^1_{12} + \Pi^1_{33})(\Pi^2_{23})^2}{(\Pi^1_{33})^2}, \quad \Pi^2_{21} = \frac{4(\Pi^1_{33} - \Pi^1_{22})(\Pi^2_{23})^2}{(\Pi^1_{33})^2}, \quad \Pi^3_{11} = \frac{64(\Pi^2_{23})^3}{(\Pi^1_{33})^2},$$

$$\Pi^3_{22} = \frac{4\Pi^1_{22}\Pi^2_{23}}{\Pi^1_{33}}, \quad \Pi^1_{12} = \Pi^2_{22} = \Pi^3_{32} = \Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = \Pi^3_{12} = 0,$$

$$\Pi^1_{13} = -3\Pi^2_{23} \neq 0,$$

iar (12‴) ne dă

$$\Pi^1_{22} + \Pi^1_{33} \neq 0.$$

Cu aceste valori ecuația (34) pentru $i = k = 1$, $j = l = 2$ ne dă $\Pi^1_{22} = 0$ ceea ce este absurd.

Deci $\Pi^1_{13} + 3\Pi^2_{23} \neq 0$.

Sistemul (152) devine deci

$$\left.\begin{aligned} 2(\Pi^1_{22})^3(\Pi^1_{13} + 3\Pi^2_{23})^2(\Pi^1_{22} + \Pi^1_{33}) + (\Pi^1_{33})^5(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) + \\ + \Pi^1_{22}(\Pi^1_{33})^4(2\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11}) = 0, \\ 2(\Pi^1_{22})^3(\Pi^1_{13} + 3\Pi^2_{23})^2 + (\Pi^1_{33})^3(\Pi^2_{23} - \Pi^1_{13})(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) - \\ - 2\Pi^1_{11}(\Pi^1_{33})^4 = 0, \end{aligned}\right\}$$

sau, avînd în vedere ultima ecuație (151′)

$$\left.\begin{aligned} 2(\Pi^1_{22} + \Pi^1_{33})(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})^2 - \Pi^1_{22}\Pi^1_{33}(2\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11}) - (\Pi^1_{33})^2(3\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) = 0, \\ 4\Pi^1_{33}(\Pi^1_{11} + \Pi^2_{21}) - (\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(\Pi^1_{13} - 3\Pi^2_{23}) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Din acest sistem și din ultima ecuație (151′) rezultă

$$\left.\begin{aligned}\Pi^1_{11} &= -\frac{(\Pi^1_{33})^3(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})+2(\Pi^1_{22})^3(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})^2}{4(\Pi^1_{33})^4},\\ \Pi^2_{21} &= \frac{(\Pi^1_{33})^3(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(3\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})-4(\Pi^1_{22})^3(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})^2}{4(\Pi^1_{33})^4},\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}2(\Pi^1_{33})^4\Pi^1_{13}(\Pi^1_{13}-\Pi^1_{23})+\Pi^1_{22}(\Pi^1_{33})^3(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})^2+(\Pi^1_{22})^3(\Pi^1_{13}+\\ +3\Pi^2_{23})^2(\Pi^1_{22}-\Pi^1_{33})=0.\end{aligned}\qquad(153)$$

Cu aceste valori ecuația (34) pentru $i=j=k=1$, $l=2$ și $i=j=k=1$, $l=3$ ne dă

$$\left.\begin{aligned}5(\Pi^1_{33})^3(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})+6(\Pi^1_{22})^3(\Pi^1_{13}+3\Pi^2_{23})^2=0,\\ \Pi^2_{23}(3\Pi^1_{22}+\Pi^1_{33})-2\Pi^1_{13}\Pi^1_{33}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(154)$$

În baza acestor ecuații (153) devine

$$\Pi^1_{13}(\Pi^1_{22}+17\Pi^1_{33})-\Pi^2_{23}(11\Pi^1_{22}-5\Pi^1_{33})=0.\qquad(153')$$

Din (118) rezultă $3\Pi^1_{22}+\Pi^1_{33}\neq 0$ și deci

$$\Pi^2_{23}=\frac{2\Pi^1_{13}\Pi^1_{33}}{3\Pi^1_{22}+\Pi^1_{33}},$$

care înlocuită în (153′) ne dă

$$(9\Pi^1_{33}+\Pi^1_{22})(\Pi^1_{33}+\Pi^1_{22})=0.$$

Dacă $\Pi^1_{22}+\Pi^1_{33}=0$, prima ecuație (154) ne dă $\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=0$ ceea ce este absurd. Dacă $\Pi^1_{22}+9\Pi^1_{33}=0$, aceeași ecuație (154) ne dă de asemenea $\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=0$.

Deci, *dacă conexiunea proiectivă* Π^i_{jk} *este constantă, sistemul* (*12*), (*12″*) *nu are soluții.*

Vom determina acum conexiunea proiectivă constantă Π^i_{jk} care verifică sistemul (13) cu condiția

$$\left.\begin{aligned}(\Pi^1_{22})^3(\Pi^2_{33})^2+8\Pi^1_{22}\Pi^1_{23}\Pi^1_{33}\Pi^2_{33}\Pi^3_{22}+(\Pi^1_{33})^3(\Pi^3_{22})^2+\\ +2\Pi^1_{22}\Pi^1_{33}[2\Pi^1_{22}\Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12}-\Pi^2_{22})-\Pi^1_{33}\Pi^3_{22}(\Pi^2_{23}-\\ -\Pi^1_{13})]-(\Pi^1_{22}\Pi^1_{33})^2(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})\neq 0.\end{aligned}\right\}\qquad(13'')$$

Avînd în vedere că $\Pi^1_{22},\Pi^1_{23}\neq 0$, printr-o schimbare de variabile putem presupune $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1$.

Deci sistemul (13), (13″) se scrie :

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^1_{33}(2\Pi^1_{12}+3\Pi^2_{22}+2\Pi^3_{22})-\Pi^2_{33}=0,\\
&\Pi^1_{33}(2\Pi^1_{12}+\Pi^1_{11})+\Pi^1_{33}\Pi^3_{22}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})-\Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})=0,\\
&\Pi^1_{33}(\Pi^1_{13}+2\Pi^2_{23})+(\Pi^1_{33})^2\Pi^3_{22}-2\Pi^2_{33}=0,\\
&\Pi^3_{22}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22}+\Pi^3_{22})-\Pi^3_{12}=0,\\
&(\Pi^2_{33})^2+\Pi^1_{33}\Pi^2_{33}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})-\Pi^2_{13}(\Pi^1_{33})^2=0,\\
&\Pi^1_{33}\Pi^2_{33}(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})-2(\Pi^2_{33})^2(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22}+\Pi^3_{22})+\Pi^2_{11}(\Pi^1_{33})^2=0,\\
&\Pi^1_{33}\Pi^3_{22}(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})-2\Pi^2_{33}\Pi^3_{22}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22}+\Pi^3_{22})+\Pi^3_{11}\Pi^1_{33}=0,\\
&(\Pi^2_{33})^2+8\Pi^1_{33}\Pi^2_{33}\Pi^3_{22}+(\Pi^1_{33})^3(\Pi^3_{22})^2+2\Pi^1_{33}[2\Pi^2_{33}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})+\\
&\qquad+\Pi^1_{33}\Pi^3_{22}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})]-(\Pi^1_{33})^2(2\Pi^2_{21}-\Pi^1_{11})\neq 0,\\
&\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^1_{33}\neq 0.
\end{aligned}\right\}\tag{155}$$

Scriind ecuația (34) pentru $i=1, j=k=2, l=3$ și $i=1, j=l=3$ $k=2$, obținem :

$$\Pi^2_{33}=2(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})-\Pi^1_{33}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22}),\ \Pi^3_{22}=\frac{\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13}-2\Pi^2_{22}}{\Pi^1_{33}}.\tag{156}$$

Cu aceste valori, ecuația întîia și a treia din (155) ne dă

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^1_{13}=\Pi^1_{33}(\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})-\Pi^2_{22},\\
&\Pi^2_{23}(3\Pi^1_{13}-4)-4\Pi^2_{22}(\Pi^1_{33}-1)=0.
\end{aligned}\right\}\tag{157}$$

Presupunînd că $\Pi^1_{33}=1$, de aici rezultă

$$\Pi^1_{13}=\Pi^1_{12},\ \Pi^2_{23}=0,\tag{157'}$$

care înlocuite în (155) și (156) ne dau

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^2_{33}=-\Pi^2_{22},\ \Pi^3_{22}=-\Pi^1_{12}-2\Pi^2_{22},\ \Pi^3_{12}=(\Pi^2_{22}-\Pi^1_{12})(\Pi^1_{12}+2\Pi^2_{22}),\\
&\Pi^2_{13}=\Pi^2_{22}(\Pi^2_{22}-\Pi^1_{12}),\ \Pi^1_{11}=(\Pi^1_{12})^2-(\Pi^2_{22})^2-2\Pi^2_{21},\\
&\Pi^2_{11}=\Pi^2_{22}[4\Pi^2_{21}-(\Pi^1_{12}-\Pi^2_{22})^2],\ \Pi^3_{11}=(\Pi^1_{12}+2\Pi^2_{22})[4\Pi^2_{21}-(\Pi^1_{12}-\Pi^2_{22})^2],\\
&\Pi^2_{21}\neq 4(\Pi^2_{22})^2.
\end{aligned}\right\}\tag{158}$$

Cu aceste valori, ecuația (34) pentru $i=2, j=l=3,\ k=1$ și $i=3,\ j=l=2,\ k=1$ ne dă

$$\Pi^2_{21}\Pi^2_{22}=0,\ (\Pi^1_{12}+2\Pi^2_{22})\ [4\Pi^2_{21}-(\Pi^2_{22})^2]=0.\tag{159}$$

Dacă $\Pi^2_{21}=0$, din neegalitatea (158) rezultă $\Pi^2_{22}\neq 0$ și deci

$$\Pi^1_{12}=-2\Pi^2_{22}\neq 0.$$

Conexiunea Π^i_{jk} este deci

$$\Pi^1_{11} = -\Pi^3_{31} = 3(\Pi^2_{22})^2,\ \Pi^1_{12} = \Pi^1_{13} = -\Pi^3_{33} = -2\Pi^2_{22},\ \Pi^3_{32} = \Pi^2_{22},$$

$$\Pi^2_{11} = -9(\Pi^2_{22})^2,\ \Pi^2_{13} = 3(\Pi^2_{22})^2,\ \Pi^2_{33} = -\Pi^2_{22},\ \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = 1,$$

$$\Pi^2_{21} = \Pi^2_{23} = \Pi^3_{11} = \Pi^3_{12} = \Pi^3_{22} = 0,\ \Pi^2_{22} \neq 0.$$

Cu aceste valori ecuația (34) pentru $i = j = k = 2, l = 3$ ne dă $\Pi^2_{22} = 0$, ceea ce este imposibil.

Deci avem $\Pi^2_{21} \neq 0$. Din (159) rezultă $\Pi^1_{12} = \Pi^2_{22} = 0$.

Conexiunea Π^i_{jk} este deci

$$\Pi^1_{11} = -2\Pi^2_{21} \neq 0,\ \Pi^3_{31} = \Pi^2_{21},\ \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = 1,$$

componentele nescrise fiind nule.

Scriind ecuația (34) pentru $i = k = 1$, $j = l = 2$ obținem $\Pi^2_{21} = 0$ ceea ce este imposibil. Rezultă că $\Pi^1_{33} \neq 0,1$.

Din (157) obținem:

$$\Pi^1_{12} = \frac{4\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}(3\Pi^1_{33} - 4)}{4\Pi^1_{33}},\ \Pi^2_{22} = \frac{\Pi^2_{23}(3\Pi^1_{33} - 4)}{4(\Pi^1_{33} - 1)}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile (34) rezultă $\Pi^1_{33} = 0$ ceea ce este absurd.

Deci, *dacă conexiunea* Π^i_{jk} *este constantă sistemul (13), (13'') nu are soluții.*

Ne vom ocupa acum de conexiunile proiective constante care verifică sistemul (14') și determină corespondențe speciale cu puncte izolate comune. În partea a II-a a lucrării am arătat că aceste conexiuni sînt:

1° $\Pi^1_{23} = \Pi^3_{22} = 1,\ \Pi^3_{12} = \alpha \quad (\alpha \neq 0)$;

2° $\Pi^1_{12} = \Pi^1_{23} = -\Pi^3_{32} = \Pi^3_{22} = 1,\ \Pi^3_{12} = \alpha \quad (\alpha \neq 0)$;

3° $\Pi^1_{13} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = 1,\ \Pi^1_{12} = 2,\ \Pi^2_{22} = 2(\alpha - 1),\ \Pi^2_{23} = \alpha,\ \Pi^3_{32} = -2\alpha,$

$\Pi^2_{33} = \dfrac{\alpha + 1}{2},\ \Pi^3_{22} = 4(1 - \alpha),\ \Pi^3_{33} = -(\alpha + 1) \quad (\alpha \neq 1)$;

4° $\Pi^1_{12} = \Pi^1_{22} = \Pi^3_{32} = 1,\ \Pi^2_{22} = -2,\ \Pi^3_{22} = \varepsilon \quad (\varepsilon = 0, 1)$;

5° $\Pi^1_{12} = \Pi^1_{22} = \Pi^3_{32} = 1,\ \Pi^2_{21} = \Pi^2_{22} = -\Pi^3_{31} = -2, \Pi^3_{22} = \varepsilon,$

$\Pi^3_{11} = -4\varepsilon \quad (\varepsilon = 0, 1)$;

6° $\Pi^i_{22} = -\Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = 1 \ (i = 1, 2, 3),\ \Pi^1_{12} = -\dfrac{3}{2},\ \Pi^3_{32} = \dfrac{1}{2},$

$\Pi^1_{11} = \Pi^3_{12} = 2,\ \Pi^3_{11} = -4$;

7° $\Pi^1_{22} = -\Pi^2_{21} = \Pi^2_{22} = -\Pi^3_{31} = 1,\ \Pi^1_{11} = 2,\ \Pi^1_{12} = -\dfrac{3}{2},\ \Pi^3_{32} = \dfrac{1}{2}$;

8° $\Pi^1_{12} = \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = -\Pi^3_{32} = 1,\ \Pi^3_{12} = \alpha \quad (\alpha \neq -1)$;

9° $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^3_{22} = 1,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^3_{32} = \alpha,\ \Pi^3_{12} = \beta\ \ (\alpha \neq -1,\ \beta \neq -\alpha^2)$;

10° $\Pi^1_{13} = \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^2_{23} = 1,\ \Pi^3_{33} = -2,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^3_{32} = \frac{1}{2}$,

$\Pi^2_{33} = 4,\ \Pi^3_{12} = \alpha,\ \Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = -2\alpha,\ \Pi^2_{13} = -4\alpha\ \left(\alpha \neq \frac{1}{4}\right)$;

11° $\Pi^1_{13} = \Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = 1,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{22} = \frac{1-\alpha}{2}$,

$\Pi^2_{21} = -\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)+16\beta}{8},\ \Pi^3_{31} = \frac{16\beta+\alpha^2-1}{8},\ \Pi^1_{12} = \frac{3-\alpha}{4}$,

$\Pi^3_{32} = -\frac{\alpha+1}{4},\ \Pi^2_{23} = \alpha,\ \Pi^3_{33} = -(\alpha+1),\ \Pi^2_{11} = \frac{(\alpha-1)(8\beta-\alpha+1)}{4}$,

$\Pi^3_{12} = \beta,\ \Pi^2_{33} = 2(\alpha+1),\ \Pi^3_{11} = \beta(1-\alpha)$,

$\Pi^2_{13} = -\frac{(\alpha-1)^2+16\beta}{4}\ \left(\alpha \neq \pm 1,\ \beta \neq \frac{(\alpha+1)^2}{16}\right)$;

12° $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^3_{22} = \Pi^3_{32} = 1,\ \Pi^1_{11} = 8\alpha(2\alpha-1)$,

$\Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = -4\alpha(2\alpha-1),\ \Pi^1_{12} = 4\alpha-1$,

$\Pi^1_{13} = -\Pi^2_{22} = -\Pi^2_{23} = 4\alpha,\ \Pi^3_{11} = -8\alpha(2\alpha-1)^2$,

$\Pi^3_{12} = -(2\alpha-1)^2\ \ (\alpha \neq -1)$;

13° $\Pi^1_{12} = \Pi^1_{13} = \Pi^1_{22} = -\Pi^1_{33} = 1,\ \Pi^2_{22} = -\Pi^3_{22} = \alpha$,

$\Pi^2_{23} = -\Pi^3_{32} = \alpha+1,\ \Pi^2_{33} = -\Pi^3_{33} = \alpha+2\qquad (\alpha \neq -1)$;

14° $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^3_{22} = 1,\ \Pi^1_{11} = 8\alpha(\alpha-\beta-1),\ \Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = -4\alpha(\alpha-\beta-1)$,

$\Pi^1_{12} = 3\alpha-\beta-1,\ \Pi^2_{22} = 2(\beta-\alpha),\ \Pi^3_{32} = 1-\alpha-\beta,\ \Pi^1_{13} = 4\alpha$,

$\Pi^2_{23} = 4\beta,\ \Pi^3_{33} = -4(\alpha+\beta),\ \Pi^2_{33} = 8(\alpha+\beta)$,

$\Pi^2_{11} = -8(\alpha+\beta)(\alpha-\beta-1)^2,\ \Pi^3_{11} = -4(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)^2$,

$\Pi^3_{12} = -(\alpha-\beta-1)^2\quad (\alpha \neq -\beta,\ \ (\alpha-\beta)^2+2(\alpha+\beta) = 0)$;

15° $\Pi^1_{22} = -\Pi^1_{33} = 1,\ \Pi^2_{13} = -\Pi^3_{12} = \Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = \lambda$,

$\Pi^1_{12} = \Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} = -\Pi^3_{32} = \alpha,\ \Pi^2_{33} = -\Pi^3_{33} = 2\alpha\ \ (\lambda = \pm 1,\ \alpha \neq 0)$;

16° $\Pi^1_{12} = \Pi^1_{22} = -\Pi^1_{33} = 1,\ \Pi^3_{22} = -2,\ \Pi^1_{13} = \alpha,\ \Pi^2_{22} = \alpha+1,\ \Pi^2_{33} = \alpha+3$,

$\Pi^2_{13} = -\Pi^3_{12} = 1-\alpha,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^3_{31} = 1-\alpha^2,\ \Pi^2_{23} = -\Pi^3_{32} = \alpha+2$,

$\Pi^3_{33} = -2(\alpha+1),\ \Pi^2_{11} = -(\alpha-1)^2(\alpha+1)\qquad (\alpha \neq 1)$;

17° $\Pi_{12}^1 = \Pi_{22}^1 = -\Pi_{33}^1 = \Pi_{23}^2 = -\Pi_{32}^3 = 1$, $\Pi_{33}^2 = 2$, $\Pi_{13}^1 = \alpha$, $\Pi_{22}^3 = \alpha - 1$,

$\Pi_{33}^3 = -(\alpha + 1)$, $\Pi_{11}^1 = 1 - \alpha^2$, $\Pi_{21}^2 = \Pi_{31}^3 = \dfrac{\alpha^2 - 1}{2}$,

$\Pi_{13}^2 = \dfrac{(\alpha - 1)^2}{2}$, $\Pi_{11}^2 = -(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)$ $\quad (\alpha \neq \pm 1, -1 \pm \sqrt{2})$;

18° $\Pi_{12}^1 = \Pi_{22}^1 = -\Pi_{33}^1 = 1$, $\Pi_{13}^1 = \alpha$, $\Pi_{23}^2 = \Pi_{32}^3 = \beta$, $\Pi_{21}^2 = \gamma$,
$\Pi_{22}^2 = -(\beta + 1)$, $\Pi_{11}^1 = 1 - \alpha^2$, $\Pi_{31}^3 = \alpha^2 - \gamma - 1$, $\Pi_{33}^3 = -(\alpha + \beta)$,
$\Pi_{11}^2 = (\alpha + 1)(\alpha\beta + \alpha + \beta + 2\gamma + 1)$, $\Pi_{33}^2 = 1 - \beta$, $\Pi_{22}^3 = \alpha - \beta$
$\Pi_{13}^2 = -\Pi_{12}^3 = -(\alpha + \gamma + 1)$, $\Pi_{11}^3 = (\alpha + 1)[(\alpha + 1)(2 - \alpha + \beta) + 2\gamma]$;

19° $\Pi_{13}^1 = -\Pi_{11}^1 = \Pi_{22}^1 = -\Pi_{33}^1 = 1$, $\Pi_{23}^2 = -\Pi_{22}^2 = -\Pi_{33}^2 = \Pi_{32}^3 = \alpha$,
$\Pi_{21}^2 = -\Pi_{13}^2 = \Pi_{12}^3 = \beta$, $\Pi_{31}^3 = 1 - \beta$, $\Pi_{33}^3 = -(\alpha + 1)$, $\Pi_{11}^2 = \alpha + 2\beta$,
$\Pi_{11}^3 = \alpha + 2\beta - 1$, $\Pi_{22}^3 = 1 - \alpha$, $(\alpha^2(\alpha - \beta) - (\alpha + \beta)^2 \neq 0)$;

20° $\Pi_{22}^1 = -\Pi_{33}^1 = -\Pi_{22}^2 = \Pi_{23}^2 = -\Pi_{33}^2 = -\Pi_{22}^3 = \Pi_{32}^3 = -\Pi_{33}^3 = 1$,
$\Pi_{21}^1 = -\Pi_{13}^2 = \Pi_{12}^3 = -\Pi_{31}^3 = \alpha$ $\quad (\alpha \neq 0)$;

21° $\Pi_{12}^1 = \Pi_{22}^1 = \Pi_{23}^1 = -\Pi_{32}^3 = 1$, $\Pi_{21}^2 = -\Pi_{31}^3 = \alpha$, $\Pi_{33}^1 = 1 - \beta^2$,
$\Pi_{13}^1 = \Pi_{23}^2 = \beta + 1$, $\Pi_{33}^3 = -2(\beta + 1)$, $\Pi_{13}^2 = \alpha(\beta + 1)$,

$\Pi_{33}^2 = 2(\beta + 1)^2$, $\Pi_{12}^3 = -\dfrac{\alpha}{\beta + 1}$ $\quad (\alpha \neq -1;\ \beta \neq 0, \pm 1)$;

22° $\Pi_{12}^1 = \Pi_{13}^1 = \Pi_{22}^1 = \Pi_{23}^1 = \Pi_{33}^1 = \Pi_{23}^2 = -\Pi_{32}^3 = 1$,
$\Pi_{21}^2 = \Pi_{33}^2 = -\Pi_{31}^3 = -\Pi_{33}^3 = 2$, $\Pi_{13}^2 = 4$, $\Pi_{11}^2 = 8$;

23° $\Pi_{12}^1 = \Pi_{13}^1 = \Pi_{22}^1 = \Pi_{23}^1 = \Pi_{33}^1 = -\Pi_{23}^2 = -\Pi_{32}^3 = 1$, $\Pi_{33}^2 = \Pi_{22}^3 = -2$;

24° $\Pi_{22}^1 = \Pi_{23}^1 = \Pi_{22}^2 = \Pi_{33}^1 = -\Pi_{22}^3 = 1$, $\Pi_{12}^1 = \Pi_{13}^1 = \alpha$, $\Pi_{23}^2 = -\Pi_{32}^3 = \alpha + 1$,
$\Pi_{33}^2 = \Pi_{33}^3 = 2\alpha + 1$ $\quad (\alpha \neq 0)$;

25° $\Pi_{22}^1 = \Pi_{23}^1 = \Pi_{33}^1 = \Pi_{22}^2 = -\Pi_{33}^3 = 1$, $\Pi_{12}^1 = \Pi_{13}^1 = \alpha$, $\Pi_{32}^3 = -1 - \alpha$,

$\Pi_{23}^2 = 1 - \alpha$, $\Pi_{33}^2 = 1 - 2\alpha$, $\Pi_{22}^3 = -1 - 2\alpha$ $\quad \left(\alpha \neq 0, -\dfrac{1}{2}\right)$;

26° $\Pi_{22}^1 = \Pi_{23}^1 = \Pi_{33}^1 = \Pi_{22}^2 = -\Pi_{22}^3 = 1$, $\Pi_{12}^1 = \Pi_{13}^1 = -\Pi_{23}^2 = \Pi_{32}^3 =$

$= -\dfrac{1}{2}$, $\Pi_{21}^2 = -\Pi_{31}^3 = \Pi_{13}^2 = -\Pi_{12}^3 = \alpha$ $\quad (\alpha \neq 0)$;

27° $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = \Pi^2_{22} = 1$, $\Pi^1_{11} = \dfrac{2(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha}$,

$\Pi^2_{21} = -(\alpha+1)$, $\Pi^3_{31} = -\dfrac{(\alpha+1)(\alpha+4)}{\alpha}$,

$\Pi^1_{12} = \Pi^1_{13} = \dfrac{\alpha^2+2\alpha+2}{2\alpha}$, $\Pi^2_{23} = \dfrac{2-\alpha^2}{2\alpha}$, $\Pi^3_{33} = -\dfrac{\alpha+2}{\alpha}$,

$\Pi^3_{32} = -\dfrac{\alpha^2+4\alpha+2}{2\alpha}$, $\Pi^2_{13} = -\dfrac{2(\alpha+1)^2}{\alpha}$,

$\Pi^2_{33} = \dfrac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{\alpha}$, $\Pi^3_{12} = -\dfrac{2(\alpha+1)(\alpha+3)}{\alpha}$,

$\Pi^3_{22} = -(\alpha+3)$ $\qquad (\alpha \neq 0, -1, -3)$;

28° $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^1_{33} = -\Pi^2_{21} = \Pi^2_{22} = 1$, $\Pi^1_{11} = 2(1-\alpha)$, $\Pi^3_{31} = 2\alpha - 1$,
$\Pi^2_{13} = \Pi^3_{33} = \alpha - 1$, $\Pi^3_{12} = 3\alpha - 2$,

$\Pi^1_{12} = \Pi^1_{13} = -\dfrac{\alpha^2-2\alpha+2}{2\alpha}$, $\Pi^2_{23} = \dfrac{2-\alpha^2}{2\alpha}$, $\Pi^3_{32} = \dfrac{\alpha^2-4\alpha+2}{2\alpha}$,

$\Pi^3_{22} = \dfrac{2-3\alpha}{\alpha}$, $\Pi^2_{33} = \dfrac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{\alpha}$ $\qquad \left(\alpha \neq 0, \dfrac{2}{3}, 1\right)$;

29° $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^2_{22} = 1$, $\Pi^1_{33} = 1 - \beta^2$, $\Pi^1_{12} = \alpha$, $\Pi^3_{32} = -(1+\alpha)$,

$\Pi^1_{13} = \alpha(\beta+1)$, $\Pi^3_{22} = -\dfrac{1}{\beta+1}$, $\Pi^2_{23} = (\alpha+1)(\beta+1)$,

$\Pi^3_{33} = -(2\alpha+1)(\beta+1)$, $\Pi^2_{33} = (2\alpha+1)(\beta+1)^2$

$\left(\alpha \neq -\dfrac{\beta}{\beta+1};\ \beta \neq 0, \pm 1\right)$;

30° $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^2_{22} = 1$, $\Pi^1_{12} = \Pi^3_{32} = -\dfrac{1}{2}$, $\Pi^2_{21} = -\Pi^3_{31} = \alpha$,

$\Pi^1_{33} = 1 - \beta^2$, $\Pi^2_{13} = \alpha(\beta+1)$, $\Pi^1_{13} = -\Pi^2_{23} = -\dfrac{\beta+1}{2}$,

$\Pi^3_{12} = -\dfrac{\alpha}{\beta+1}$, $\Pi^3_{22} = -\dfrac{1}{\beta+1}$ $\qquad \left(\alpha \neq 0, \dfrac{\beta+1}{4\beta};\ \beta \neq 0, \pm 1\right)$;

31° $\Pi^1_{22} = \Pi^1_{23} = \Pi^2_{22} = -\Pi^3_{32} = -\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = \Pi^2_{11} = 1$,

$\Pi^2_{23} = -\Pi^1_{13} = \Pi^2_{13} = \alpha$, $\Pi^3_{12} = -\dfrac{1}{\alpha+1}$, $\Pi^3_{22} = -\dfrac{2}{\alpha+1}$,

$\Pi^1_{33} = -\Pi^2_{33} = 1 - \alpha^2$ $\qquad (\alpha \neq \pm 1)$;

componentele nescrise fiind nule.

Prin schimbări convenabile de variabile, aceste conexiuni se reduc la conexiunea [I] sau 1°.

Deci, conexiunea proiectivă constantă care verifică sistemul (14'), determinînd o corespondență specială cu puncte izolate comune, poate fi redusă, prin schimbări de variabile, la formele [I] sau

$$[II] \qquad \Pi^1_{23} = \Pi^3_{22} = 1, \quad \Pi^3_{12} = \alpha \quad (\alpha \neq 0).$$

Vom determina acum conexiunile proiective constante care verifică sistemul (15), (27), (28).

Dacă $a = 0$, a treia neegalitate (28) ne dă $a_2 \neq 0$, iar prima ecuație (27) $\Pi^2_{22} = 2\Pi^1_{12} \neq 0$. Ecuația (34) pentru $i = k = 1$, $j = l = 2$ ne dă în acest caz $\Pi^1_{12} = 0$, ceea ce este imposibil.

Deci avem $a \neq 0$.

Dacă $b = 0$, a doua neegalitate (28) ne dă $b_1 \neq 0$, iar a doua ecuație (27) $\Pi^3_{33} = 2\Pi^1_{13} \neq 0$. Ecuația (34) pentru $i = k = 1$, $j = l = 3$ ne dă în acest caz $\Pi^1_{13} = 0$, ceea ce este imposibil.

Deci avem $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Vom presupune acum că $c = 0$. Din ultimele două ecuații (27) rezultă $\Pi^2_{11} = \Pi^3_{11} = 0$. Ecuația (34) pentru $i = l = 2, j = k = 1$; $i = 2$, $j = k = 1$, $l = 3$ și $i = 3$, $j = k = 1$, $l = 2$ devine

$$\Pi^1_{11}(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) = 0, \quad \Pi^1_{11}\Pi^2_{13} = 0, \quad \Pi^1_{11}\Pi^3_{12} = 0. \tag{160}$$

Dacă $\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = 0$, din (27) rezultă $c_1 = c_2 = 0$, ceea ce este imposibil în baza primei neegalități (28).

Dacă $\Pi^1_{11} = 0$, $\Pi^2_{21} \neq 0$, sistemul (27) devine

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^2_{13}\Pi^3_{12} + (\Pi^2_{21})^2 = 0, \\ &2\Pi^2_{21}(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) - \Pi^2_{13}(2\Pi^1_{12} - \Pi^2_{22}) - \Pi^2_{33}\Pi^3_{12} = 0, \\ &2\Pi^2_{21}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) + \Pi^2_{13}\Pi^3_{22} + \Pi^3_{12}(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

De aici rezultă că $\Pi^2_{13} \neq 0$, $\Pi^3_{12} \neq 0$ și deci, printr-o schimbare de variabile, putem presupune $\Pi^2_{21} = \Pi^2_{13} = -\Pi^3_{12} = 1$.

Din (34) și (161) obținem:

$$\Pi^1_{12} = \Pi^1_{13}, \quad \Pi^2_{22} = \Pi^2_{23} - \Pi^1_{13}, \quad \Pi^2_{33} = \Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}, \quad \Pi^3_{22} = \Pi^1_{13} - \Pi^2_{23},$$

care nu verifică prima neegalitate (28).

Deci $\Pi^1_{11} \neq 0$. Din (160) rezultă

$$\Pi^2_{13} = \Pi^3_{12} = 0, \quad \Pi^1_{11} = -2\Pi^2_{21} \neq 0.$$

Înlocuind aceste valori în (27) obținem $\Pi^2_{21} = 0$, ceea ce este imposibil.

Deci avem : $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Sistemul (27) se scrie în acest caz

$$\left.\begin{aligned}
&a^2\,\Pi^2_{33} + 2ab\,(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})\,b^2\,(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}) = 0,\\
&a^2\,(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) - 2ab\,(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) - b^2\,\Pi^3_{22} = 0,\\
&a^2\,\Pi^2_{11} + ac\,(2\Pi^2_{21} - \Pi^1_{11}) + c^2\,(\Pi^2_{22} - 2\Pi^1_{12}) = 0,\\
&a^2\,\Pi^3_{11} - 2ac\,\Pi^3_{12} + c^2\,\Pi^3_{22} = 0,\\
&b^2\,\Pi^2_{11} - 2bc\,\Pi^2_{13} + c^2\,\Pi^2_{33} = 0,\\
&b^2\,\Pi^3_{11} + bc\,(3\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) - c^2\,(3\Pi^1_{13} + 2\Pi^2_{23}) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (162)$$

sistemul (34)

$$\left.\begin{aligned}
&2\Pi^2_{22}\,\Pi^3_{12} - \Pi^3_{22}\,(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{22}) = 0,\\
&\Pi^3_{11}\,(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) - 2\Pi^1_{11}\,\Pi^3_{12} - \Pi^2_{11}\,\Pi^3_{22} = 0,\\
&2\Pi^2_{13}\,(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) - \Pi^2_{33}\,(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) = 0,\\
&2\Pi^2_{13}\,\Pi^1_{11} - \Pi^2_{11}\,(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^2_{33}\,\Pi^3_{11} = 0,\\
&\Pi^2_{13}\,(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) + \Pi^2_{33}\,\Pi^3_{12} = 0,\\
&(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})\,(\Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21}) + 2\Pi^3_{12}\,(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0,\\
&(\Pi^1_{13})^2 - (\Pi^2_{23})^2 + \Pi^2_{22}\,\Pi^2_{33} = 0,\\
&\Pi^2_{22}\,(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) + \Pi^3_{22}\,(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0,\\
&\Pi^3_{12}\,(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) + \Pi^2_{13}\,\Pi^3_{22} = 0,\\
&2\Pi^2_{13}\,\Pi^2_{22} + (2\Pi^2_{21} + \Pi^1_{11})\,(\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23}) = 0,\\
&\Pi^1_{11}\,(\Pi^1_{11} - 2\Pi^2_{21}) + \Pi^2_{11}\,\Pi^2_{22} + \Pi^3_{11}\,(\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (163)$$

iar sistemul (28)

$$\left.\begin{aligned}
&[\Pi^1_{11}\,(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) + \Pi^2_{33}\,\Pi^3_{11}]\,a^2 + [\Pi^2_{11}\,\Pi^3_{22} + \Pi^3_{11}\,(2\Pi^1_{12} - \Pi^2_{22})]\,b^2 +\\
&\qquad + [(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})\,(2\Pi^1_{12} - \Pi^2_{22}) - \Pi^2_{33}\,\Pi^3_{22}]\,c^2 \neq 0,\\
&\Pi^2_{33}\,a^2 + (2\Pi^1_{12} - \Pi^2_{22})\,b^2 \neq 0,\quad (3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23})\,a^2 + \Pi^3_{22}\,b^2 \neq 0,\\
&(2\Pi^1_{12} - \Pi^2_{22})\,(3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23}) - \Pi^2_{33}\,\Pi^3_{22} \neq 0.
\end{aligned}\right\} \quad (164)$$

Presupunînd că $\Pi^3_{22} = 0$, din ultimele două neegalităţi (164) rezultă

$$2\Pi^1_{12} - \Pi^2_{22} \neq 0, \quad 3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23} \neq 0, \qquad (164')$$

iar a opta ecuaţie (163) ne dă

$$\Pi^2_{22}\,(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) = 0.$$

Dacă $\Pi^2_{22} \neq 0$, de aici rezultă $2\Pi^2_{12} + \Pi^2_{22} = 0$. Înlocuind această valoare în a doua ecuaţie (72) obţinem $3\Pi^1_{13} + \Pi^2_{23} = 0$, ceea ce este imposibil în baza ultimei neegalităţi (164′).

Rezultă că $\Pi^2_{22} = 0$ și deci, din (164'), $\Pi^1_{12} \neq 0$.

Cu aceste valori sistemul (163) devine :

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^3_{12}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0,\ (\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0,\ (\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})=0,\\
&\Pi^1_{12}\Pi^3_{11}-\Pi^1_{11}\Pi^3_{12}=0,\ 2\Pi^1_{12}\Pi^2_{13}+\Pi^2_{33}\Pi^3_{12}=0,\\
&2\Pi^2_{13}(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})-\Pi^2_{33}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})=0,\\
&2\Pi^1_{12}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})+\Pi^3_{12}(3\Pi^2_{23}+\Pi^1_{13})=0,\\
&\Pi^1_{11}(\Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21})+\Pi^3_{11})(\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23})=0,\\
&2\Pi^1_{11}\Pi^2_{13}-\Pi^2_{11}(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})+\Pi^2_{33}\Pi^3_{11}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(163')$$

Dacă $\Pi^1_{13} \neq \Pi^2_{23}$, de aici rezultă :

$$\Pi^2_{11} = \Pi^2_{13} = \Pi^3_{11} = \Pi^3_{12} = 0,\ \Pi^1_{11} = -2\Pi^2_{21},\ \Pi^2_{23} = -\Pi^1_{13} \neq 0,$$

care înlocuite în (162) ne dau $\Pi^1_{12} = \Pi^1_{13} = 0$, ceea ce este imposibil.

Deci $\Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} \neq 0$.

Printr-o schimbare de variabile putem presupune $\Pi^1_{12} = \Pi^1_{13} = \Pi^2_{23} = 1$. Cu aceste valori, sistemul (163') ne dă

$$\Pi^2_{13} = 0,\ \Pi^2_{33}\Pi^3_{12} = 0,\ \Pi^3_{11} = \Pi^1_{11}\Pi^3_{12},\ \Pi^1_{11} + 2\Pi^2_{21} = -2\Pi^3_{12}. \quad (163'')$$

Dacă $\Pi^3_{12} = 0$, de aici rezultă :

$$\Pi^3_{11} = 0,\ \Pi^1_{11} = -2\Pi^2_{21},$$

care înlocuite în (162) ne dau

$$\Pi^2_{33} = 2,\ \Pi^2_{11} = -2(\Pi^2_{21})^2.$$

Cu aceste valori, prima neegalitate (164) nu este verificată, deci $\Pi^3_{12} \neq 0$ și putem presupune $\Pi^3_{12} = 1$.

Astfel (163'') ne dă

$$\Pi^2_{13} = \Pi^2_{33} = 0,\ \Pi^3_{11} = \Pi^1_{11} = -2(\Pi^2_{21} + 1),$$

care înlocuite în prima ecuație (162) ne dă $b = 0$ ceea ce este imposibil.

Deci, $\Pi^3_{22} \neq 0$ și putem presupune $\Pi^3_{22} = 1$. Din sistemul (163) obținem în acest caz :

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^2_{13}=\Pi^3_{12}(\Pi^2_{23}-\Pi^1_{13}),\ \Pi^2_{11}=\Pi^3_{11}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})-2\Pi^1_{11}\Pi^3_{12},\\
&\Pi^1_{13}+\Pi^2_{23}=-\Pi^2_{22}(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22}),\ \Pi^1_{11}+2\Pi^2_{21}=2\Pi^2_{22}\Pi^3_{12},\\
&\Pi^2_{22}[\Pi^2_{33}-(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})]=0,\\
&\Pi^3_{11}[\Pi^2_{33}-(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})]=0,\\
&\Pi^3_{12}[\Pi^2_{33}-(\Pi^1_{13}-\Pi^2_{23})(2\Pi^1_{12}+\Pi^2_{22})]=0.
\end{aligned}\right\}\quad(163''')$$

Dacă $\Pi^2_{33} \neq (\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22})$, atunci de aici rezultă $\Pi^3_{11} = \Pi^3_{12} = 0$, care înlocuite în (162) ne dau $c = 0$, ceea ce este exclus, Deci

$$\Pi^2_{33} = (\Pi^1_{13} - \Pi^2_{23})(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}).$$

Ultima neegalitate (164) ne dă

$$\Pi^2_{22} \neq 0, \quad \Pi^1_{13} + \Pi^1_{12}(2\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22}) \neq 0.$$

Putem deci presupune $\Pi^2_{22} = 1$ și sistemul (162), (163''') se scrie

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi^1_{13} = -\Pi^1_{12}, \quad \Pi^2_{23} = -\Pi^1_{12} - 1, \quad \Pi^2_{33} = 2\Pi^1_{12} + 1, \quad \Pi^2_{13} = -\Pi^3_{12}, \\
&\Pi^2_{11} = \Pi^3_{11}(2\Pi^1_{12} + 1) - 2\Pi^1_{11}\Pi^3_{12}, \quad \Pi^2_{21} = \Pi^3_{12} - \frac{\Pi^1_{11}}{2}, \\
&c^2 = -a(\Pi^3_{11} a - 2\Pi^3_{12} c), \quad \Pi^3_{12}(\Pi^1_{11} a - 2\Pi^1_{12} c) = 0, \\
&(2\Pi^1_{12}\Pi^3_{11} - \Pi^1_{11}\Pi^3_{12}) a + [2\Pi^3_{12}(1 - \Pi^1_{12}) - \Pi^1_{11}] c = 0, \\
&2\Pi^1_{12}\Pi^3_{11} a + (\Pi^1_{11} - 4\Pi^1_{12}\Pi^3_{12}) c = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{165}$$

iar ultimele trei neegalități (164) ne dau $\Pi^1_{12} \neq 0$.

Dacă $\Pi^3_{12} = 0$, din (165) rezultă $c = 0$, ceea ce este imposibil.

Deci $\Pi^3_{12} \neq 0$ și din (165) deducem $\Pi^1_{11} \neq 0$, putînd lua $\Pi^1_{11} = 1$.

Din (165) rezultă :

$$\Pi^1_{11} = 0, \ \Pi^1_{12} = -\Pi^1_{13} = \frac{1}{4}, \ \Pi^2_{23} = -\frac{5}{4}, \ \Pi^2_{33} = \frac{3}{2}, \ \Pi^2_{13} = -\Pi^3_{12},$$

$$\Pi^2_{11} = -2\Pi^3_{12}, \ \Pi^2_{21} = \Pi^3_{12} - \frac{1}{2},$$

care înlocuite în prima neegalitate (164) nu o verifică.

Deci, *dacă conexiunea proiectivă* Π^i_{jk} *este constantă, sistemul* (*15*), (*27*), (*28*) *nu are soluții.*

Avem deci :

TEOREMA 7. *Tensorul proiectiv constant* Π^i_{jk}, *care determină o corespondență specială cu puncte comune izolate între spațiile* A_3 *și* E_3, *poate fi adus, prin schimbări de variabile la una din formele*

$$[\mathrm{I}] \qquad \Pi^1_{11} = -2, \quad \Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = 1;$$

$$[\mathrm{II}] \qquad \Pi^1_{23} = \Pi^3_{22} = 1, \quad \Pi^3_{12} = \alpha; \quad (\alpha \neq 0);$$

componentele nescrise fiind nule.

Vom determina acum transformările punctuale corespunzătoare conexiunilor [I] și [II].

În cazul conexiunii [I], sistemul (64) devine

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial v}{\partial x} = 3v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

avînd soluția

$$v = e^{-x}(a_1 e^{4x} + a_2 y + a_3 z + a_4).$$

Transformarea punctuală este deci

$$u^1 = e^{4x},\ u^2 = y,\ u^3 = z. \tag{166}$$

și spațiile A_3 și E_3 nu sînt echivalente în mare.

Considerînd conexiunea [II], sistemul (64) se scrie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \alpha\frac{\partial v}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} +$$

$$+ \frac{\partial v}{\partial z} = \alpha v,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Dacă $\alpha > 0$, soluția sistemului este

$$v = a_1 e^{-\sqrt{\alpha}y}\left(\sqrt{\alpha}x + \frac{y}{2\sqrt{\alpha}} + z\right) + a_2 e^{\sqrt{\alpha}y}\left(\sqrt{\alpha}x + \frac{y}{2\sqrt{\alpha}} - z\right) +$$

$$+ a_3 e^{\sqrt{\alpha}y} + a_4 e^{-\sqrt{\alpha}y}.$$

Deci, transformarea punctuală este

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= \sqrt{\alpha}\,x + \frac{y}{2\sqrt{\alpha}} + z,\\ u^2 &= \left(\sqrt{\alpha}\,x + \frac{y}{2\sqrt{\alpha}} - z\right)e^{2\sqrt{\alpha}y},\\ u^3 &= e^{2\sqrt{\alpha}y}, \end{aligned}\right\} \tag{167}$$

spațiile A_3 și E_3 nefiind echivalente în mare.

Dacă $\alpha < 0$, sistemul are soluția

$$v = a_1\left[\left(x\sqrt{-\alpha} - \frac{y}{2\sqrt{-\alpha}}\right)\sin\sqrt{-\alpha}\,y + z\cos\sqrt{-\alpha}\,y\right] +$$

$$+ a_2\left[-z\sin\sqrt{-\alpha}\,y + \left(x\sqrt{-\alpha} - \frac{y}{2\sqrt{-\alpha}}\right)\cos\sqrt{-\alpha}\,y\right] +$$

$$+ a_3\sin\sqrt{-\alpha}\,y + a_4\cos\sqrt{-\alpha}\,y.$$

Deci, în acest caz transformarea punctuală este

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= \left(x\sqrt{-\alpha} - \frac{y}{2\sqrt{-\alpha}}\right)\operatorname{tg}\sqrt{-\alpha}\,y + z,\\ u^2 &= x\sqrt{-\alpha} - \frac{y}{2\sqrt{-\alpha}} - z\operatorname{tg}\sqrt{-\alpha}\,y,\\ u^3 &= \operatorname{tg}\sqrt{-\alpha}\,z, \end{aligned}\right\} \tag{168}$$

și spațiul A_3 nu este echivalent în mare cu E_3.

Avem deci:

TEOREMA 8. *Transformările punctuale atașate conexiunilor proiective constante care determină, între spațiile A_3 și E_3, corespondențe speciale cu puncte comune izolate pot fi aduse, prin schimbări de variabile, la una din formele (166), (167), (168).*

Vom determina acum grupurile totale de mișcări ale transformărilor punctuale (166), (167), (168).

În cazul conexiunii [I], sistemul (73), (74) ne dă

$$a_i = a_i^1 = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad a_1^2 = a_1^3 = 0.$$

Avem deci șapte transformări infinitezimale independente

$$X_i f = p_i \ (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = y p_2, \quad X_5 f = z p_2, \quad X_6 f = y p_3, \quad X_7 f = z p_3,$$

care determină grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \alpha_1, \\ y' &= \alpha_4 y + \alpha_5 z + \alpha_2, \\ z' &= \alpha_6 y + \alpha_7 z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{169}$$

Deci, *transformarea punctuală (166) admite ca grup total de mișcări grupul (169).*

Considerînd conexiunea [II], sistemul (73), (74) devine:

$$a_i = a_i^2 = 0 \ (i = 1, 2, 3,), \quad a_1^1 = a_3^3 = 2a_2^1, \quad a_3^1 = 2a_2^3, \quad a_1^3 = 2\alpha a_2^3.$$

Avem deci cinci operatori infinitezimali independenți

$$X_i f = p_i \ (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = (2x + y) p_1 + 2z p_3 \ X_5 f = 2z p_1 + (2\alpha x + y) p_3.$$

Dintre aceștia doar primii patru formează grupul

$$\left.\begin{aligned} x' &= (2\alpha_4 + 1) x + \alpha_4 y + \alpha_1, \\ y' &= y + \alpha_2, \\ z' &= (2\alpha_4 + 1) z + \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{170}$$

Deci, *transformările punctuale (167) și (168) admit ca grup total de mișcări grupul (170).*

Rezultă:

TEOREMA 9. *Transformările punctuale, atașate conexiunilor proiective constante, care determină între spațiile A_3 și E_3 corespondențe speciale cu puncte comune izolate, au ca grupuri de mișcări grupurile (169) și (170).*

О СПЕЦИАЛЬНЫХ СООТВЕТСТВИЯХ МЕЖДУ ПРОЕКТИВНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

РЕЗЮМЕ

В настоящей заметке получаются постоянные проективные связности, определяющие, между пространствами A_3 и E_3, специальные соответствия с неизолированными и изолированными общими точками. Далее определяются точечные преобразования, соответствующие этим связностям и их группы движений.

Получаются теоремы:

ТЕОРЕМА 4. *Постоянная проективная связность, определяющая специальное соответствие с неизолированными общими точками между пространствами A_3 и E_3, приводится при помощи замен переменных к видам:*

[I] $\Pi^1_{22}=1,\ \Pi^1_{33}=\eta\quad(\eta=0,\pm 1);$

[II] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^1_{33}=\alpha\quad(\alpha\neq 0);$

[III] $\Pi^1_{1i}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=-\Pi^3_{1i}=-\Pi^3_{23}=-\Pi^3_{33}=1,$

$\Pi^1_{22}=-\Pi^3_{22}=\alpha\quad(i=1,2,3);$

[IV] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{23}=-\Pi^3_{12}=-\Pi^3_{32}=1;$

[V] $\Pi^1_{22}=1,\ \Pi^3_{22}=\lambda\qquad(\lambda=\pm 1);$

[VI] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=-\Pi^3_{12}=-\Pi^1_{22}=-\Pi^3_{32}=1;$

[VII] $\Pi^1_{23}=1;$

[VIII] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=-\Pi^3_{23}=1;$

[IX] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=\Pi^2_{23}=-\Pi^3_{32}=1,\ \Pi^1_{11}=\Pi^2_{11}=-\Pi^2_{33}=\Pi^3_{33}=-2;$

[X] $\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=1;$

[XI] $\Pi^1_{i3}=-\Pi^2_{i3}=1\qquad(i=1,2,3);$

[XII] $\Pi^1_{22}=\Pi^3_{12}=1;$

[XIII] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=-\Pi^3_{12}=1;$

[XIV] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=-\Pi^3_{12}=-\Pi^3_{32}=1;$

[XV] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=1,\ \Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=\alpha,\ \Pi^3_{12}=-\alpha^2\ (\alpha\neq 0,-1);$

[XVI] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=-\Pi^2_{13}=1,\ \Pi^3_{33}=-2,\ \Pi^2_{33}=4,$

$\Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=-\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=\frac{1}{2},\ \Pi^3_{12}=\frac{1}{4};$

[XVII] $\Pi^1_{11}=\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=-\Pi^2_{22}=-\Pi^2_{23}=1,\ \Pi^2_{21}=-(2\alpha+1),$
$\Pi^3_{31}=\Pi^3_{11}=2\alpha\ \ \Pi^3_{12}=\alpha,\ \Pi^2_{11}=\Pi^2_{13}=-(4\alpha+1)\quad(\alpha<0);$

[XVIII] $\Pi^1_{13}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^1_{11}=-\Pi^2_{22}=\dfrac{1-\alpha}{2},\ \Pi^2_{21}=-\dfrac{\alpha^2-\alpha+2}{4},$

$\Pi^3_{31}=\dfrac{\alpha^2+\alpha}{4},\ \Pi^1_{12}=\dfrac{3-\alpha}{4},\ \Pi^3_{32}=-\dfrac{\alpha+1}{4},\ \Pi^2_{23}=\alpha,$

$\Pi^3_{33}=-(\alpha+1),\ \Pi^2_{11}=\dfrac{(\alpha-1)(\alpha^2+3)}{8}\ \Pi^3_{11}=\dfrac{(1-\alpha)(\alpha+1)^2}{16},$

$\Pi^2_{33}=2(\alpha+1),\ \Pi^3_{12}=\dfrac{(\alpha+1)^2}{16},\ \Pi^2_{13}=\dfrac{\alpha^2+1}{2}\quad(\alpha\neq\pm1);$

[XIX] $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=\Pi^2_{hk}=-\Pi^3_{hk}=1\qquad(h,k=2,3);$

[XX] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^2_{22}=1,\ \Pi^1_{33}=1-\alpha^2,\ \Pi^1_{12}=\Pi^3_{22}=-\dfrac{1}{2},$

$\Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=-\dfrac{\alpha+1}{4\alpha},\ \Pi^1_{13}=-\Pi^2_{23}=-\dfrac{\alpha+1}{2},\ \Pi^2_{13}=-\dfrac{(\alpha+1)^2}{4\alpha},$

$\Pi^3_{12}=\dfrac{1}{4\alpha},\ \Pi^2_{23}=-\dfrac{1}{\alpha+1}\ (\alpha\neq0,\pm1);$

невыписываемые составляющие равны нулю.

ТЕОРЕМА 5. *Точечные преобразования, соответствующие постоянным проективным связностям, определяющим между пространствами A_3 и E_3 специальные соответствия с неизолированными общими точками, могут быть приведены путем замен переменных к одному из видов* (*105*), ..., (*124*), *причем эквивалентность между пространствами A_3 и E_3 является эквивалентностью в целом в случае преобразований* (*105*) — (*111*), (*114*) — (*116*), (*118*) — (*120*), (*122*) — (*124*).

ТЕОРЕМА 6. *Точечные преобразования, соответствующие постоянным проективным связностям, определяющим между пространствами A_3 и E_3 специальные соответствия с неизолированными общими точками, обладают в качестве полных групп движений группами* (*125*), ..., (*144*).

ТЕОРЕМА 7. *Проективно постоянный тензор Π^i_{jk}, определяющий специальное соответствие с изолированными общими точками между пространствами A_3 и E_3, приводится путем замен переменных к одному из видов*:

[I] $\Pi^1_{11}=-2,\ \Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=1;$

[II] $\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=1,\ \Pi^3_{12}=\alpha\qquad(\alpha\neq0);$

причем невыписываемые составляющие равны нулю.

TEOREMA 8. *Точечные преобразования, соответствующие постоянным проективным связностям, определяющим между пространствами A_3 и E_3 специальные соответствия с изолированными общими точками, приводятся при помощи замен переменных к одному из видов* (*166*), (*167*), (*168*).

TEOREMA 9. *Точечные преобразования, соответствующие постоянным проективным связностям, определяющим между пространствами A_3 и E_3 специальные соответствия с изолированными общими точками, обладают в качестве групп движений группами* (*169*) *и* (*170*).

AU SUJET DES CORRESPONDANCES SPÉCIALES ENTRE ESPACES PROJECTIFS. II

RÉSUMÉ

Dans cette Note, on obtient les connexions projectives constantes qui déterminent, entre les espaces A_3 et E_3 des correspondances spéciales avec des points communs non isolés et isolés. On détermine ensuite les transformations ponctuelles attachées à ces connexions, ainsi que leurs groupes de mouvements.

On obtient ainsi les théorèmes :

THÉORÈME 4. *La connexion projective constante, qui détermine une correspondance spéciale ayant des points communs non isolés entre les espaces A_3 et E_3, peut être ramenée, par des changements de variables, aux formes* :

[I] $\Pi^1_{22}=1,\ \Pi^1_{33}=\eta \quad (\eta=0,\pm 1)$;

[II] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^1_{33}=\alpha \quad (\alpha\neq 0)$;

[III] $\Pi^1_{1i}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{33}=-\Pi^3_{1i}=-\Pi^3_{23}=-\Pi^3_{33}=1,$
$\Pi^1_{22}=-\Pi^3_{22}=\alpha \quad (i=1,2,3)$;

[IV] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{23}=-\Pi^3_{12}=-\Pi^3_{32}=1$;

[V] $\Pi^1_{22}=1,\ \Pi^3_{22}=\lambda \quad (\lambda=\pm 1)$;

[VI] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=-\Pi^3_{12}=-\Pi^1_{22}=-\Pi^3_{32}=1$;

[VII] $\Pi^1_{23}=1$,

[VIII] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=-\Pi^3_{23}=1$;

[IX] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=\Pi^2_{23}=-\Pi^3_{32}=1,\ \Pi^1_{11}=\Pi^2_{11}=-\Pi^2_{33}=\Pi^3_{33}=-2$;

[X] $\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=1$;

[XI] $\Pi^1_{i3}=-\Pi^2_{i3}=1 \qquad (i=1,2,3)$;

[XII] $\Pi^1_{22}=\Pi^3_{12}=1$;

[XIII] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=-\Pi^3_{12}=1$;

[XIV] $\Pi^1_{12}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=-\Pi^3_{12}=-\Pi^3_{32}=1$;

[XV] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^3_{22}=1,\ \Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=\alpha,\ \Pi^3_{12}=-\alpha^2 \quad (\alpha\neq 0,-1)$;

[XVI] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^1_{13}=\Pi^2_{23}=-\Pi^2_{13}=1,\ \Pi^3_{33}=-2,\ \Pi^2_{33}=4,$

$$\Pi^1_{12}=-\Pi^3_{32}=-\Pi^2_{21}=\Pi^3_{31}=\frac{1}{2},\ \Pi^3_{12}=\frac{1}{4};$$

[XVII] $\Pi^1_{11}=\Pi^1_{12}=\Pi^1_{13}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=-\Pi^2_{22}=-\Pi^2_{23}=1,\ \Pi^2_{21}=-(2\alpha+1),$

$\Pi^3_{31}=\Pi^3_{11}=2\alpha,\ \Pi^3_{12}=\alpha,\ \Pi^2_{11}=\Pi^2_{13}=-(4\alpha+1) \quad (\alpha<0)$;

[XVIII] $\Pi^1_{13}=\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=1,\ \Pi^1_{11}=-\Pi^2_{22}=\frac{1-\alpha}{2},\ \Pi^2_{21}=-\frac{\alpha^2-\alpha+2}{4},$

$$\Pi^3_{31}=\frac{\alpha^2+\alpha}{4},\ \Pi^1_{12}=\frac{3-\alpha}{4},\ \Pi^3_{32}=-\frac{\alpha+1}{4},\ \Pi^2_{23}=\alpha,$$

$$\Pi^3_{33}=-(\alpha-1),\ \Pi^2_{11}=\frac{(\alpha-1)(\alpha^2+3)}{8},\ \Pi^3_{11}=\frac{(1-\alpha)(\alpha+1)^2}{16},$$

$$\Pi^2_{33}=2(\alpha+1),\ \Pi^3_{12}=\frac{(\alpha+1)^2}{16},\ \Pi^2_{13}=\frac{\alpha^2+1}{2} \quad (\alpha\neq\pm 1);$$

[XIX] $\Pi^1_{22}=-\Pi^1_{33}=\Pi^2_{hk}=-\Pi^3_{hk}=1 \qquad (h,k=2,3)$;

[XX] $\Pi^1_{22}=\Pi^1_{23}=\Pi^2_{22}=1,\ \Pi^1_{33}=1-\alpha^2,\ \Pi^1_{12}=\Pi^3_{22}=-\frac{1}{2},$

$$\Pi^2_{21}=-\Pi^3_{31}=-\frac{\alpha+1}{4\alpha},\ \Pi^1_{13}=-\Pi^2_{23}=-\frac{\alpha+1}{2},\ \Pi^2_{13}=-\frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha},$$

$$\Pi^3_{12}=\frac{1}{4\alpha},\ \Pi^2_{23}=-\frac{1}{\alpha+1} \quad (\alpha\neq 0,\pm 1);$$

les composantes non écrites étant nulles.

THÉORÈME 5. *Les transformations ponctuelles attachées aux connexions projectives constantes, qui déterminent entre les espaces A_3 et E_3 des correspondances spéciales avec des points communs non isolés, peuvent être ramenées par des changements de variables à l'une des formes* (105) ... (124), *l'équivalence entre les espaces A_3 et E_3 étant globale dans le cas des transformations* (105)—(111), (114)—(116), (118)—(120), (122)—(124).

THÉORÈME 6. *Les transformations ponctuelles attachées aux connexions projectives constantes qui déterminent, entre les espaces A_3 et E_3, des*

correspondances spéciales avec des points communs non isolés, ont comme groupes totaux de mouvements les groupes (125) ..., (144).

THÉORÈME 7. *Le tenseur projectif constant* Π^i_{jk}, *qui détermine une correspondance spéciale avec des points communs isolés entre les espaces* A_3 *et* E_3, *peut être ramené, par des changements de variables, à l'une des formes :*

$$[\mathrm{I}] \qquad \Pi^1_{11} = -2, \quad \Pi^2_{21} = \Pi^3_{31} = 1;$$

$$[\mathrm{II}] \qquad \Pi^1_{23} = \Pi^3_{22} = 1, \quad \Pi^3_{12} = \alpha \qquad (\alpha \neq 0);$$

les composantes non écrites étant nulles.

THÉORÈME 8. *Les transformations ponctuelles attachées aux connexions projectives constantes qui déterminent, entre les espaces* A_3 *et* E_3, *des correspondances spéciales avec des points communs isolés peuvent être ramenées, par des changements de variables, à l'une des formes (166), (167) ou* (168).

THÉORÈME 9. *Les transformations ponctuelles attachées aux connexions projectives constantes qui déterminent, entre les espaces* A_3 *et* E_3, *des correspondances spéciales avec des points communs isolés, ont comme groupes totaux de mouvements les groupes (169) et (170).*

BIBLIOGRAFIE

M. I. STOKA, *Asupra corespondențelor speciale între spații proiective.* I. Studii și cercetări matematice, **XII**, *1*, 197–250 (1961).

ASUPRA SPAȚIILOR CU CONEXIUNE AFINĂ CONSTANTĂ ATAȘATE UNOR ALGEBRE REALE

DE

I. VĂDUVA

În prima parte a lucrării de față se expun unele rezultate asupra spațiilor cu conexiune afină constantă asociate algebrelor lui Clifford, algebre care constituie o generalizare a cuaternionilor și octavelor. Aceste spații sînt spații Kagan subproiective și admit o metrică riemanniană de o anume formă.

În a doua parte a lucrării se vor transpune aceleași rezultate pentru spațiile asociate unor algebre mai generale : alternionii și semialternionii.

I. *Definiții și preliminarii.* Algebrele lui Clifford se pot defini în două feluri echivalente.

DEFINIȚIA 1. Algebra lui Clifford $\mathcal{A}_n$ de rang $2^{n-1} = p$ este algebra ale cărei unități sînt $1 = e_1, e_2, \ldots, e_n$ și toate produsele lor distincte $e_{j_1 \ldots j_k} = e_{j_1} \ldots e_{j_k}$, care satisfac relațiile :

$$\begin{aligned} &e_1 e_\alpha = e_\alpha e_1 = e_\alpha, && (\alpha = 2, \ldots, n) \\ &e_\alpha e_\beta = - e_\beta e_\alpha, && (\alpha, \beta = 2, \ldots, n) \\ &e_1^2 = e_1 = 1 ; \; e_\alpha^2 = - 1. \end{aligned} \tag{I.1}$$

Se pot presupune $e_{j_1 \ldots j_k}$ scrise sub forma normală, adică cu $j_1 < \ldots < j_k$, din cauză că

$$e_{\pi(j_1 \ldots j_k)} = e_{j_1 \ldots j_k} \cdot \operatorname{sgn} \pi \tag{I.1'}$$

unde sgn π este semnul permutării π a indicilor $j_1, \ldots, j_k$.

Se poate observa de asemenea că $\mathcal{A}_{n+1}$, care este de rang $2p$, se obține din $\mathcal{A}_n$, adăugîndu-se la $e_1, \ldots, e_n$, o unitate e, $e^2 = -1$ și care împreună cu e_i se supune condițiilor (I.1).

Aceasta ne spune că $\alpha \in \mathcal{A}_{n+1}$ este de forma

$$\alpha = a_1 + e a_2, \qquad a_i \in \mathcal{A}_n, \qquad (i = 1, 2) \tag{I.1''}$$

Un element $\alpha \in \mathcal{A}_n$ se scrie

$$\alpha = \sum_k a^{i_1 \dots i_k} e_{i_1 \dots i_k}$$

şi prin definiţie conjugatul este

$$\bar{\alpha} = \sum_k (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} a^{i_1 \dots i_k} e_{i_1 \dots i_k}.$$

Numim urma lui α şi notăm $\{\alpha\}$, coeficientul lui 1 din expresia lui α. Definim norma lui α, notată $\| \alpha \|$, ca satisfăcînd relaţia:

$$\| \alpha \|^2 = \{\alpha\bar{\alpha}\} = \{\bar{\alpha}\alpha\} = \sum_k \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k} (a^{i_1 \dots i_k})^2, \quad \varepsilon_{i_h} = 1, \ (h = 1, 2 \dots).$$

Înainte de a da definiţia a doua vom remarca faptul că aceste algebre sînt, pentru $n = 3$, 4, cuaternionii respectiv octavele.

DEFINIŢIA 2. Algebrele lui Clifford $\mathcal{A}_n$ sînt algebrele de rang $2^{n-1} = p$ definite prin următoarele relaţii de recurenţă:

$$\mathcal{A}_{n+1} = \{\alpha \mid \alpha = (a_1, a_2); \ a_i \in \mathcal{A}_n, \quad i = 1, 2\}$$

pentru care sînt satisfăcute cerinţele

$$\begin{aligned} &\alpha + \alpha' = (a_1 + a_1', \ a_2 + a_2') \\ &\lambda\alpha = (\lambda a_1, \ \lambda a_2) \\ &\bar{\alpha} = (\bar{a}_1, \ -a_2) \\ &\alpha\alpha' = (a_1 a_1' - \bar{a}_2' a_2, \ a_2' a_1 + a_2 a_1') \end{aligned} \tag{I.2}$$

pentru orice $\lambda \in \mathcal{R}$; $\alpha, \ \alpha' \in \mathcal{A}_{n+1}$.

Dacă în $\mathcal{A}_n$ unităţile sînt $e_1, \dots, e_p$, atunci unităţile $\alpha_i \in \mathcal{A}_{n+1}$ se pot defini astfel

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = (1, 0); \ \alpha_2 = (e_2, 0); \ \dots; \ \alpha_p = (e_p, 0) \\ &\alpha_{p+1} = (0, 1); \ \alpha_{p+2} = (0, e_2); \ \dots; \ \alpha_{2p} = (0, e_p) \end{aligned} \tag{I.2'}$$

şi se vede din definiţia recurentă că α_i satisfac relaţiile:

$$\begin{aligned} &\alpha_i \alpha_1 = \alpha_1 \alpha_i = \alpha_i \\ &\alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i, \qquad (i = 1, \dots, 2p) \\ &\alpha_i^2 = -1 = -\alpha_1, \qquad (i > 1). \end{aligned} \tag{I.2''}$$

Un element $\alpha \in \mathcal{A}_n$ se va scrie

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p} x^i e_i; \quad x^i \in \mathcal{R}$$

unde $\mathcal{R}$ este mulţimea numerelor reale, iar conjugatul se va scrie

$$\bar{\alpha} = x^1 e_1 - \sum_\alpha x^\alpha e_\alpha, \quad (\alpha > 1).$$

Relațiile de mai sus, inclusiv relația (I. 1″) valabilă și în cazul definiției 2, ne arată echivalența celor două definiții.

Se știe că fiind dată o algebră $\mathcal{A}(e_1, \ldots, e_n)$ reală, spațiul A_n, cu conexiune afină constantă asociat, are coeficienții de conexiune dați de formulele

$$e_j e_k = \Gamma^i_{jk} e_i . \tag{I.3}$$

Din definiția 2 a algebrelor lui Clifford rezultă că spațiile A_p asociate vor avea coeficienții de conexiune dați de formulele

$$\begin{aligned} &\Gamma^i_{1i} = \Gamma^i_{i1} = 1, \qquad i = 1, \ldots, p \\ &\Gamma^1_{\alpha\alpha} = -1, \qquad (\alpha > 1) \\ &\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \varepsilon, \ \varepsilon = \pm 1 \text{ (strîmb simetrici pentru } \alpha \neq \beta \neq \gamma). \end{aligned} \tag{I.3′}$$

Curbele autoparalele fiind date în general de sistemul

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}$$

rezultă că pentru spațiul A_p vor fi de forma

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 x^1}{dt^2} = \left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 - \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\alpha}{dt} \\ &\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = 2 \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^\alpha}{dt} \qquad (\alpha > 1). \end{aligned} \tag{I.4}$$

Soluțiile finite se obțin astfel : din ultimele ecuații (I.4) rezultă că relațiile

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = k_\alpha e^{2x^1}$$

care înlocuite în prima ne conduc la ecuația

$$\frac{d^2 x^1}{dt^2} = \left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 - k^2 e^{4x^1} \text{ cu } k^2 = k_\alpha k_\alpha . \tag{I.4′}$$

Schimbînd rolul variabilelor in (I.4′) obținem o ecuație Bernoulli care se integrează ușor. În definitiv se obțin curbele autoparalele care au următoarea formă

$$\begin{aligned} x^1 &= -\frac{1}{2} \log \frac{s^2 + k^2}{A} \\ x^2 &= \frac{k_\alpha}{k} \operatorname{arctg} \frac{s}{k} + C_\alpha, \text{ cu } s = At + B \end{aligned} \tag{I.4″}$$

unde A, B, C_α, K_α, sînt constante arbitrare.

Din (I.4″) rezultă că

$$\frac{x^2 - C_2}{k_2} = \ldots = \frac{x^p - C_p}{k_p}$$

adică geoteticele se află în plane paralele cu axa x^1 a lui A_p, deci putem enunța teorema :

Spațiul A_p este un spațiu al lui Kagan subproiectiv.

Se constată ușor că aceste curbe nu sînt închise și nu prin oricare două puncte trece o asemenea curbă.

De asemenea se constată că spațiul are torsiune și curbură.

Vom demonstra acum teorema :

Spațiul A_p este cu conexiune metrică, admițînd metrica conform euclidiană

$$ds^2 = e^{-2x^1}(dx^i\, dx^i).$$

Vom demonstra această teoremă construind metrica respectivă. Fie vectorul $V(V^i)$ din A_p și să observăm că lungimea sa în $\mathcal{A}_n$ este

$$l^2(V) = \| V \|^2 = (V^1)^2 + \ldots + (V^p)^2, \text{ unde } V = V^i e_i.$$

Transportînd prin paralelism vectorul V în A_p, el devine $V + dV$, unde dV are componentele dV^i date de

$$dV^i = \Gamma^i_{jk} V^j dx^k. \tag{I.5}$$

Amplificînd această relație cu e_i și sumînd, avem : $dV = V d\bar{x}$, $(d\bar{x} = dx^i e_i)$.

Cum însă $d\overline{V} = d\bar{x}\overline{V}$ rezultă că $l^2(V + dV)$ în A_n va fi

$$l^2(V + dV) = (\overline{V} + d\overline{V})(V + dV) = \| V \|^2 + \overline{V}\, dV + d\overline{V}\, V + d\overline{V}\, dV$$

și din cauză că $d\bar{x} + d\bar{x} = 2\, dx^1$, obținem, după ce neglijăm termenul de ordinul al doilea, că

$$l^2(V + dV) = \| V + dV \|^2 = \| V \|^2 (1 + 2\, dx^1).$$

Deci

$$d \| V \|^2 = \| V + dV \|^2 - \| V \|^2 = 2 \| V \|^2\, dx^1,$$

adică după un transport prin paralelism lungimea vectorului se modifică cu $2 \| V \|^2 dx^1$.

Se vede că pentru ca lungimea vectorului să se conserve trebuie să o calculăm după formula

$$l^2(V) = e^{-2x^1} \| V \|^2 \tag{I.5′}$$

deoarece

$$d(e^{-2x^1} \| V \|^2) = -2\, e^{-2x^1} \| V \|^2\, dx^1 + e^{-2x^1}\, d \| V \|^2 =$$

$$= -2\, e^{-2x^1} \| V \|^2\, dx^1 + 2\, dx^1 \| V \|^2 e^{-2x^1} = 0.$$

Relația (I.5′) este chiar relația ce definește metrica.
Demonstrația se face ușor și prin verificare directă.

II. Algebra alternionilor de ordinul n și indice l, pe care o vom nota ${}^{l}\mathcal{A}_n$, este algebra de rang $2^{n-1} = p$ a cărei bază are elementele $1, e_1, \ldots, e_{n-1}$ și toate produsele lor posibile, produse care satisfac relațiile :

$$e_i e_j = - e_j e_i ; \quad e_i^2 = - \varepsilon_i \tag{II.1}$$

cu $\varepsilon_i = \pm 1$ unde -1 se repetă de l ori.
Se recunoaște că definiția 1 este un caz particular al acesteia și că $\mathcal{A}_n = {}^{\circ}\mathcal{A}_n$.
Din considerații analoge celor de la I se constată că algebra este normată și

$$\| \alpha \|^2 = \{\overline{\alpha}\alpha\} = \sum_k \varepsilon_{i_1} \ldots \varepsilon_{i_k} (a^{i_1 \ldots i_k})^2, \ \varepsilon_{ih} = \pm 1, \ (h = 1, 2 \ldots).$$

Dacă L este numărul de unități pentru care $e_i^2 = +1$ rezultă că spațiul ${}^{L}A_p$ cu conexiune afină constantă asociat va avea coeficienții dați de formulele

$$\begin{aligned} &\Gamma^i_{1i} = \Gamma^i_{i1} = 1, && (i = 1, \ldots, p) \\ &\Gamma^1_{rr} = 1, && (r = 2, \ldots, L) \\ &\Gamma^1_{\alpha\alpha} = -1, && (\alpha = L+1, \ldots, p) \\ &\Gamma^h_{kl} = \varepsilon, \ \varepsilon = \pm 1 && \text{(strîmb simetrici pt. } h \neq k \neq l) \\ & && (h, k, l = 2, \ldots, p). \end{aligned} \tag{II.2}$$

Din calcule asemănătoare celor pentru cazul spațiilor A_p rezultă că geoteticele au forma

$$\overline{K} = K^2 : \begin{cases} x^1 = -\dfrac{1}{2} \log \dfrac{s^2 - K^2}{A} \\ x^h = \dfrac{1}{2} \log C_h \dfrac{s - K}{s + K}, \quad (h = 2, \ldots, p) \end{cases}$$

$$\overline{K} = 0 : \begin{cases} x^1 = -\log s \\ x^h = -\dfrac{K_h}{As} + C_h \end{cases} \tag{II.3}$$

$$\overline{K} = -K^2 : \begin{cases} x^1 = -\dfrac{1}{2} \log \dfrac{s^2 + K^2}{A} \\ x^h = \dfrac{K_h}{A} \operatorname{arctg} \dfrac{s}{K} + C_h \end{cases}$$

cu $\overline{K} = K_r K_r - K_\alpha K_\alpha$ și A, B, C_h, K_h constante, iar $s = At + B$.

Se vede că și ${}^{L}A_p$ este un spațiu Kagan subproiectiv.

Spațiul admite de asemenea o metrică conform-pseudoeuclidiană de forma

$$ds^2 = e^{-2x^1}(dx^r\,dx^r - dx^\alpha\,dx^\alpha). \tag{II.4}$$

Algebrele alternionice conțin în caz particular numerele duble și anticuaternionice (pentru $l > 0$).

Algebrele semialternionice se definesc analog.

Numim ${}^{l}\mathfrak{B}_n$ algebra semialternionilor de ordin n și indice l, algebra ale cărei unități sînt 1, $e_0, \ldots, e_{n-1}$ și toate produsele lor posibile, astfel încît

$$e_0^2 = \nu_0 = 0\,;\quad e_i^2 = -\nu_i\,;\quad \nu_i = \pm 1 \tag{II.5}$$

iar valoarea -1 pentru ν_i este luată de l ori.

Evident algebra are rangul $2^n = p$.

Se constată că spațiul ${}^{L}B_p$ are coeficienții de conexiune dați de formulele (II.2) în care trebuie să înlocuim p cu $p/_2$ și în plus

$$\Gamma^1_{\lambda\lambda} = 0, \left(\lambda > \frac{p}{2}\right). \tag{II.6}$$

Curbele autoparalele vor avea ecuațiile finite (II.3) unde pentru expresia lui $\overline{K}$ nu vor interveni indicii λ.

Spațiul este de asemenea Kagan subproiectiv și admite metrica conform-pseudoeuclidiană

$$ds^2 = e^{-2x^1}(dx^r\,dx^r - dx^\alpha\,dx^\alpha)\quad r = 1, \ldots, L,\ \alpha = L+1, \ldots, 2^{n-1} = \frac{p}{2}. \tag{II.7}$$

Se vede din ultima formulă că componentele cu indici λ nu intervin în metrică, pentru că ele nu intervin nici în norma lui ${}^{l}\mathfrak{B}_n$.

О ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ АЛГЕБРАМ

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются пространства постоянной аффинной связности, присоединенные к алгебрам Клиффорда, а также и к алгебрам альтернионов и полуальтернионов (II).

Доказывается, что каждое из этих пространств является субпроективным пространством Кагана. В связи с этим отмечаются некоторые свойства автопараллельных кривых.

Показывается также, что эти пространства допускают римановы метрики (I, 5'), (II, 4) и (II, 7). В каждом случае устанавливается, что вид метрики зависит от формулы, по которой вычисляется норма в соответствующей алгебре.

Доказательства и подробности приводятся для пространств, присоединенных к алгебрам Клиффорда.

SUR LES ESPACES À CONNEXION AFFINE CONSTANTE ATTACHÉS À DES ALGÈBRES RÉELLES

RÉSUMÉ

L'auteur considère les espaces à connexion affine constante associés aux algèbres de Clifford ainsi qu'aux algèbres des alternions et des semi-alternions (II).

On démontre que chacun de ces espaces est un espace sous-projectif de Kagan. A cette occasion, on mentionne certaines propriétés des courbes auto-parallèles.

Il montre également que ces espaces admettent des métriques riemanniennes données par (I, 5'), (II, 4) et (II, 7). Chaque fois on constate que la forme de la métrique dépend de la formule servant à calculer la norme dans l'algèbre respective.

Des démonstrations et des détails ne sont donnés qu'au sujet des espaces associés aux algèbres de Clifford.

BIBLIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Lecții de geometrie diferențială*. **II**, cap. VI, § 3, Ed. Acad. R.P.R., 1951.
2. Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД, *Неевклидовые геометрии*. Гл. V., Гос. изд. Тех.—Теор. лит., Москва, 1955.

ASUPRA REZOLVĂRII PROBLEMEI PLANE A TEORIEI ELASTICITĂȚII PENTRU DOMENII MULTIPLU-CONEXE, CU AJUTORUL FUNCȚIEI LUI AIRY

DE

CRISTIAN TEODOSIU

1. După cum se știe, determinarea stării de tensiune într-un corp elastic plan, omogen și izotrop, în cazul în care sînt date sarcinile exterioare pe contur (prima problemă fundamentală a teoriei elasticității) și în absența forțelor masice, conduce la determinarea unei funcții biarmonice : funcția lui Airy [1], care trebuie să satisfacă pe conturul corpului elastic anumite condiții la limită.

În cazul general al domeniilor multiplu-conexe, funcția lui Airy este neuniformă și cuprinde termeni singulari. Coeficienții termenilor multiformi și ai celor singulari depind de rezultanta și momentul rezultant al sarcinilor exterioare aplicate pe fiecare contur, precum și de caracteristicile distorsiunilor plane aplicate corpului elastic.

Structura funcției lui Airy în cazul sistemelor elastice plane multiplu-conexe a fost precizată de G. Grioli [3], în 1948, care a utilizat o descompunere specială a funcției biarmonice, de tipul celei a lui Poincaré, dată de G. Fichera [2].

În ceea ce privește condițiile la limită pentru funcția lui Airy, în cazul domeniilor multiplu-conexe, ele au fost indicate încă din 1899 de J. H. Michell [5] și regăsite într-un caz particular de W. Prager [7], printr-o metodă variațională.

Noi ne propunem să studiem această problemă pornind de la reprezentarea complexă a componentelor tensorului tensiunii și a vectorului deplasării, precum și de la rezultatele obținute de N. I. Mușhelișvili [6] în cazul domeniilor multiplu-conexe.

Utilizarea teoriei funcțiilor de variabilă complexă permite să obținem diferite rezultate,în problema studiată, pe o cale simplă și unitară.

2. După cum se știe, funcția lui Airy se poate reprezenta sub forma :

$$F(x, y) = \mathrm{Re}\,\{\bar{z}\,\varphi(z) + \chi(z)\} \qquad (1)$$

unde $\bar{z} = x - iy$, iar $\varphi(z)$ şi $\chi(z)$ sînt, în cazul domeniului elastic simplu-conex, două funcţii olomorfe de variabila complexă $z = x + iy$, $\varphi(z)$ avînd expresia :

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}\int f(z)\,dz \tag{2}$$

unde $f(z) = P + iQ$, este funcţia olomorfă, care are ca parte reală :

$$P = \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Componentele deplasării elastice u, v, şi rotaţia elastică ω sînt legate de funcţiile $\varphi(z)$ şi $\chi(z)$ prin relaţiile :

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\chi'(z)} \tag{4}$$

$$\omega = \frac{1+\varkappa}{2\mu}\operatorname{Im}\{\varphi'(z)\} = \frac{1+\varkappa}{8\mu}Q, \tag{5}$$

unde $\varkappa = \dfrac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$, iar λ şi μ sînt constantele lui Lamé. Aceste formule, ca şi cele care vor urma, se referă la cazul stării de deformaţie plană. În cazul stării de tensiune plană generalizată, constanta λ trebuie înlocuită cu :

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Componentele tensiunii σ_x, σ_y, τ_{xy} se exprimă, de asemenea cu ajutorul funcţiilor $\varphi(z)$ şi $\chi(z)$ prin relaţiile :

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\} \tag{6}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\,\tau_{xy} = 2\{\bar{z}\,\varphi'(z) + \chi''(z)\}. \tag{7}$$

În sfîrşit, dacă considerăm un arc oarecare AB aparţinînd domeniului plan ocupat de corpul elastic şi ne alegem ca sens pozitiv, sensul de la A la B, iar ca normală pozitivă, normala dirijată spre dreapta cînd ne deplasăm pe arc în sensul pozitiv (fig. 1), atunci vectorul rezultant (X, Y)

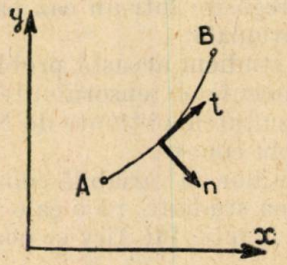


Fig. 1

al eforturilor ce acționează asupra arcului AB din partea normalei pozitive și momentul rezultant M al acestor eforturi față de originea axelor de coordonate sînt date de relațiile :

$$X + iY = -i\left[\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right]_A^B = -i\left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi'(z)}\right]_A^B \tag{8}$$

$$M = \mathrm{Re}\left[\chi(z) - z\chi'(z) - z\bar{z}\,\varphi'(z)\right]_A^B \tag{9}$$

unde am convenit să notăm, în mod obișnuit, cu simbolul $[\ ]_A^B$, creșterea expresiei din paranteză, după o deplasare pe arcul AB, din A în B.

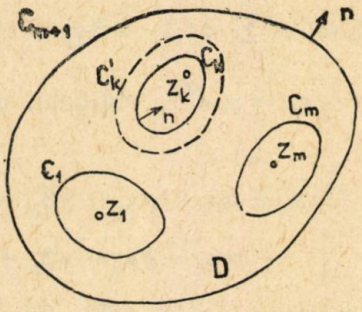


Fig. 2

3. Să presupunem acum că domeniul D ocupat de corpul elastic este $(m+1)$-conex, fiind limitat de $m+1$ contururi simple închise $C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}$ dintre care cel din urmă le cuprinde pe toate celelalte (fig. 2). Presupunem că aceste contururi nu au puncte comune și că sînt netede sau netede pe porțiuni. În cazul acestui domeniu multiplu-conex, funcțiile $\varphi(z)$ și $\chi(z)$ vor fi în general multiforme. Presupunînd însă că σ_x, σ_y, τ_{xy} sînt funcțiuni continue, uniforme și cu derivate parțiale continue pînă la ordinul al doilea inclusiv, în domeniul D, se pot obține cu ușurință din (6) și (7), următoarele expresii (vezi [6]) pentru $\varphi(z)$ și $\chi(z)$:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{m}(A_k z + \gamma_k)\ln(z - z_k) + \varphi_0(z) \tag{10}$$

$$\chi(z) = \sum_{k=1}^{m}(\gamma_k' z + \gamma_k'')\ln(z - z_k) + \chi_0(z) \tag{11}$$

unde : $\varphi_0(z)$ și $\chi_0(z)$ sînt funcții olomorfe în D,

z_k este un punct ales arbitrar în interiorul conturului C_k,

$\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\gamma_k' = \alpha_k' + i\beta_k'$, $\gamma_k'' = \alpha_k'' + i\beta_k''$ sînt niște constante

complexe, iar A_k sînt niște constante reale ($k = 1, 2, \ldots, m$). Din (10) și (11) obținem imediat:

$$\varphi'(z) = \sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \varphi^*(z) \tag{12}$$

$$\chi'(z) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k' \ln(z - z_k) + \chi^*(z) \tag{13}$$

unde $\varphi^*(z)$ și $\chi^*(z)$ sînt funcții olomorfe în D.

4. Să determinăm acum structura funcției $F(x, y)$, pornind de la relația (1). Ținînd seama de expresiile (10) și (11), obținem:

$$F = \operatorname{Re}\left\{\bar{z}\,\varphi_0(z) + \chi_0(z) + \sum_{k=1}^{m} (z\bar{z}A_k + \bar{z}\gamma_k + z\gamma_k' + \gamma_k'') \ln(z - z_k)\right\}.$$

Notînd $z = \rho e^{i\theta}$, $z - z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$, obținem, după transformări evidente:

$$F = F_0 + \sum_{k=1}^{m} \{(\rho^2 A_k + x\alpha_k + y\beta_k + x\alpha_k' - y\beta_k' + \alpha_k'') \ln \rho_k - (x\beta_k - y\alpha_k + x\beta_k' + y\alpha_k' - \beta_k'')\,\theta_k\} \tag{14}$$

unde $F_0(x, y) = \operatorname{Re}\{\bar{z}\,\varphi_0(z) + \chi_0(z)\}$ este, după cele spuse la pct. 1, o funcție biarmonică și uniformă în domeniul D, care, după cele arătate mai sus, nu mai are singularități logaritmice în interiorul contururilor C_k.

Pentru a obține semnificația fizică a constantelor ce intervin în relația (14), vom stabili legătura între aceste constante, torsorul forțelor aplicate pe fiecare contur în parte și caracteristicile distorsiunilor plane aplicate asupra corpului elastic.

Anume, vom presupune că asupra corpului elastic a fost aplicat un sistem de distorsiuni plane de caracteristici $\{u_k', v_k', \omega_k\}$, $(k = 1, \ldots, m)$ unde u_k', v_k', ω_k se referă la o tăietură care unește pe C_k cu C_{m+1}. După cum se știe [8], aceste caracteristici nu depind de tăietura efectuată, cu condiția ca aceasta să unească pe C_k cu C_{m+1}, reducînd ordinul de conexiune al domeniului, fără a intersecta celelalte contururi. Notînd cu u_k, v_k creșterile suferite de componentele deplasării u și v după o ocolire a conturului C_k în sens direct, avem evident:

$$u_k = -\omega_k y + u_k' \tag{15}$$

$$v_k = \omega_k x + v_k'. \tag{16}$$

Putem înlocui în raționamentele noastre conturul C_k, cu orice alt contur închis C_k', situat în D, care cuprinde pe C_k și nu are puncte comune cu nici un alt contur-componentă a frontierei. Contururile de tipul lui C_k', ne vor dispensa de a face ipoteze suplimentare asupra comportării funcțiilor ce intervin în relațiile ulterioare, în vecinătatea frontierei, întrucît pentru o funcție $f(z)$, olomorfă în orice porțiune simplu-conexă a domeniului D,

valoarea integralei $\int_{C_k'} f(z)\,dz$ nu depinde de alegerea particulară a conturului C_k', dacă acesta satisface condițiile indicate mai sus.

Ținînd seama de expresia (4) a componentelor deplasării, obținem :

$$u_k + iv_k = [u + iv]_{C_k'} = \frac{\pi}{\mu}\{-(\varkappa+1)A_k y - \varkappa\beta_k + \beta_k'\} +$$

$$+ \frac{\pi i}{\mu}\{(\varkappa+1)A_k x + \varkappa\alpha_k + \alpha_k'\}$$

și, ținînd seama de relațiile (15) și (16), obținem prin identificare :

$$A_k = \frac{\mu\omega_k}{\pi(\varkappa+1)} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} -\varkappa\beta_k + \beta_k' &= \frac{\mu}{\pi}u_k' \\ \varkappa\alpha_k + \alpha_k' &= \frac{\mu}{\pi}v_k'. \end{aligned} \tag{18}$$

Pe de altă parte, aplicînd formulele (8) și (9) contururilor C_k' și ținînd seama că în acest caz sensul de parcurgere va fi cel al acelor de ceasornic, întrucît sensul de ocolire trebuie ales astfel încît eforturile să acționeze asupra lui C_k' dinspre dreapta, obținem :

$$X_k + iY_k = -i\left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi'(z)}\right]_{C_k'} = -2\pi(\gamma_k - \bar{\gamma}_k') \tag{19}$$

$$M_k = \operatorname{Re}\left[\chi(z) - z\chi'(z) - z\bar{z}\,\varphi'(z)\right]_{C_k'} = 2\pi\beta_k'' \tag{20}$$

unde X_k și Y_k sînt componentele rezultantei forțelor exterioare aplicate asupra conturului C_k, iar M_k este momentul rezultant al acestor forțe în raport cu originea.

Relația (19) este echivalentă cu relațiile :

$$\begin{aligned} -\alpha_k + \alpha_k' &= \frac{X_k}{2\pi} \\ \beta_k + \beta_k' &= -\frac{Y_k}{2\pi}, \end{aligned}$$

care, împreună cu (18), dau :

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{2\mu v_k' - X_k}{2\pi(1+\varkappa)}, & \beta_k &= -\frac{2\mu u_k' + Y_k}{2\pi(1+\varkappa)} \\ \alpha_k' &= \frac{2\mu v_k' + \varkappa X_k}{2\pi(1+\varkappa)}, & \beta_k' &= \frac{2\mu u_k' - \varkappa Y_k}{2\pi(1+\varkappa)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Introducînd (17), (20) şi (21) în (14), obţinem în cele din urmă :

$$F = F_0 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k'' \ln \rho_k + \overline{F}, \tag{22}$$

unde $\overline{F}$ este o funcţie biarmonică în D, cunoscută mai dinainte, avînd expresia :

$$\overline{F}(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \frac{2\mu}{\pi(1+\varkappa)} \left(\frac{\rho^2}{2} \omega_k + x v_k' - y u_k' \right) \ln \rho_k + \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa - 1}{2\pi(\varkappa + 1)} (x X_k + y Y_k) \ln \rho_k + \frac{1}{2\pi} (- M_k + x Y_k - y X_k) \theta_k \right\}. \tag{23}$$

Ţinînd seama de expresia dată la punctul 2, pentru constantele elastice $\varkappa$, λ^*, $\varkappa^*$, relaţia (23) se mai poate scrie, în cazul stării plane de tensiune generalizată, sub forma simplificată :

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{m} \left\{ E \left(\frac{\rho^2}{2} \omega_k + x v_k' - y u_k' \right) \ln \rho_k + (1 - \nu)(x X_k + \right.$$

$$\left. + y Y_k) \ln \rho_k + 2(- M_k + x Y_k - y X_k) \theta_k \right\} \tag{23'}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinală, iar ν este coeficientul lui Poisson. În cazul stării de deformaţie plană E şi ν trebuie înlocuiţi respectiv cu constantele elastice :

$$E_0 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu}{1 - \nu}.$$

Din formula (23′) observăm că funcţia $\overline{F}(x, y)$ este în general multiformă, cu excepţia cazului în care forţele aplicate pe fiecare contur în parte au torsorul nul ($X_k = Y_k = M_k = 0$). Mai observăm de asemenea că starea de tensiune într-un corp elastic plan multiplu-conex, depinde, în general, de constantele elastice ale materialului, cu excepţia cazului în care deplasările sînt uniforme ($u_k' = v_k' = \omega_k = 0$, pentru orice k), iar forţele aplicate pe fiecare contur în parte au rezultanta nulă (nu este necesar ca şi momentul rezultant să fie nul).

5. Partea necunoscută, $F_1 = F - \overline{F}$, a funcţiei F, va fi determinată din condiţia ca ea să fie biarmonică în D, iar pe contur să satisfacă noi condiţii la limită determinate de condiţiile la limită date pentru F şi de expresiile pe frontieră ale tensiunilor convenţionale corespunzătoare lui $\overline{F}$.

Într-adevăr, funcţiunii biarmonice $\overline{F}(x, y)$ îi putem asocia o stare de tensiune convenţională, de componente $\overline{\sigma}_x$, $\overline{\sigma}_y$, $\overline{\tau}_{xy}$. Pe frontieră, această

stare de tensiune va fi echilibrată de niște forțe exterioare convenționale, de componente :

$$\bar{\sigma}_{nx} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}\right), \quad \bar{\sigma}_{ny} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\right).$$

Notînd cu $\sigma_{nx}^{(1)}$, $\sigma_{ny}^{(1)}$ diferențele dintre componentele forțelor exterioare date pe contur σ_{nx}, σ_{ny} și componentele forțelor exterioare convenționale, funcțiunea biarmonică necunoscută $F_1(x, y)$, va fi supusă, evident, condițiilor :

$$\sigma_{nx}^{(1)} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right), \quad \sigma_{ny}^{(1)} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right), \tag{24}$$

care trebuie satisfăcute pe întreaga frontieră a domeniului D.

Alegînd o origine a arcelor pe fiecare componentă C_k a frontierei *) relațiile (24) se mai pot scrie :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= -\int_0^s \sigma_{ny}^{(1)}\, ds + a_k \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \int_0^s \sigma_{nx}^{(1)}\, ds + b_k \end{aligned}\right\} \text{, pe } C_k \quad (k = 1, \ldots, m+1) \tag{25}$$

unde a_k, b_k sînt constante, deocamdată arbitrare.

Funcțiunile $H(s) = -\int_0^s \sigma_{ny}^{(1)}\, ds$ și $K(s) = \int_0^s \sigma_{nx}^{(1)}\, ds$ sînt cunoscute pe fiecare frontieră. Din (25), ținînd seama că :

$$\cos(n, x) = \cos(t, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\cos(t, x) = -\frac{dx}{ds}$$

(vezi fig. 1), obținem cu ușurință :

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \int_0^s \left(H\frac{dx}{ds} + K\frac{dy}{ds}\right) ds + a_k x + b_k y + c_k \\ \frac{dF_1}{dn} &= H\frac{dy}{ds} - K\frac{dx}{ds} + a_k\frac{dy}{ds} - b_k\frac{dx}{ds} \end{aligned}\right\} \text{, pe } C_k, (k = 1, \ldots, m+1) \tag{26}$$

unde c_k sînt alte constante, deocamdată arbitrare.

În cazul domeniului simplu-conex, starea de tensiune nu depinde de valoarea dată funcției liniare $a_1 x + b_1 y + c_1$ pe frontiera unică, deci această funcție poate fi neglijată.

*) Reamintim că sensul pozitiv al arcelor, pe fiecare componentă a conturului, trebuie ales astfel încît sarcinile exterioare să fie aplicate din partea normalei pozitive, adică dinspre dreapta.

În cazul domeniului $(m+1)$-conex însă, numai cele 3 constante corespunzătoare uneia din componentele frontierei, de exemplu C_{m+1}, pot fi considerate arbitrare, celelalte 3 m constante vor fi determinate din condiția ca deplasările elastice corespunzătoare funcției biarmonice F_1, să fie uniforme în domeniul D, condiție din care vom obține un sistem de $3m$ ecuații liniare cu $3m$ necunoscute. Pentru a obține acest sistem, vom apela la reprezentarea complexă dată funcției F_1, care poate fi scrisă sub forma :

$$F_1 = \operatorname{Re}\{\bar{z}\varphi_1(z) + \chi_1(z)\}$$

unde $\varphi_1(z)$ și $\chi_1(z)$ sînt două funcții olomorfe în D.

Notînd cu u_1, v_1 componentele deplasării elastice și cu ω_1 rotația elastică corespunzătoare funcției F_1, vom obține din (4) și (5) :

$$2\mu(u_1 + iv_1) = \varkappa\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\chi_1'(z)} \tag{4'}$$

$$\omega_1 = \frac{1+\varkappa}{2\mu}\operatorname{Im}\{\varphi_1'(z)\} = \frac{1+\varkappa}{8\mu}Q_1. \tag{5'}$$

Cum $\operatorname{Re}\{\varphi_1'(z)\} = P_1 = \Delta F_1$ este o funcție uniformă în D, condiția necesară și suficientă ca ω_1, respectiv Q_1 să fie o funcție uniformă în D, este *) ca :

$$\int_{C_k'} \frac{d(\Delta F_1)}{dn}\,ds = 0, \qquad (k = 1, \ldots, m). \tag{27}$$

Să observăm că în baza relației (9), (4') se mai poate scrie

$$2\mu(u_1 + iv_1) = (\varkappa+1)\varphi_1(z) - \{\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\chi_1'(z)}\} =$$

$$= (\varkappa+1)\varphi_1(z) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + i\frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Cum expresia $\dfrac{\partial F_1}{\partial x} + i\dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ este uniformă în D, întrucît F_1 este uniformă în D, rezultă că, pentru ca u_1 și v_1 să fie uniforme este necesar și suficient ca $\varphi_1(z)$ să fie uniformă. Din relația (2) obținem însă :

$\varphi_1(z) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int f_1(z)\,dz$, unde $f_1(z) = P_1 + iQ_1$ este uniformă, dacă sînt satisfăcute relațiile (27). Pentru ca $\varphi_1(z)$ să fie uniformă, este deci necesar și suficient **) ca

$$\int_{C_k'} f(z)\,dz = \int_{C_k'} (P_1 + iQ_1)(dx + idy) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m). \tag{28}$$

*) a se vedea, de exemplu, [6], anexa III, pct. 1.

**) *ibidem*, pct. 2.

Ținînd seama că funcția Q_1 este uniformă dacă sînt îndeplinite relațiile (27), obținem prin integrare prin părți :

$$\int_{C'_k} Q_1\,dx = [xQ_1]_{C'_k} - \int_{C'_k} x\,dQ_1 = -\int_{C'_k} x\,\frac{dQ_1}{ds}\,ds = -\int_{C'_k} x\,\frac{d(\Delta F_1)}{dn}\,ds$$

$$\int_{C'_k} Q_1\,dy = [yQ_1]_{C'_k} - \int_{C'_k} y\,dQ_1 = -\int_{C'_k} y\,\frac{dQ_1}{ds}\,ds = -\int_{C'_k} y\,\frac{d(\Delta F_1)}{dn}\,ds$$

$$\int_{C'_k} P_1\,dx = [xP_1]_{C'_k} - \int_{C'_k} x\,dP_1 = -\int_{C'_k} x\,\frac{dP_1}{ds}\,ds = -\int_{C'_k} x\,\frac{d(\Delta F_1)}{ds}\,ds$$

$$\int_{C'_k} P_1\,dy = [yP_1]_{C'_k} - \int_{C'_k} y\,dP_1 = -\int_{C'_k} y\,\frac{dP_1}{ds}\,ds = -\int_{C'_k} y\,\frac{d(\Delta F_1)}{ds}\,ds.$$

Introducînd aceste expresii în (28) și separînd partea reală de cea imaginară, obținem :

$$\int_{C'_k} \left\{ x\,\frac{d(\Delta F_1)}{dn} + y\,\frac{d(\Delta F_1)}{ds} \right\} ds = 0$$

$$(k = 1, \ldots, m) \qquad (29)$$

$$\int_{C'_k} \left\{ y\,\frac{d(\Delta F_1)}{dn} - x\,\frac{d(\Delta F_1)}{ds} \right\} ds = 0.$$

Formulele (28) și (29) constituie condițiile lui Michell pentru uniformitatea deplasărilor și servesc în cazul nostru împreună cu (27) pentru determinarea constantelor a_k, b_k, c_k, care intervin în scrierea condițiilor la limită (26) pentru funcția biarmonică necunoscută F_1, care va fi în acest caz, după cum se știe, unic determinată. Observînd că, prin aceasta, $F\ (x,y)$ și, prin urmare, starea de tensiune și de deformație a corpului rezultă bine determinate, putem enunța următoarea teoremă :

Starea de tensiune și de deformație a unui corp (m+1) - conex (continuu, omogen, izotrop, liniar elastic, fără tensiuni inițiale și ale cărui deformații sînt mici și nu influențează scrierea ecuațiilor de echilibru), este unic determinată de condițiile la limită și de cele 3m caracteristici ale distorsiunilor efectuate asupra celor m tăieturi, care servesc pentru a face simplu-conex, domeniul ocupat de corpul elastic.

Această teoremă, care generalizează teorema de unicitate a lui Kirchoff [4] pentru cazul domeniilor elastice plane simplu - conexe, este de fapt, un caz particular al teoremei dată de V. Volterra [8], pe o altă cale, pentru corpurile elastice multiplu-conexe tridimensionale.

О РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИИ ЭЙРИ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе изучается первая основная задача теории упругости в многосвязных областях, путем использования функции Эйри. Исходя из комплексного представления составляющих тензора

напряжений и вектора смещений и используя теорию функций комплексного переменного, автор получает различные результаты единым и относительно простым путем.

SUR LA SOLUTION, À L'AIDE DE LA FONCTION D'AIRY, DU PROBLÈME PLAN DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DANS LE CAS DES DOMAINES MULTIPLEMENT CONNEXES

RÉSUMÉ

L'auteur étudie le premier problème fondamental de la théorie de l'élasticité dans des domaines multiplement connexes, en utilisant la fonction d'Airy. Partant de la représentation complexe des composantes du tenseur de la tension et du vecteur du déplacement et en utilisant la théorie des fonctions d'une variable complexe, il obtient divers résultats d'une manière unitaire et relativement simple.

BIBLIOGRAFIE

1. AIRY G. B., *On the strains in the interior of beams.* Phil. Trans. **153**, 49 (1863).
2. FICHERA G., *Decomposizione al modo di Poincaré delle funzioni bi-iperarmoniche in due variabili.* Rend. della R. Acc. delle Scienze Fisiche e Matematiche della Società reale di Napoli, seria 4, **XI**, (1940—41).
3. GRIOLI G., *Struttura della funzione di Airy nei sistemi molteplicemente conessi.* Publ. dell'Istituto per le applicazioni del calcolo, **22**, *4*, (1948).
4. KIRCHOFF G. R., *Gesammelte Abhandlungen.* Leipzig, 1882.
5. MICHELL J. H., *Determination of stress in an elastic solid with applications to the theory of plates.* Proc. of. London Mathematical Soc., **31**, 100—124 (1899).
6. МУСХЕЛИШВИЛИ Н. И., *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1954.
7. PRAGER W., *On plane elastic strain in doubly connected domains.* Quaterly of applied mathematics, jan. (1946).
8. VOLTERRA V., *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes.* Ann. de l'Ecole Norm. Sup., seria 3, **XXIV**, 401—518 (1907).

FUNCȚII BOOLEENE ȘI FUNCȚII SHEFFER

DE

SERGIU RUDEANU

Funcțiile booleene au fost studiate, din diferite puncte de vedere, de mai mulți autori. În lucrarea de față ne propunem să aprofundăm însăși noțiunea de funcție booleeană și să folosim în mod sistematic acest concept ca un instrument de cercetare. Vom arăta că anumite rezultate (L. Löwenheim [2]) se demonstrează mai simplu, că se poate da o altă prezentare a unor chestiuni cunoscute (subalgebre booleene și algebre booleene libere) și vom obține de asemeni rezultate noi : determinarea tuturor funcțiilor Sheffer generalizate binare într-o algebră booleană.

§ 1. **Funcții booleene.** O funcție $f(x_1, \ldots, x_n)$, definită pe o algebră booleană B, este *booleană* dacă și numai dacă se obține prin suprapuneri ale funcțiilor $x \cup y$, xy, $\bar{x}$, cu ajutorul cărora se definește algebra booleană B (definițiile 1, 2 și 5 din [3]). Funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$ poate fi adusă la forma canonică disjunctivă (conjunctivă) și această proprietate caracterizează funcțiile booleene, după cum ne arată

PROPOZIȚIA 1. *Funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$, definită pe algebra booleană B, este booleană dacă și numai dacă se poate exprima în forma*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{1}$$

unde am pus $x^1 = x$, $x^0 = \bar{x}$, $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ sînt constante din B, iar indicii iau valorile 0,1 în toate modurile posibile.

Conform definiției 5 din [3], orice funcție de forma (1) este booleană. Invers, să presupunem că $f(x_1, \ldots, x_n)$ se obține prin m suprapuneri ([3],

definiția 2) ale funcțiilor $x \cup y$, xy, $\bar{x}$. Se arată imediat prin inducție în raport cu m și ținînd seama de formulele

$$\left.\begin{aligned}
&\bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \cup \bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} = \\
&\quad = \bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} (\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \cup \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \\
&\left(\bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\right)\left(\bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\right) = \\
&\quad = \bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \\
&\overline{\bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}} = \bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \bar{\lambda}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

că $f(x_1, \ldots, x_n)$ se reprezintă în forma (1).

Observația 1. Din relația (1) se deduce că

$$\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \quad (3)$$

Într-adevăr, este suficient ca în relația (1) să luăm

$$x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n.$$

O consecință a relației (3) este

Observația 2. Reprezentarea funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$ în forma (1) este unică.

DEFINIȚIA 1. Constantele $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se numesc *discriminanții* *) funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$.

COROLARUL 1. *O funcție booleană este unic determinată de mulțimea discriminanților ei.*

COROLARUL 2. *Există* $\mathfrak{m}^{2^n}$ *funcții booleene de n variabile definite pe B,* $\mathfrak{m}$ *fiind cardinalul mulțimii B.*

COROLARUL 3 (teorema de verificare a lui L. Löwenheim [2]). *Dacă m egalități sau inegalități* ($m < \infty$) *între anumite funcții booleene de variabilele* $x_1, \ldots, x_n$ *sînt satisfăcute oricare ar fi valorile* 0,1 *date variabilelor* $x_1, \ldots, x_n$, *atunci acele egalități sau inegalități sînt satisfăcute pentru orice valori date lui* $x_1, \ldots, x_n$.

*) Rolul acestor constante a fost pus în evidență de A. N. Whitehead în lucrarea [5]. Whitehead numește *discriminanți* coeficienții $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (*op. cit.*, p. 51).

Aceasta rezultă imediat din cele precedente și din faptul că un sistem finit de egalități sau inegalități între funcții booleene este echivalent cu o singură egalitate

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$ fiind booleană.

Multe rezultate din [2] pot fi demonstrate mai simplu prin aplicarea sistematică a teoremei de verificare.

PROPOZIȚIA 2. *Funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$, definită pe algebra booleană B, este booleană dacă și numai dacă se exprimă ca un polinom de $x_1, \ldots, x_n$ peste inelul boolean B.*

După cum se știe (v. de ex. Cap. X, § 3 din [1]) legătura între operațiile de inel și cele ale structurii de algebră booleană este dată de formulele

$$x + y = x\bar{y} \cup \bar{x}y$$
$$xy = xy$$
$$x \cup y = xy + x + y$$
$$\bar{x} = x + 1.$$

Rezultă de aici

$$\left.\begin{aligned} ax \cup b\bar{x} &= ax + b(x + 1) = (a + b)\,x + b \\ cx + d &= cx\,\bar{d} \cup (\bar{c} \cup \bar{x})\,d = (c\bar{d} \cup \bar{c}d)\,x \cup d\bar{x}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

deci propoziția 2 este adevărată pentru $n = 1$. Completarea demonstrației prin inducție în raport cu n este evidentă, dacă ținem seama de propoziția 1 și relațiile (2).

PROPOZIȚIA 3. *Fie $f(x, \ldots, z)$ o funcție de n variabile definită pe uniunea directă $B = \prod_{\iota \in I} B_\iota$ a unor algebre booleene B_ι.*

Funcția $f(x, \ldots, z)$ este booleană dacă și numai dacă se scrie în forma

$$f(x, \ldots, z) = (f_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota))_{\iota \in I}, \tag{5}$$

unde am notat $x = (x_\iota)_{\iota \in I}, \ldots, z = (z_\iota)_{\iota \in I}$ și pentru fiecare $\iota \in I$, $f_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota)$ este o funcție booleană definită pe B_ι (funcțiile f_ι depinzînd numai de funcția f).

Într-adevăr, dacă $f(x, \ldots, z)$ se scrie în forma (4), atunci propoziția 1 și definiția uniunii directe (v. de ex. p. viii din [1]) arată că avem

$$f(x, \ldots, z) = (f_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota))_{\iota \in I} = \left(\bigcup_{\alpha, \ldots, \gamma} \lambda^\iota_{\alpha \ldots \gamma} x^\alpha_\iota \ldots z^\gamma_\iota\right)_{\iota \in I} =$$

$$= \bigcup_{\alpha, \ldots, \gamma} (\lambda^\iota_{\alpha \ldots \gamma})_{\iota \in I} (x_\iota)^\alpha_{\iota \in I} \ldots (z_\iota)^\gamma_{\iota \in I} = \bigcup_{\alpha, \ldots, \gamma} \lambda_{\alpha \ldots \gamma} x^\alpha \ldots z^\gamma,$$

unde am pus

$$\lambda_{\alpha \ldots \gamma} = (\lambda^\iota_{\alpha \ldots \gamma})_{\iota \in I},$$

deci $f(x, \ldots, z)$ este o funcție booleană. Invers, dacă funcția $f(x, \ldots, z)$ este booleană, atunci

$$f(x, \ldots, z) = \bigcup_{\alpha, \ldots, \gamma} \lambda_{\alpha \ldots \gamma} x^{\alpha} \ldots z^{\gamma} = \bigcup_{\alpha, \ldots, \gamma} (\lambda^{\iota}_{\alpha \ldots \gamma})_{\iota \in I} (x_{\iota})^{\alpha}_{\iota \in I} \ldots (z_{\iota})^{\gamma}_{\iota \in I} =$$

$$= \left(\bigcup_{\alpha, \ldots, \gamma} \lambda^{\iota}_{\alpha \ldots \gamma} x^{\alpha}_{\iota} \ldots z^{\gamma}_{\iota} \right)_{\iota \in I} = (f_{\iota}(x_{\iota}, \ldots, z_{\iota}))_{\iota \in I}$$

și propoziția este complet demonstrată.

§ 2. **Funcții booleene în sens restrîns.** În lucrarea [3] am definit funcțiile *booleene în sens restrîns* ca fiind cele care se obțin prin suprapuneri în sens restrîns ale funcțiilor $x \cup y$, xy, $\bar{x}$ (definițiile 2′, 5′ din [3]). O definiție echivalentă este dată de

PROPOZIȚIA 4. *Funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$, definită pe algebra booleană B, este booleană în sens restrîns dacă și numai dacă se poate exprima în forma (1), unde $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ sînt 0 sau 1.*

Demonstrația se face ca pentru propoziția 1, ținîndu-se seama însă că $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, $\mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ sînt 0 sau 1 și că, prin urmare, $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \cup \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ și $\overline{\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}$ sînt de asemenea 0 sau 1.

COROLARUL 4. *Mulțimea $A_2 = \{0,1\}$ este singura algebră booleană în care noțiunea de funcție booleană coincide cu cea de funcție booleană în sens restrîns (și cu noțiunea de funcție definită pe B, conform teoremei 1 din [3]).*

COROLARUL 5. *Există 2^{2^n} funcții booleene în sens restrîns de n variabile.*

Propoziția următoare folosește la demonstrarea teoremei 2 din [3].

PROPOZIȚIA 5. *Funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$, definită pe algebra booleană B, este booleană în sens restrîns dacă și numai dacă se exprimă ca un polinom de $x_1, \ldots, x_n$ peste inelul boolean B, avînd toți coeficienții egali cu 0 sau 1.*

Ținînd seama de propoziția 4, se vede că demonstrația se poate face ca pentru propoziția 2, cu anumite completări. Dacă a, b, c, d din formulele (4) sînt 0 sau 1, atunci și $a + b$, b, $c\bar{d} \cup \bar{c}d$, d sînt 0 sau 1, deci propoziția 5 este adevărată pentru $n = 1$. Formulele (2) și (4) mai arată că demonstrația se poate completa prin inducție în raport cu n.

Funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$ din propoziția 2 este definită pe algebra booleană B, al cărei prim și ultim element l-am notat cu 0, respectiv 1, iar operațiile de bază cu $x \cup y$, xy, $\bar{x}$. Fie B' o altă algebră booleană, definită de operațiile $x \vee y$, $x \bigstar y$, $\tilde{x}$ și să notăm cu $0'$, $1'$ primul, respectiv ultimul element din B'. Funcția

$$f'(y_1, \ldots, y_n) = \bigvee_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \lambda'_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \bigstar y_1^{\alpha_1} \bigstar \ldots \bigstar y_n^{\alpha_n} \qquad (1')$$

(unde $\lambda'_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ este $0'$ sau $1'$ după cum $\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ este 0 sau 1, iar $y^1 = y$, $y^0 = \bar{y}$) este o funcție booleană în sens restrîns, definită pe B'. Aplicația care face ca funcției (1) să-i corespundă funcția (1′) stabilește o corespondență biunivocă între mulțimea funcțiilor booleene în sens restrîns definite pe B și mulțimea funcțiilor booleene în sens restrîns definite pe B'. Această corespondență are proprietatea că dacă $B = B'$, $x \cup y = x \vee y$, $xy = x \bigstar y$, $\bar{x} = \tilde{x}$, atunci $f(x_1, \dots, x_n) = f'(x_1, \dots, x_n)$. Rezultă de aici

PROPOZIȚIA 6. *O funcție booleană în sens restrîns este definită pe orice algebră booleană (dacă facem convenția de a identifica funcția (1) cu (1′)).*

Vom demonstra acum

PROPOZIȚIA 7. *Fie $f(x, \dots, z)$ o funcție de n variabile, definită pe uniunea directă $B = \prod_{\iota \in I} B_\iota$. Funcția $f(x, \dots, z)$ este booleană în sens restrîns dacă și numai dacă se scrie în forma*

$$f(x, \dots, z) = (g(x_\iota, \dots, z_\iota))_{\iota \in I}, \tag{6}$$

unde am notat $x = (x_\iota)_{\iota \in I}, \dots, z = (z_\iota)_{\iota \in I}$, iar $g(u, \dots, w)$ este o funcție booleană în sens restrîns (depinzînd numai de funcția f).

Conform propoziției 4, funcția $g(u, \dots, w)$ se scrie

$$g(u, \dots, w) = \bigcup_{\alpha, \dots, \gamma}{}' u^\alpha \dots w^\gamma,$$

unde $\bigcup'_{\alpha, \dots, \gamma}$ arată că în această reuniune vectorul $(\alpha, \dots, \gamma)$ parcurge numai o parte M a produsului cartezian $\{0,1\}^n$. Rezultă de aici că funcția

$$(g(x_\iota, \dots, z_\iota))_{\iota \in I} = \left(\bigcup_{\alpha, \dots, \gamma}{}' x_\iota^\alpha \dots z_\iota^\gamma\right)_{\iota \in I} =$$

$$= \bigcup_{\alpha, \dots, \gamma}{}' (x_\iota)_{\iota \in I}^\alpha \dots (z_\iota)_{\iota \in I}^\gamma = \bigcup_{\alpha, \dots, \gamma}{}' x^\alpha \dots z^\gamma$$

este booleană în sens restrîns. Invers, dacă funcția $f(x, \dots, z)$ este booleană în sens restrîns, ea se scrie

$$f(x, \dots, z) = \bigcup_{\alpha, \dots, \gamma}{}' x^\alpha \dots z^\gamma = \bigcup_{\alpha, \dots, \gamma}{}' (x_\iota)_{\iota \in I}^\alpha \dots (z_\iota)_{\iota \in I}^\gamma =$$

$$= \left(\bigcup_{\alpha, \dots, \gamma}{}' x_\iota^\alpha \dots z_\iota^\gamma\right)_{\iota \in I},$$

ceea ce completează demonstrația.

PROPOZIȚIA 8. *Fie $f(x_1, \dots, x_n)$ o funcție booleană definită pe algebra booleană B. Există m constante $a_1, \dots, a_m \in B$, cu $0 \leqslant m \leqslant 2^n$ și o*

funcție booleană în sens restrîns $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, *astfel încît să avem*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m). \tag{7}$$

Într-adevăr, formula (1) se mai scrie

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigcup_{\beta_1, \ldots, \beta_n}^{\star} \lambda_{\beta_1 \ldots \beta_n} x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} \cup g(x_1, \ldots, x_n), \tag{8}$$

unde $\bigcup_{\beta_1, \ldots, \beta_n}^{\star}$ înseamnă reuniunea după toate sistemele de valori $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ pentru care $0 \neq \lambda_{\beta_1 \ldots \beta_n} \neq 1$, iar $g(x_1, \ldots, x_n)$ este o funcție booleană în sens restrîns. Există m constante $\lambda_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ (deci $0 \leqslant m \leqslant 2^n$), pe care, printr-o schimbare de notație, le vom numi $a_1, \ldots, a_m$. Relația (8) se scrie atunci

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigcup_{i=1}^{m} a_i x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} \cup g(x_1, \ldots, x_n),$$

deci propoziția 8 este demonstrată, dacă punem

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = \bigcup_{i=1}^{m} y_i x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} \cup g(x_1, \ldots, x_n).$$

§ 3. **Subalgebre booleene și algebre booleene libere.** Aceste noțiuni, ca și aceea de subalgebră booleană, generată de o mulțime de elemente, se definesc prin particularizarea în cazul algebrelor booleene a noțiunilor generale corespunzătoare (v. de ex. p. vii-viii din [1]).

Din propoziția 1 rezultă imediat

PROPOZIȚIA 9. *Fie* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *o funcție booleană definită pe* B, *iar* A *o subalgebră booleană a lui* B, *conținînd discriminanții funcției* $f(x_1, \ldots, x_n)$ (*v. definiția* 1). *Atunci restricția funcției* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *la* A *există și este o funcție booleană definită pe* A.

DEFINIȚIA 2. Dacă $f(x_1, \ldots, x_n)$ este o funcție definită pe mulțimea $M \subseteq M'$, se numește *extensie* a funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$ la mulțimea M', o funcție $g(x_1, \ldots, x_n)$, definită pe M', astfel ca restricția funcției $g(x_1, \ldots, x_n)$ la M să fie $f(x_1, \ldots, x_n)$, adică $g|M = f$.

Ținînd seama de observația 2, deducem reciproca propoziției precedente :

PROPOZIȚIA 10. *Dacă* A *este o subalgebră booleană a algebrei booleene* B *și* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *este o funcție booleană definită pe* A *de formula* (*1*), *în care* $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \in A$ *pentru orice* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, *atunci extensia funcției* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *la* B *există și este o funcție booleană unic determinată de relația* (*1*).

Vrem să arătăm acum modul în care atît subalgebra booleană generată de o mulțime oarecare de elemente, cît și algebra booleană liberă cu n generatori pot fi construite cu ajutorul noțiunii de funcție booleană în sens restrîns.

PROPOZIȚIA 11. *Elementul a al algebrei booleene B aparține subalgebrei booleene generate de constantele $a_1, \ldots, a_n \in B$ dacă și numai dacă*

$$a = f(a_1, \ldots, a_n) \tag{9}$$

unde $f(x_1, \ldots, x_n)$ este o funcție booleană în sens restrîns (depinzînd de a).

Fie A_0 mulțimea elementelor avînd proprietatea de enunț și A_1 subalgebra booleană generată de $a_1, \ldots, a_n$. Dacă $a, b \in A_0$, atunci

$$\left.\begin{aligned} a &= \bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}, \\ b &= \bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

unde $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}, \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ sînt 0 sau 1. Ținînd seama de formulele (2), rezultă că A_0 este o subalgebră booleană a lui B și că A_0 conține pe $a_1, \ldots, a_n$. Însă A_1 este cea mai mică subalgebră booleană a lui B care conține pe $a_1, \ldots, a_n$, deci $A_1 \subseteq A_0$. Prima formulă (7) arată că dacă $a \in A_0$, atunci $a \in A_1$, deci $A_0 \subseteq A_1$, ceea ce completează demonstrația.

Din propoziția 11 și corolarul 5 se deduce imediat.

COROLARUL 6. *Subalgebra booleană generată de un număr finit de elemente ale unei algebre booleene B este finită.*

Propoziția 11 poate fi generalizată după cum urmează.

PROPOZIȚIA 12. *Elementul a al algebrei booleene B aparține subalgebrei booleene generate de mulțimea $A = \{a_\iota\}_{\iota \in I} \subseteq B$ dacă și numai dacă există $a_1, \ldots, a_n \in A$ astfel ca*

$$a = f(a_1, \ldots, a_n), \tag{9}$$

unde $f(x_1, \ldots, x_n)$ este o funcție booleană în sens restrîns (depinzînd de a).

Fie A_0 mulțimea elementelor avînd proprietatea din enunț și A_1 subalgebra booleană generată de A. Dacă $a, b \in A_0$ atunci

$$a = \bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} \rho_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} a_{i_1}^{\alpha_1} \ldots a_{i_p}^{\alpha_p},$$

$$b = \bigcup_{\beta_1, \ldots, \beta_q} \sigma_{\beta_1 \ldots \beta_q} b_{j_1}^{\beta_1} \ldots b_{j_q}^{\beta_q},$$

unde $a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}, b_{j_1}, \ldots, b_{j_q} \in A$. Aceste egalităţi se mai scriu

$$a = \bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} \rho_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} a_{i_1}^{\alpha_1} \ldots a_{i_p}^{\alpha_p} (b_{j_1} \cup \bar{b}_{j_1}) \ldots (b_{j_q} \cup \bar{b}_{j_q}),$$

$$b = \bigcup_{\beta_1, \ldots, \beta_q} \sigma_{\beta_1 \ldots \beta_q} b_{j_1}^{\beta_1} \ldots b_{j_q}^{\beta_q} (a_{i_1} \cup \bar{a}_{i_1}) \ldots (a_{i_p} \cup \bar{a}_{i_p}),$$

de unde rezultă că a şi b se reprezintă în forma (10). Restul demonstraţiei se face ca pentru propoziţia 11, înlocuind însă cuvintele „A_0 conţine pe $a_1, \ldots, a_n$" cu relaţia $A \subseteq A_0$.

PROPOZIŢIA 13. *Mulţimea funcţiilor booleene în sens restrîns de n variabile formează o algebră booleană izomorfă cu algebra booleană liberă cu n generatori.*

Propoziţia 4 şi formulele (2) ne permit să verificăm că mulţimea F_n a funcţiilor booleene în sens restrîns de n variabile devine o algebră booleană, dacă definim operaţiile ei prin formulele

$$\left.\begin{aligned} (f \cup g)(x_1, \ldots, x_n) &= f(x_1, \ldots, x_n) \cup g(x_1, \ldots, x_n), \\ (fg)(x_1, \ldots, x_n) &= f(x_1, \ldots, x_n)\, g(x_1, \ldots, x_n), \\ \bar{f}(x_1, \ldots, x_n) &= \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Să considerăm în particular funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F_n$ definite prin relaţiile

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1, f_2(x_1, \ldots, x_n) = x_2, \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n) = x_n.$$

Vrem să arătăm că F_n este algebra booleană liberă generată de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Pentru aceasta trebuie să arătăm că orice aplicaţie φ a mulţimii $\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq F_n$ într-o algebră booleană B, poate fi extinsă la un omomorfism al lui F_n în B ([1], p. viii). Fie într-adevăr

$$\varphi(f_i) = a_i \in B \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

şi să punem

$$\Phi(f) = f(a_1, \ldots, a_n),$$

ceea ce are sens, conform poziţiei 6. Din formulele (11) se deduce că Φ este un omomorfism. Pentru orice i cu $1 \leqslant i \leqslant n$, avem

$$\Phi(f_i) = f_i(a_1, \ldots, a_n) = a_i = \varphi(f_i).$$

§ 4. **Funcţii Sheffer generalizate.** O funcţie $f(x_1, \ldots, x_n)$ booleană în sens restrîns este *funcţie Sheffer* a algebrei booleene B, dacă funcţiile $x \cup y$, xy, $\bar{x}$ se obţin prin suprapuneri ale funcţiei $f(x_1, \ldots, x_n)$ (defi-

nița 6 din [3]). În lucrarea [3] am arătat că, oricare ar fi B, singurele funcții Sheffer binare ale algebrei booleene B sînt

$$\left.\begin{aligned} x\,\mathbf{T}_1\,y &= \bar{x}\bar{y},\\ x\,\mathbf{T}_2\,y &= \bar{x}\cup\bar{y},\\ x\,\mathbf{T}_3\,y &= x\bar{y},\\ x\,\mathbf{T}_4\,y &= \bar{x}\cup y,\\ x\,\mathbf{T}_5\,y &= \bar{x}y,\\ x\,\mathbf{T}_6\,y &= x\cup\bar{y}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Funcțiile $\mathbf{T}_1$ și $\mathbf{T}_2$ sînt chiar cele descoperite de Sheffer, iar importanța lor este binecunoscută. Noțiunea de „funcție Sheffer" citată mai sus, înglobează funcțiile $\mathbf{T}_1$ și $\mathbf{T}_2$; cu toate acestea, ea nu constituie o generalizare firească a funcțiilor $\mathbf{T}_1$ și $\mathbf{T}_2$, datorită condiției restrictive ca funcția Sheffer să fie booleană în sens restrîns. De aceea, considerăm că studiul întreprins în ([3], § 2) este incomplet și ne propunem ca în cele ce urmează să completăm această lacună.

DEFINIȚIA 3. Funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$, definită pe algebra booleană B, este *funcție Sheffer generalizată* a lui B, dacă și numai dacă $f(x_1, \ldots, x_n)$ este funcție booleană și funcțiile $x\cup y$, xy, $\bar{x}$ se obțin prin suprapuneri ale funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$.

COROLARUL 7. *Funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$ este funcție Sheffer generalizată a algebrei booleene B, dacă și numai dacă $f(x_1, \ldots, x_n)$ generează o algebră echivalentă cu structura de algebră booleană a lui B* (definițiile 3, 4, din [3]).

În cele ce urmează ne propunem să determinăm toate funcțiile Sheffer generalizate binare ale unei algebre booleene.

LEMA 1. *Dacă funcția $f(x_1, \ldots, x_k)$ se obține prin suprapuneri ale funcției $g(x_1, \ldots, x_l)$ iar funcția $h(x_1, \ldots, x_m)$ se obține prin p suprapuneri ale funcției $f(x_1, \ldots, x_k)$, atunci $h(x_1, \ldots, x_m)$ se obține prin suprapuneri ale funcției $g(x_1, \ldots, x_l)$.*

Demonstrația se face imediat prin inducție în raport cu p. Rezultă de aici și din definiția 1

COROLARUL 8. *Dacă funcția Sheffer generalizată $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a algebrei booleene B, se obține prin suprapuneri ale funcției booleene $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, definite pe B, atunci $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ este o funcție Sheffer generalizată a lui B.*

LEMA 2. *Dacă funcția $f(x_1, \ldots, x_k)$, definită pe algebra booleană B, se obține prin suprapuneri ale funcției booleene $g(x_1, \ldots, x_l)$, definite pe B, atunci $f(x_1, \ldots, x_k)$ este o funcție booleană.*

Într-adevăr, conform lemei 1, funcția $f(x_1, \ldots, x_k)$ se obține prin p suprapuneri ale funcției $x\,\mathbf{T}_1\,y$. De aici rezultă prin inducție în raport cu p, ținînd seama de propoziția 1 și de formulele (2), că $f(x_1, \ldots, x_k)$ este o funcție booleană.

LEMA 3. *Fie* $f(x, \ldots, z)$, $g(x, \ldots, z)$ *două funcții booleene de* n *variabile, definite pe uniunea directă* $B = \prod_{\iota \in I} B_\iota$ *a unor algebre booleene* B_ι. *Conform propoziției 3, avem*

$$f(x, \ldots, z) = (f_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota))_{\iota \in I},$$
$$g(x, \ldots, z) = (g_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota))_{\iota \in I},$$

funcțiile booleene $f_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota)$, $g_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota)$ *fiind definite pe* B_ι. *Dacă* $f(x, \ldots, z)$ *se obține prin* p *suprapuneri ale funcției* $g(x, \ldots, z)$, *atunci, pentru orice* $\iota \in I$, $f_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota)$ *se obține prin* p *suprapuneri ale funcției* $g_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota)$.

Demonstrația se bazează pe definiția 2 din [3]. Dacă $p = 0$, atunci sau $f(x, \ldots, z)$ este constantă, sau $n = 1$ și $f(x) = x$. În ambele cazuri, lema se verifică. Dacă $p = 1$, atunci

$$f(x, \ldots, z) = g(\xi, \ldots, \zeta),$$

unde ξ este sau x sau o constantă, ..., ζ este sau z sau o constantă. Rezultă că oricare ar fi $\iota \in I$, avem

$$f_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota) = g_\iota(\xi_\iota, \ldots, \zeta_\iota),$$

unde ξ_ι este sau x_ι sau o constantă din B_ι, ..., ζ_ι este sau z_ι sau o constantă din B_ι; deci lema se verifică.

Presupunem lema adevărată pentru orice $p' < p$ și să o demonstrăm pentru p. Dacă $f(x, \ldots, z)$ se obține prin p suprapuneri ale funcției $g(x, \ldots, z)$, atunci

$$f(x, \ldots, z) = g(\varphi(x, \ldots, z), \ldots, \psi(x, \ldots, z))$$

sau, ceea ce este tot una,

$$f_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota) = g_\iota((\varphi(x, \ldots, z))_\iota, \ldots, (\psi(x, \ldots, z))_\iota) \quad (\forall \iota \in I), \qquad (13)$$

unde $\varphi(x, \ldots, z)$ se obține prin p_1 suprapuneri ale funcției booleene $g(x, \ldots, z)$, ..., $\psi(x, \ldots, z)$ se obține prin p_n suprapuneri ale funcției booleene $g(x, \ldots, z)$. Funcțiile φ, ψ sînt booleene, conform lemei 2; propoziția 3 arată că avem

$$\varphi(x, \ldots, z) = (\varphi_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota))_{\iota \in I},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi(x, \ldots, z) = (\psi_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota))_{\iota \in I},$$

unde $\varphi_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota)$, ..., $\psi_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota)$ sînt funcții booleene definite pe B_ι. Pe de altă parte, $f(x, \ldots, z)$ se obține prin exact p suprapuneri ale funcției $g(x, \ldots, z)$, deci $\sum_{i=1}^{n} p_i = p - 1$, deci $p_i < p$ $(i = 1, \ldots, n)$. Conform ipotezei de inducție, rezultă că

$$\varphi_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota) = (\varphi(x, \ldots, z))_\iota$$

se obține prin p_1 suprapuneri ale funcției $g_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota), \ldots$, și

$$\psi_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota) = (\psi(x_\iota, \ldots, z_\iota))_\iota$$

se obține prin p_n suprapuneri ale funcției $g_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota)$. De aici și din formulele (13) rezultă că $f_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota)$ se obține prin p suprapuneri ale funcției $g_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota)$.

COROLARUL 9. *Dacă* $B = \coprod_{\iota \in I} B_\iota$ *este uniunea directă a unor algebre booleene* B_ι *și*

$$f(x, \ldots, z) = (f_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota))_{\iota \in I} \tag{5}$$

este o funcție Sheffer generalizată a lui B, *atunci, oricare ar fi* $\iota \in I$, $f_\iota(x_\iota, \ldots, z_\iota)$ *este o funcție Sheffer generalizată a algebrei booleene* B_ι.

LEMA 4. *Fie* $B = \coprod_{\iota \in I} B_\iota$ *uniunea directă a unor algebre booleene* B_ι *și să considerăm o funcție de forma*

$$x \Delta y = (x_\iota \Delta_\iota y_\iota)_{\iota \in I},$$

unde Δ_ι *este sau* $\mathbf{T}_4$ *sau* $\mathbf{T}_5$ *din formulele* (12). *Rezultă că* $x \Delta y$ *este o funcție Sheffer generalizată a algebrei booleene* B.

Funcția $x \Delta y$ este booleană, conform propoziției 3. Pe de altă parte, un calcul ușor arată că

$$\left.\begin{aligned} \{1\, \mathbf{T}_4\, [(0\, \mathbf{T}_4\, y)\, \mathbf{T}_4\, x]\}\, \mathbf{T}_4\, \{[x\, \mathbf{T}_4\, (y\, \mathbf{T}_4\, 0)]\, \mathbf{T}_4\, 0\} &= x\, \mathbf{T}_4\, y, \\ \{0\, \mathbf{T}_5\, [(0\, \mathbf{T}_5\, y)\, \mathbf{T}_5\, x]\}\, \mathbf{T}_5\, \{[x\, \mathbf{T}_5\, (y\, \mathbf{T}_5\, 0)]\, \mathbf{T}_5\, 1\} &= x\, \mathbf{T}_4\, y, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

deci, oricare ar fi $\iota \in I$, există patru constante $\alpha_\iota, \beta_\iota, \gamma_\iota, \delta_\iota \in B_\iota$, astfel încît

$$\{\alpha_\iota \Delta_\iota [(\beta_\iota \Delta_\iota y_\iota) \Delta_\iota x_\iota]\} \Delta_\iota \{[x_\iota \Delta_\iota (y_\iota \Delta_\iota \gamma_\iota)] \Delta_\iota \delta_\iota\} = x_\iota\, \mathbf{T}_4\, y_\iota.$$

Aceasta înseamnă că

$$\{\alpha \Delta [(\beta \Delta y)\ \Delta x]\} \Delta \{[x \Delta (y \Delta \gamma)] \Delta \delta\} = x\, \mathbf{T}_4\, y,$$

unde am pus

$$\alpha = (\alpha_\iota)_{\iota \in I},\ \beta = (\beta_\iota)_{\iota \in I},\ \gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I},\ \delta = (\delta_\iota)_{\iota \in I}.$$

Am arătat astfel că funcția Sheffer $x\, \mathbf{T}_4\, y$ se obține prin suprapuneri ale funcției booleene $x \Delta y$; aplicînd corolarul 8, deducem că $x \Delta y$ este o funcție Sheffer generalizată a algebrei booleene B.

LEMA 5. *Fie* $B = \coprod_{\iota \in I} B_\iota$ *uniunea directă a unor algebre booleene* B_ι *și să considerăm o funcție de forma*

$$x\, \mathbf{T}\, y = (x_\iota \nabla_\iota y_\iota)_{\iota \in I}, \tag{15}$$

unde, pentru fiecare $\iota \in I$, ∇_ι *este una din funcțiile* $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$, *date de formulele* (12). *Rezultă că* $x\, \mathbf{T}\, y$ *este o funcție Sheffer generalizată a algebrei booleene* B.

Funcția $x \mathbf{T} y$ este booleană, conform propoziției 3. Pe de altă parte, se constată fără greutate că

$$\left.\begin{aligned} \{1\,\mathbf{T}_1\,[(1\,\mathbf{T}_1\,y)\,\mathbf{T}_1\,x]\}\,\mathbf{T}_1\,\{[x\,\mathbf{T}_1\,(y\,\mathbf{T}_1\,0)]\,\mathbf{T}_1\,0\} &= x\,\mathbf{T}_5\,y,\\ \{0\,\mathbf{T}_2\,[(0\,\mathbf{T}_2\,y)\,\mathbf{T}_2\,x]\}\,\mathbf{T}_2\,\{[x\,\mathbf{T}_2\,(y\,\mathbf{T}_2\,1)]\,\mathbf{T}_2\,1\} &= x\,\mathbf{T}_4\,y,\\ \{1\,\mathbf{T}_3\,[(0\,\mathbf{T}_3\,y)\,\mathbf{T}_3\,x]\}\,\mathbf{T}_3\,\{[x\,\mathbf{T}_3\,(y\,\mathbf{T}_3\,0)]\,\mathbf{T}_3\,0\} &= x\,\mathbf{T}_4\,y,\\ \{0\,\mathbf{T}_6\,[(1\,\mathbf{T}_6\,y)\,\mathbf{T}_6\,x]\}\,\mathbf{T}_6\,\{[x\,\mathbf{T}_6\,(y\,\mathbf{T}_6\,1)]\,\mathbf{T}_6\,1\} &= x\,\mathbf{T}_5\,y. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Ținînd seama de relațiile (14), (16) și raționînd ca în lema 4, deducem că există $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, astfel încît

$$\{\alpha\,\mathbf{T}\,[(\beta\,\mathbf{T}\,y)\,\mathbf{T}\,x]\}\,\mathbf{T}\,\{[x\,\mathbf{T}\,(y\,\mathbf{T}\,\gamma)]\,\mathbf{T}\,\delta\} = x\Delta y = (x_\iota \Delta_\iota y_\iota)_{\iota\in I},$$

unde Δ_ι este sau $\mathbf{T}_4$ sau $\mathbf{T}_5$. Conform lemei 4, $x\Delta y$ este o funcție Sheffer generalizată, deci, aplicînd corolarul 8, deducem că $x \mathbf{T} y$ este o funcție Sheffer generalizată.

TEOREMA 1. *Fie B o uniune directă de algebre booleene $A_2 = \{0,1\}$ cu două elemente ($B = \prod_{\iota\in I} B_\iota$, unde $\forall \iota \in I$, $B_\iota = A_2$). Singurele funcții Sheffer generalizate binare definite pe B sînt cele de forma (15) unde, $\forall \iota \in I$, $\exists i$, cu $1 \leqslant i \leqslant 6$, astfel ca $\nabla_\iota = \mathbf{T}_i$, funcțiile $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$ fiind date de formulele (12).*

Într-adevăr, funcțiile de această formă sînt funcții Sheffer generalizate, conform lemei 5. Reciproca se demonstrează cu ajutorul corolarului 9, care arată că orice funcție Sheffer generalizată binară se scrie în forma (15) unde, pentru fiecare $\iota \in I$, ∇_ι este o funcție Sheffer generalizată a algebrei booleene A_2. Însă din corolarul 4 se deduce că în algebra booleană A_2, noțiunile de funcție Sheffer și funcție Sheffer generalizată coincid. Deci ∇_ι este chiar o funcție Sheffer, adică (teorema 2 din [3]) este una din funcțiile $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$, definite de formulele (12).

COROLARUL 10. *Dacă A este o algebră booleană finită, mulțimea tuturor funcțiilor Sheffer generalizate binare ale lui A se construiește reprezentînd pe A ca o uniune directă de algebre booleene A_2* (teoremele 12 și 53 din [5]) *și formînd toate funcțiile de forma (15), cu $\nabla_\iota = \mathbf{T}_i$ ($1 \leqslant i \leqslant 6$).*

PROPOZIȚIA 14. *Dacă $f(x_1, \ldots, x_n)$ este o funcție Sheffer generalizată a algebrei booleene B, atunci există o subalgebră booleană finită A a lui B, cu proprietatea că restricția funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$ la A există și este o funcție Sheffer generalizată a lui A.*

Să notăm cu (★) identitățile care exprimă funcțiile $x \cup y$, xy, $\bar{x}$ ca suprapuneri ale funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$. Fie A subalgebra booleană generată de toate constantele care intervin în relațiile (★) și de discriminații funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$ (v. definiția 1). Aplicînd corolarul 6 și propoziția 9, deducem că subalgebra booleană A este finită, iar restricția funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$ există și este o funcție booleană definită pe A. Identitățile (★) au sens și sînt adevărate în subalgebra booleană A, ceea ce completează demonstrația.

PROPOZIȚIA 15. *Dacă A este o subalgebră booleană a algebrei booleene B, iar $f(x_1, \ldots, x_n)$ este o funcție Sheffer generalizată a lui A,*

atunci extensia funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$ *la algebra booleană* B (*v. definiția 2*) *există, este unic determinată și este o funcție Sheffer generalizată a lui* B.

Existența și unicitatea extensiei funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$ la întreaga algebră booleană B rezultă din propoziția 10. În subalgebra booleană A au loc trei identități care exprimă funcțiile $x \cup y$, xy, $\bar{x}$ ca suprapuneri ale funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$. Aceste identități rămîn adevărate și în algebra booleană B, ceea ce completează demonstrația.

Din corolarul 10 și propozițiile 14, 15, se deduce imediat

TEOREMA 2. *Mulțimea funcțiilor Sheffer generalizate binare ale unei algebre booleene* B *oarecare este*

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{A \subset B} \mathfrak{S}_A, \tag{17}$$

unde $\mathfrak{S}_A$ *este mulțimea extensiilor la* B *a tuturor funcțiilor Sheffer generalizate binare ale subalgebrei booleene finite* A *a lui* B, *iar reuniunea se face cînd* A *parcurge mulțimea tuturor subalgebrelor booleene finite ale lui* B. *Procedeul de construcție al mulțimii* $\mathfrak{S}_A$ *este dat de corolarul 10.*

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ ШЕФФЕРА

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе автор продолжает исследования из [3]; цель работы углубить изучение понятия булевой функции. Определенная на булевой алгебре B функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ тогда, и лишь тогда является *булевой*, когда она представима в виде (1), где $\lambda_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; если при этом $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ или 1, то $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *булевой функцией в узком смысле.*

Автор приводит несколько элементарных свойств булевых функций и булевых функций в узком смысле, а затем использует эти понятия в качестве орудия исследования. Показывается, что некоторые результаты Л. Левенгейма могут быть доказаны проще (см. следствие 3), что можно дать другую трактовку известным вопросам (см. например § 3; булевы подалгебры и свободные булевы алгебры).

В качестве последнего приложения автор изучает обобщенные функции Шеффера. Булева функция $f(x_1, \ldots x_n)$, определенная на булевой алгебре B, называется *обобщенной функцией Шеффера* алгебры B, если функции $x \cup y$, xy, $\bar{x}$ получаются путем суперпозиции функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Если при этом $f(x_1, \ldots, x_n)$ является булевой в узком смысле, до она называется *функцией Шеффера* алгебры B. Единственные бинарные функции Шеффера это $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$ [3].

Возникает задача определения всех бинарных обобщенных функций Шеффера булевой алгебры B. В случае когда B является прямым объединением двухэлементных булевых алгебр A_2 — в частности, когда B *конечно* — единственные бинарные обобщенные

функции Шеффера это те, которые имеют вид (15), и определены в теореме 1. Теорема 2 показывает, что в общем случае задача сводится к определению всех бинарных обобщенных функций Шеффера конечных булевых подалгебр алгебры B.

FONCTIONS BOOLÉENNES ET FONCTIONS DE SHEFFER

RÉSUMÉ

Ce travail continue les recherches publiées dans [3] et l'auteur se propose d'approfondir la notion de fonction booléenne. Une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$, définie sur une algèbre booléenne B, est *booléenne* si et seulement si elle est représentée sous la forme (1), où $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Si en outre $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ ou 1, on dit que $f(x_1, \ldots, x_n)$ est une *fonction booléenne au sens restreint.*

L'auteur indique quelques propriétés élémentaires des fonctions booléennes et booléennes au sens restreint, et il utilise ensuite ces notions comme instrument de recherches. Il montre que certains résultats de L. Löwenheim peuvent être démontrés plus simplement (cf. le corollaire 3) et que l'on peut présenter autrement des questions connues (par exemple, § 3 : sous-algèbres booléennes et algèbres booléenes libres).

Comme dernière application, l'auteur étudie les fonctions de Sheffer généralisées. Une fonction booléenne $f(x_1, \ldots, x_n)$, définie sur une algèbre booléene B, est une *fonction de Sheffer généralisée* de B si les fonctions $x \cup y$, xy, $\bar{x}$ s'obtiennent par des superpositions de la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$. Si, en outre, la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ est booléenne au sens restreint, celle-ci est une *fonction de Sheffer* de B. Les seules fonctions de Sheffer binaires (de deux variables) sont $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$ [3].

L'auteur pose le problème de la détermination de toutes les fonctions de Sheffer généralisées binaires d'une algèbre booléenne B. Lorsque B est une union directe d'algèbres booléennes A_2 à deux éléments — plus particulièrement si B est *finie* — les seules fonctions de Sheffer généralisées binaires sont celles de la forme (15), définies dans le théorème 1. Le théorème 2 montre que dans le cas général le problème se réduit à la détermination de toutes les fonctions de Sheffer généralisées binaires appartenant aux sous-algèbres booléennes finies de B.

BIBLIOGRAFIE

1. BIRKHOFF G., *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., **XXV**, New York, 1948.
2. LÖWENHEIM L., *Über die Auflösung von Gleichungen im logischen Gebietkalkül.* Math. Ann., **68**, 169—207 (1910).
3. RUDEANU S., *Об определении булевых алгебр при помощи бинарных операции.* Rev. Math. pures et appl. Acad. R.P.R., *6*, 171 — 183 (1961).
4. STONE M. H., *The theory of representation for Boolean algebras.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **21**, 103—105 (1935).
5. WHITEHEAD A. N., *A Treatise on Universal Algebra with Applications.* Cambridge, 1898.

PRODUSE DE SPAȚII METRICE STATISTICE

DE

V. ISTRĂȚESCU și I. VĂDUVA

1. *Introducere.* Spațiile metrice statistice, așa cum au fost definite de K. Menger [1], reprezintă o generalizare a noțiunii de spațiu metric în sens clasic. Pentru claritatea expunerii vom reaminti cîteva definiții și rezultate [3].

DEFINIȚIA 1.1. *Un spațiu metric statistic* $[MS]$ *este o pereche ordonată* $(S, \mathcal{F})$, unde S este o mulțime ale cărei elemente le vom numi puncte, iar $\mathcal{F}$ este o familie de funcții de repartiție astfel încît la orice $(p, q) \in S \times S$ corespunde o funcție de repartiție $F_{pq} \in \mathcal{F}$, cu următoarele proprietăți :

I. $F_{pq}(x) = 1$, pentru orice $x > 0$, dacă și numai dacă $p = q$.

II. $F_{pq}(0) = 0$

III. $F_{pq} = F_{qp}$

IV. Dacă $F_{pq}(x) = 1$ și $F_{qr}(y) = 1$ atunci $F_{pr}(x + y) = 1$ pentru orice $x, y \geqslant 0$ și orice $p, q, r \in S$.

O interpretare a acestei noțiuni [3] se obține considerînd S drept o mulțime de obiecte de măsurat, ale căror dimensiuni au un caracter aleator.

Axioma IV corespunde axiomei triunghiului în cazul spațiilor metrice obișnuite; dacă ea este satisfăcută pentru orice triplet p, q, r de puncte distincte sau nu, din S, spunem că se menține ca aplicație universală (se menține universal).

DEFINIȚIA 1.2. *Vom numi normă triunghiulară (normă* T*), o funcție definită pe pătratul* $[0,1] \times [0,1]$ *care are proprietățile* :

$\alpha)$ $T(a, 1) = a, \quad T(0, 0) = 0$

$\beta)$ $T(c, d) \geqslant T(a, b)$ dacă $c \geqslant a, \ d \geqslant b$

$\gamma)$ $T(a, b) = T(b, a)$

$\delta)$ $T[T(a, b), c] = T[a, T(b, c)]$.

DEFINIȚIA 1.2'. *Vom spune că norma T este mai puternică decît norma T' și vom scrie $T \geqslant T'$, dacă pentru orice $(a, b) \in [0, 1] \times [0,1]$ are loc relația $T(a, b) \geqslant T(a', b')$, inegalitatea avînd loc pentru cel puțin o pereche (a, b).*

Vom spune că relația

$F_{pr}(x + y) \geqslant T[F_{pq}(x), F_{qr}(y)]$ pentru orice $x, y \geqslant 0$ (IV M) este inegalitatea triunghiului în sensul lui Menger *).

DEFINIȚIA 1.3. *Un spațiu $[MS]$ în care (IV M) se menține universal, relativ la un T dat, se numește spațiu Menger.*

Următoarea inegalitate a triunghiului

$$F_{pr}(x) \geqslant [F_{pq} \perp F_{qr}](x) \qquad \text{(IV } W\text{)}$$

se datorește lui A. Wald.

DEFINIȚIA 1.4. *Un spațiu $[MS]$ în care (IV W) se menține universal se numește spațiu Wald.*

Observații. Axioma I ne permite să definim două puncte distincte (două puncte care nu sînt identice), iar proprietatea δ) a normei T și proprietățile compoziției ne permit să stabilim inegalități poligonale.

În studiul spațiilor $[MS]$ joacă un rol deosebit funcțiile de repartiție de forma

$$\varepsilon_a = \begin{cases} 0 & x \leqslant a \\ 1 & x > a. \end{cases}$$

2. *Spații $[MS]$ produse de spații $[MS]$.* În cele ce urmează introducem prin analogie cu spațiile metrice-produs, noțiunea corespunzătoare pentru spațiile $[MS]$.

Să considerăm pentru aceasta o familie finită de spații $[MS]$ și anume $(S_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$; $\alpha = 1, \ldots, n$, unde $(S_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$ este pentru fiecare α un spațiu $[MS]$.

DEFINIȚIA 2.1. *Numim spațiu produs al spațiilor $(S_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$ $\alpha = 1, \ldots, n$ perechea $(S, \mathcal{F})$, unde $S = \prod_\alpha S_\alpha$ este produsul cartezian al spațiilor S_α, iar $\mathcal{F}$ o familie de funcții de repartiție.*

---

*) În [3] se dă o listă de funcții ce reprezintă norme T și se menționează ordinea lor indusă de definiția 1.2. Profesorul O. Onicescu ne-a atras atenția că printre normele T poate figura și $T_* = \frac{a+b}{2}$ care se află în următoarea relație cu celelalte norme T considerate în [3]

$$T_3 \leqslant T_* \leqslant T_4.$$

Considerarea lui T modifică ușor enunțul lemei 2.1. din [3] și anume:

Dacă un spațiu $[MS]$ conține două puncte distincte, atunci (IV M) nu poate să se mențină universal pentru T_*.

Demonstrație. Fie $p \neq q$ și să presupunem că

$$F_{pq}(x) \geqslant \frac{1}{2}(F_{pq}(x - y), F_{qq}(y)) = \frac{F_{pq}(x - y)}{2} + \frac{1}{2} \quad (y > 0).$$

Însă $\lim_{y \to 0} F_{pq}(x - y) = F_{pq}(x)$, deci $F_{pq}(x) \geqslant 1$, adică $p = q$ deci contradicție.

Pentru familia $\mathcal{F}$ există mai multe posibilități de formare; vom indica în cele ce urmează cîteva și anume:

$$1^\circ.\ \mathcal{F}(P, Q) = \overset{n}{\underset{\alpha=1}{\top}} \mathcal{F}_\alpha(p_\alpha, q_\alpha)$$

$$2^\circ.\ \mathcal{F}(P, Q) = \frac{1}{n} \sum_\alpha F_\alpha(p_\alpha, q_\alpha)$$

$$3^\circ.\ \mathcal{F}(P, Q) = \frac{1}{n} \left[\sum_\alpha (\mathcal{F}_\alpha(p_\alpha, q_\alpha))^h \right]^{\frac{1}{h}},\ h \geqslant 1$$

unde $P,\ Q \in \prod_\alpha S_\alpha$, $p_\alpha, q_\alpha \in S_\alpha$ iar prin simbolul $\overset{n}{\underset{\alpha=1}{\top}}$ am însemnat compoziția celor n funcții de repartiție.

În cele ce urmează vom presupune $n = 2$.

TEOREMA 2.1. *Dacă* $(S_1, \mathcal{F}_1), (S_2, \mathcal{F}_2)$ *satisfac I, II, III, atunci* $(S, \mathcal{F})$ *cu* $S = S_1 \times S_2$ *iar* $\mathcal{F}$ *definit de 1°, este un spațiu în care de asemenea sînt satisfăcute axiomele I, II, III.*

Demonstrație. Fie $P = (p_1, p_2)$; $Q = (q_1, q_2)$, $P, Q \in S$.

Verificăm pe rînd axiomele.

Axioma I. Să presupunem că

$$F_{PQ}(x) = 1 \text{ pentru orice } x > 0$$

și că $P \neq Q$. Atunci din

$$F_{PQ}(x) = \int_0^x F_{p_1 q_1}(x - y)\, dF_{p_2 q_2}(y) = \int_0^x F_{p_2 q_2}(x - y)\, dF_{p_1 q_1}(y) = 1$$

ar rezulta că sau $p_1 \neq q_1$ sau $p_2 \neq q_2$.

Să considerăm numai $p_1 \neq q_1$.

Atunci există $x_0 > 0$ astfel ca $F_{p_1 q_1}(x_0) < 1$ și deci

$$F_{pq}(x_0) = \int_0^{x_0} F_{p_1 q_1}(x_0 - y)\, dF_{p_2 q_2}(y) < \int_0^{x_0} dF_{p_2 q_2}(y) \leqslant 1$$

de unde $P \equiv Q$.

Reciproc dacă $P \equiv Q$, atunci $F_{p_1 q_1} = F_{p_2 q_2} = \varepsilon_0$ și cum $\varepsilon_0 \top \varepsilon_0 = \varepsilon_0$ rezultă că axioma I este verificată.

Axiomele II și III se verifică evident și cu aceasta teorema este demonstrată.

Observația 2.1. Axioma IV nu este în general verificată de $(S, \mathcal{F})$ dacă presupunem că $(S_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$ satisfac I — IV*).

*) Se constată din exemplul care urmează că nu este neapărată nevoie de toate axiomele ci numai de II și IV. Axioma II folosește la reprezentarea specială a compoziției.

Aceasta rezultă din următorul exemplu:

Exemplul 2.1. Să considerăm spațiul Hilbert H, și G o funcție derepartiție cu proprietățile:

a) $G(0) = 0$; $\quad G(\alpha x) \leqslant \alpha G(x)$, $\quad (\alpha < 1)$.

b) Există un x_0 fix cu proprietatea $G(x_0) = 1$; $(\underset{x>x_0}{G(x)} = 1)$.

O asemenea funcție poate fi $G(x) = Kx$, restrînsă la condițiile a) și b).

Să considerăm spațiul simplu determinat de M și G și un triunghi dreptunghic isoscel PQR, din H, adică

$$PQ = 1, \quad QR = 1, \quad PR = \sqrt{2}.$$

Vom arăta că $(H \times H, G \times G)$ nu satisface axioma IV.

Fie x_0 și $y_0 > x_0$.

Din condițiile $F_{PQ}(x_0) = 1$; $F_{QR}(y_0) = 1$ avem respectiv

$$\int_0^{x_0} G(x_0 - \alpha)\, dG(\alpha) = 1$$

$$\int_0^{y_0} G(y_0 - \alpha) dG(\alpha) = 1.$$

De aici rezultă

$$F_{PR}(x_0 + y_0) = \int_0^{\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}} G\left(\frac{x_0 + y_0 - \alpha}{\sqrt{2}}\right) dG\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x_0+y_0} dG\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \leqslant \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Pe de altă parte,

$$F_{PR}(x_0 + y_0) = [G \times G]\left(\frac{x_0 + y_0}{\sqrt{2}}\right).$$

Cum $\dfrac{x_0 + y_0}{\sqrt{2}} \geqslant x_0$ rezultă că

$$[G \times G]\left(\frac{x_0 + y_0}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

și deci relația (1) ne conduce la o contradicție.

Se vede din acest exemplu că produsul a două spații $[MS]$ nu este în general un spațiu $[MS]$.

TEOREMA 2.2. *Dacă $(S_1, \mathcal{F}_1)$ și $(S_2, \mathcal{F}_2)$ sînt spații Menger relative la o aceeași normă T, $T \leqslant$ produs, atunci $(S, \mathcal{F})$, cu $\mathcal{F}$ dat de 1°, este de asemenea un spațiu Menger relativ la acel T.*

Demonstrație. Este suficient să verificăm (IVM).
Din ipoteze avem relațiile :

$$T\left[\int_0^x F_{p_1q_1}(x-u)\,dF_{p_2q_2}(u);\ \int_0^y F_{q_1r_1}(y-v)\,dF_{q_2r_2}(v)\right]\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^x F_{p_1q_1}(x-u)\,dF_{p_2q_2}(u)\cdot\int_0^y F_{q_1r_1}(y-v)\,dF_{q_2r_2}(v)=$$

$$=\int_0^x\int_0^y F_{p_1q_1}(x-u)\,F_{q_1r_1}(y-v)\,dF_{p_2q_2}(u)\,dF_{q_2r_2}(v)\leqslant$$

$$\leqslant\iint_0^{x+y} F_{p_1r_1}(x+y-(u+v))dF_{p_2q_2}(u)\,dF_{q_2r_2}(v)=\sum.$$

Din (IV M) rezultă însă imediat că pentru măsurile generate de funcțiile $F_{p_iq_i}$ și pentru intervale de forma $(0, u)$ avem : $dF_{p_2q_2}(u)\,dF_{q_2r_2}(v)\leqslant$ $\leqslant dF_{p_2r_2}(u+v)$.

Deci, folosind teorema 1, p. 190 [1], putem scrie

$$\sum\leqslant\int_0^{x+y} dF_{p_1r_1}(x+y-(u+v))\,dF_{p_2r_2}(u+v)=F_{PR}(x+y).$$

Am demonstrat astfel că :

$$F_{PR}(x+y)\geqslant F_{PQ}(x)\cdot F_{QR}(y)\geqslant T[F_{PQ}(x),\ F_{QR}(y)].$$

La fel de simplu se demonstrează următoarea

TEOREMĂ 2.3. *Dacă* $(S_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha=1,2}$ *satisfac I — IV atunci* $(S, \mathcal{F})$, *cu* $\mathcal{F}$ *dat de 2° și 3°, este un spațiu* [MS].

Demonstrație. Verificăm pe rînd axiomele :
Axioma I. Cazul 2°. Relația $F_{PQ}(x)=1$, pentru orice $x>0$ implică

$$\frac{F_{p_1q_1}(x)+F_{p_2q_2}(x)}{2}=1$$

care este echivalentă cu

$$F_{p_1q_1}(x)=1 \quad \text{și} \quad F_{p_2q_2}(x)=1$$

pentru orice $x>0$ de unde $P\equiv Q$.
Reciproc, presupunînd $P\equiv Q$ și urmînd calea inversă, conchidem că

$$F_{PQ}(x)=1 \text{ pentru orice } x>0.$$

Cazul 3°. În acest caz remarcăm mai întîi că

$$2\geqslant F_{p_1q_1}(x)+F_{p_2q_2}(x)\geqslant(F_{p_1q_1}(x))^s+(F_{p_2q_2}(x))^s=2$$

ceea ce ne spune că $F_{p_1q_1}(x)=1, F_{p_2q_2}(x)=1$; restul demonstrației decurge ca mai sus (cazul 2°).

Axioma II se verifică banal.

Axioma III, adică axioma de simetrie, rezultă din axiomele de simetrie ale spațiilor $(S_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$ $(\alpha = 1,2)$.

Axioma IV se verifică astfel:

Din $F_{PQ}(x) = 1$, $F_{QR}(y) = 1$, rezultă ca mai sus că

$$F_{p_1q_1}(x) = 1,\ F_{p_2q_2}(x) = 1,\quad F_{q_1r_1}(y) = 1,\ F_{q_2r_2}(y) = 1$$

iar din axiomele IV pentru $(S_i, \mathcal{F}_i)_{(i=1,2)}$ rezultă că

$$F_{p_1r_1}(x + y) = 1,\quad F_{p_2r_2}(x + y) = 1$$

și deci $F_{PR}(x + y) = 1$, cu F_{PR} definit de 2° sau 3°.

Teorema este astfel demonstrată.

3. *Spații produs de spații Wald.*

TEOREMA 3.1. *Produsul a două spații Wald este un spațiu Wald dacă se consideră $\mathcal{F}$ definit de 1°.*

Demonstrație. Vom demonstra mai întîi următoarea lemă:

LEMA 3.1. *Pentru orice triplet de puncte dintr-un spațiu care este produs de spații Wald avem:*

$$E = [(F_{p_1q_1} \ast F_{p_2q_2}) \ast (F_{q_1r_1} \ast F_{q_2r_2})](x) \leqslant [F_{p_1r_1} \ast F_{p_2r_2}](x).$$

Demonstrația lemei. Folosind asociativitatea și comutativitatea compoziției avem:

$$E = [(F_{p_1q_1} \ast F_{q_1r_1}) \ast (F_{p_2q_2} \ast F_{q_2r_2})](x).$$

Notînd

$$U = F_{p_1q_1} \ast F_{q_1r_1},\qquad V = F_{p_2q_2} \ast F_{q_2r_2}$$

avem conform (IV W)

$$U(x) \leqslant F_{p_1r_1}(x),\quad V(x) \leqslant F_{p_2r_2}(x).$$

De asemenea putem scrie

$$E = \int_0^x U(x-u)\,dV(u) \leqslant \int_0^x F_{p_1r_1}(x-u)\,dV(u) =$$

$$= \int_0^x V(x-u)\,dF_{p_1r_1}(u) \leqslant \int_0^x F_{p_2r_2}(x-u)\,dF_{p_1r_1}(u) = [F_{p_2r_2} \ast F_{p_1r_1}](x)$$

și lema este demonstrată.

Demonstrația teoremei. Conform teoremei 1.2 trebuie să verificăm numai (IV W) pentru $(S, \mathcal{F})$ și anume:

$$F_{PR}(x) \geqslant [F_{PQ} \ast F_{QR}](x),\ \text{pentru } P, Q, R \in S.$$

Presupunem contrar că

$$F_{PR}(x) < [F_{PQ} \ast F_{QR}](x).$$

Aplicînd lema ultimei relații avem :

$$[F_{p_1 r_1} \divideontimes F_{p_2 r_2}] (x) < [(F_{p_1 q_1} \divideontimes F_{p_2 q_2}) \divideontimes (F_{q_1 r_1} \divideontimes F_{q_2 r_2})] (x) \leqslant (F_{p_1 r_1} \divideontimes F_{p_2 r_2}) (x)$$

adică o contradicție. Teorema este astfel complet demonstrată.

4. Considerații topologice asupra spațiilor produs.

DEFINIȚIA 4.1. *Dacă p este un punct al spațiului $(S_1, \mathcal{F}_1)$ vom numi vecinătate* [3] *a lui p, următoarea mulțime*

$$V_{\varepsilon,\lambda} (p) = \{q ; F_{pq} (\varepsilon) > 1 - \lambda\} , \quad \text{pentru } \lambda, \varepsilon > 0.$$

Fie $(S_1, \mathcal{F}_1)$ și $(S_2, \mathcal{F}_2)$ două spații $[MS]$ și τ_1, respectiv τ_2, topologiile lor induse de definiția 4.1. Atunci notînd τ topologia indusă de aceeași definiție în $(S, \mathcal{F})$ se demonstrează ușor :

TEOREMA 4.1. Cu notațiile de mai sus, dacă $\mathcal{F}$ este dată de 1° atunci $\tau = \tau_{12}$, unde $\tau_{12} = \tau_1 \times \tau_2$ înțelegînd că topologia τ_{12} este formată din vecinătăți V care sînt produse carteziene de vecinătăți din cele două spații, adică $V = V_1 \times V_2$.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

РЕЗЮМЕ

В работе изучаются произведения статистических метрических пространств (пространств (MS)).

Определяется произведение n пространств (MS), (определение 2.1); в дальнейшем рассматривается случай $n = 2$.

Теоремы 2.1 и 2.2 дают достаточное условие того, что произведение двух пространств является пространством Менгера, в случае, когда семейство $\mathcal{F}$ пространства $(S \times S, \mathcal{F})$, определяется 1 (см. [3]).

Пример 2.1 показывает, что произведение двух пространств (MS), вообще говоря, не является пространством (MS).

Теорема 3.1 утверждает, что произведение двух пространств Вальда, в случае, когда $\mathcal{F}$ равно 1, является пространством Вальда.

В заключение приводятся некоторые соображения в связи с топологиями пространств произведения.

PRODUITS D'ESPACES MÉTRIQUES STATISTIQUES

RÉSUMÉ

Les auteurs étudient des produits d'espaces métriques statistiques, (MS).

Ils définissent le produit de «n» espaces (MS), (définition 2.1), et ils continuent par le cas $n = 2$.

Les théorèmes 2.1 et 2.2 indiquent la condition suffisante pour que le produit de deux espaces de Menger soit un espace de Menger, si la famille $\mathcal{F}$, de l'espace $(S \times S, \mathcal{F})$ est définie par 1° (cf. [3]).

L'exemple 2.1 montre que le produit de deux espaces (MS) n'est généralement pas un espace (MS).

Le théorème 3.1 affirme que le produit de deux espaces de Wald est, si $\mathcal{F}$ est donné par 1°, un espace de Wald.

A la fin, les auteurs formulent des considérations se rapportant aux topologies des espaces-produits.

BIBLIOGRAFIE

1. O. ONICESCU, GH. MIHOC și colab., *Calculul probabilităților și aplicații*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1956.
2. K. MENGER, *Statistical metrics*. Proc. Nat. Ac. Sci. USA, **28**, 535–537 (1942).
3. B. SCHWEIZER, A. SKLAR, *Statistical metric spaces*. Pacif. Journ. Math., **10**, *1*, 309–334 (1960).

SUPRAFEȚE RIEMANNIENE ȘI APLICAȚII OLOMORFE

DE

MARTIN JURCHESCU

1. INTRODUCERE

Ideea esențială a clasificării actuale a suprafețelor riemanniene deschise constă în generalizarea în moduri diferite la suprafețe riemanniene arbitrare a dichotomiei parabolic-hiperbolic din cazul suprafețelor riemanniene simplu conexe. Această dichotomie poate conduce prin dualitate la o clasificare a aplicațiilor olomorfe pe suprafețe riemanniene arbitrare. Deoarece tipul parabolic de suprafețe riemanniene simplu conexe este planul finit C iar tipul hiperbolic este cercul unitate D, pentru definirea claselor parabolice de aplicații olomorfe vom folosi proprietăți care aparțin tututor aplicațiilor olomorfe $C \to \bar{C}$, $\bar{C}$ sfera lui Riemann, dar care nu aparțin tuturor aplicațiilor olomorfe $D \to \bar{C}$.

Se cunosc două clase remarcabile de aplicații olomorfe parabolice și anume clasa I și clasa aplicațiilor olomorfe local de tip Bl, introduse de S. Stoilow (notele I, II și IV în [10]) și respectiv M. Heins [2]. Dacă urmărim o dualitate cu clasificarea suprafețelor riemanniene, rezultatele actuale arată că duala clasei I cuprinde clasa O°_{AB} (T. Kuroda [7]), iar duala clasei aplicațiilor olomorfe local de tip Bl cuprinde clasa $O_{HB\infty}$ (K. Matsumoto [8]). În această lucrare se introduce o altă clasă de aplicații olomorfe a cărei duală include pe O_G.

Fie R și R_0 suprafețe riemanniene ordinare și fie $f : R \to R_0$ o aplicație olomorfă neconstantă. Atunci f este 0-dimensională și de aceea este definită frontiera accesibilă $\beta_f(R)$ a lui R în raport cu f: un punct al lui $\beta_f(R)$ este un filtru λ pe R cu aderență vidă, cu bază formată din componente conexe de mulțimi $f^{-1}(U_0)$, unde U_0 aparține colecției mulțimilor deschise ale lui R_0, și cu proprietatea că baza de filtru $f(\lambda)$ este convergentă. O submulțime α a lui $\beta_f(R)$ se zice *polară* dacă există o funcție subarmonică generalizată $s \not\equiv -\infty$ pe R (adică o funcție definită pe R, cu valori în dreapta reală terminată $[-\infty, +\infty]$, care

este subarmonică exceptînd o mulțime închisă de capacitate nulă) astfel încît pentru orice $\lambda \in \alpha$, baza de filtru $s(\lambda)$ să fie convergentă către $-\infty$.

În lucrarea de față vom considera clasa aplicațiilor olomorfe neconstante $f: R \to R_0$ pentru care frontierele accesibile $\beta_f(R)$ sînt reuniuni numărabile de mulțimi polare. În virtutea unei teoreme a lui Evans-Kuramochy ([6]), frontiera ideală a unei suprafețe riemanniene $R \in O_G$ este polară (într-un sens evident) și de aceea pentru orice aplicație olomorfă neconstantă $f: R \to R_0$ cu $R \in O_G$, $\beta_f(R)$ este polară. Așadar duala clasei noastre de aplicații olomorfe conține sigur pe O_G.

Orice aplicație olomorfă local de tip *Bl* este de clasă I. Acest fapt este cunoscut și demonstrația lui este imediată. Scopul esențial al lucrării prezente este teorema următoare (a cărei demonstrație nu este deloc imediată și care va rezulta dintr-un criteriu pentru clasa $O_{H^\circ B}$).

A) *Fie* $f: R \to R_0$ *o aplicație olomorfă neconstantă. Dacă* $\beta_f(R)$ *este local reuniune numărabilă de mulțimi polare, atunci* f *este local de tip Bl.*

2. FRONTIERA ACCESIBILĂ

Fie X un spațiu topologic. Un filtru γ pe X se zice *conex* dacă are o bază formată din mulțimi conexe.

LEMA 2.1. *Într-un spațiu local compact, orice filtru conex cu aderență 0-dimensională nevidă este convergent.*

Demonstrație. Întrucît un spațiu local compact poate fi compactificat prin adăugarea unui singur punct, lema rezultă din teorema binecunoscută care afirmă că pe un spațiu compact aderența oricărui filtru conex este conexă. Vom da și o demonstrație directă.

Fie X un spațiu local compact, γ un filtru conex pe X, A aderența lui γ. Vom presupune că A este 0-dimensională și conține un punct x, și vom demonstra că γ converge către x.

Fie V o vecinătate arbitrară a lui x; trebuie să arătăm că $V \in \gamma$. Deoarece X este local compact și A 0-dimensională, există o vecinătate deschisă relativ compactă $W \subset V$ a lui x, astfel încît $A \cap B = \emptyset$, unde $B = \overline{W} - W$. Fie $(A_\iota)_{\iota \in I}$ o bază a lui γ formată din mulțimi conexe: atunci

$$A = \bigcap_{\iota \in I} \bar{A}_\iota,$$

și deci

$$(\bigcap \bar{A}_\iota) \cap B = \emptyset.$$

Cum B este compact, există $\iota_1, \ldots, \iota_k \in I$ astfel încît

$$(\bar{A}_{\iota_1} \cap \ldots \cap \bar{A}_{\iota_k}) \cap B = \emptyset$$

cum $(A_\iota)_{\iota \in I}$ este o bază de filtru, există $\iota_0 \in I$ astfel încît

$$A_{\iota_0} \subset A_{\iota_1} \cap \ldots \cap A_{\iota_k},$$

și deci

$$\bar{A}_{\iota_0} \cap B = \emptyset.$$

De aici rezultă

$$A_{\iota_0} \subset W \cup (X - \overline{W}),$$

adică

$$A_{\iota_0} = A_{\iota_0} \cap W \cup A_{\iota_0} \cap (X - \overline{W}).$$

Cum A_{ι_0} este conex și cum $x \in A_{\iota_0} \cap W$, avem în mod necesar

$$A_{\iota_0} \cap (X - \overline{W}) = \varnothing,$$

adică

$$A_{\iota_0} \subset W \subset V,$$

astfel că $V \in \gamma$, de unde lema.

Fie X și X_0 două spații topologice. Pentru orice aplicație continuă $f : X \to X_0$, vom spune că un domeniu U pe X este distins în raport cu f dacă există o mulțime deschisă U_0 pe X_0 astfel încît U să fie o componentă conexă a lui $f^{-1}(U_0)$; în cazul X_0 local conex, putem lua pentru U_0, în această definiție, un domeniu.

DEFINIȚIE. O aplicație $f : X \to X_0$ se zice *0-dimensională* dacă este continuă și dacă pentru orice $x_0 \in X_0$ fibra $f^{-1}(x_0)$ are dimensiune $\leqslant 0$.

LEMA 2.2. *Fie X un spațiu local compact și local conex, fie X_0 un spațiu Hausdorff și fie $f : X \to X_0$ o aplicație 0-dimensională. Un filtru γ pe X este filtrul vecinătăților unui punct din X dacă și numai dacă sînt îndeplinite următoarele condiții* :

(1) *Aderența lui γ este nevidă.*

(2) *γ are o bază formată din domenii.*

(3) *Baza de filtru $f(\gamma)$ este convergentă.*

Demonstrație. Necesitatea condițiilor (1) — (3) pentru ca γ să fie un filtru de vecinătăți este clară. Să demonstrăm suficiența lor.

Să presupunem așadar că γ satisface condițiile (1) — (3). Fie A aderența lui γ; avem

$$A = \bigcap_{\iota \in I} \overline{A_\iota}$$

unde $(A_\iota)_{\iota \in I}$ este o bază a filtrului γ. Din condiția (3) rezultă că baza de filtru $(f(A_\iota))_{\iota \in I}$ este convergentă către un punct $x_0 \in X_0$. Cum X_0 este Hausdorff,

$$\bigcap_{\iota \in I} \overline{f(A_\iota)} = x_0.$$

Dar, aplicația f fiind continuă,

$$f(\overline{A_\iota}) \subset \overline{f(A_\iota)}$$

pentru orice $\iota \in I$, astfel că

$$A \subset f^{-1}(x_0).$$

Or, γ este conex, A este nevidă și $f^{-1}(x_0)$ este 0-dimensională. După lema 2.1, γ converge către un punct $x \in f^{-1}(x_0)$ și în consecință, după (2), γ este filtrul vecinătăților lui x.

COROLAR. *Fie X un spațiu local compact și local conex, fie X_0 un spațiu Hausdorff, și fie $f: X \to X_0$ o aplicație 0-dimensională. Domeniile distinse (în raport cu f) ale lui X formează o bază pentru topologia lui X.*

Demonstrație. Domeniile distinse care conțin un punct $x \in X$ formează un filtru satisfăcînd în mod evident condițiile (1) — (3).

DEFINIȚIE. Fie X un spațiu local compact și local conex, fie X_0 un spațiu Hausdorff și fie $f: X \to X_0$ o aplicație 0-dimensională. Se numește *punct frontieră accesibil al lui X (în raport cu f)* orice filtru λ care satisface condițiile următoare:

1) Aderența lui λ este vidă.

2) λ are o bază formată din domenii distinse.

3) Baza de filtru $f(\lambda)$ este convergentă[1]).

Mulțimea tuturor punctelor frontieră accesibile ale lui X (în raport cu f) se numește *frontiera accesibilă a lui X (în raport cu f)* și se notează $\beta_f(X)$ sau simplu β_f cînd nici o ambiguitate nu e posibilă. Pentru orice $\lambda \in \beta_f$, se numește *vecinătate distinsă în X a lui λ* orice domeniu distins U care aparține filtrului λ. Aplicația f se prelungește în mod natural la o aplicație $\bar{f}: X \cup \beta_f \to X_0$, punînd, pentru orice $\lambda \in \beta_f$, $\bar{f}(\lambda) =$ limita bazei de filtru $f(\lambda)$. Un filtru γ pe X se zice *convergent pe $X \cup \beta_f$*, dacă γ este convergent pe X sau dacă există $\lambda \in \beta_f$ astfel încît γ să fie mai fin decît λ (acest λ este atunci unic determinat). O aplicație $g: X \cup \beta_f \to Y$, Y spațiu topologic, se zice *continuă* dacă $g \mid X$ este continuă și dacă pentru orice $\lambda \in \beta_f$, baza de filtru $g(\lambda)$ este convergentă. De exemplu, aplicația $\bar{f}$ este continuă.

Remarcă. Pentru orice domeniu distins U al lui X (în raport cu f) să notăm $'U$ submulțimea lui $X \cup \beta_f$ obținută adăugînd la U toate filtrele $\lambda \in \beta_f$ care conțin U. Colecția tuturor mulțimilor $'U$ formează atunci baza unei topologii pe $X \cup \beta_f$. Se vede ușor că noțiunile de convergență și continuitate pe $X \cup \beta_f$ introduse mai sus sînt relative la această topologie naturală a lui $X \cup \beta_f$.

Interesul noțiunii de punct frontieră accesibil rezultă din teorema următoare.

TEOREMA 2.1. *Pentru ca un filtru conex γ pe X să fie convergent pe $X \cup \beta_f$ este necesar și suficient ca baza de filtru $f(\gamma)$ să fie convergentă.*

Demonstrație. Condiția este evident necesară.

Invers, fie γ un filtru conex pe X, astfel încît baza de filtru $f(\gamma)$ este convergentă către un punct $x_0 \in X$. Fie U_0 o vecinătate deschisă arbitrară a lui x_0. Cum γ este conex și cum filtrul generat de $f(\gamma)$ converge către x_0, γ conține exact o componentă conexă U a lui $f^{-1}(U_0)$. Cînd U_0 parcurge un sistem fundamental de vecinătăți deschise ale lui x_0, mulțimile U formează baza unui filtru λ pe X care satisface condițiile 2) și 3) din definiția punctului frontieră accesibil. Este clar că γ

[1]) Noțiunea de punct frontieră accesibil s-a format în legătură cu definiția punctelor singulare ale unei funcții analitice după Riemann. Ea a fost definită mai întîi pentru cazul cînd f este o aplicație interioară (S. Stoilow [10], nota III).

este mai fin decît λ. Dacă aderența lui λ este vidă, atunci $\lambda \in \beta_f$. Dacă dimpotrivă aderența lui λ este nevidă, λ este un filtru de vecinătăți pe X în virtutea lemei 2.2. Teorema este astfel demonstrată.

Fie X și X_0 două spații local compacte. O aplicație $f: X \to X_0$ se zice *proprie* dacă imaginea inversă $f^{-1}(K_0)$ a oricărei mulțimi compacte K_0 este compactă. Este imediat că o aplicație $f: X \to X_0$ este proprie atunci și numai atunci cînd pentru orice $x_0 \in X_0$ există o vecinătate deschisă U_0 a lui x_0 astfel încît mulțimea $f^{-1}(U_0)$ să fie relativ compactă.

LEMA 2.3. *Fie X și X_0 două spații local compacte. O aplicație $f: X \to X_0$ este proprie dacă, și numai dacă, pentru orice filtru γ cu aderență vidă pe X, baza de filtru $f(\gamma)$ are aderența vidă pe X_0.*

Demonstrație. Fie $f: X \to X_0$ o aplicație proprie, și fie γ un filtru pe X. Să presupunem că aderența lui $f(\gamma)$ conține un punct x_0 și fie V_0 o vecinătate compactă a lui x_0. Atunci $f^{-1}(V_0)$ este compact și, pentru orice $M \in \gamma$, $M \cap f^{-1}(V_0) \neq \emptyset$, căci $f(M) \cap V_0 \neq \emptyset$. De aici rezultă că aderența lui γ este nevidă.

Fie acum f o aplicație satisfăcînd condiția din enunțul lemei și fie K_0 o parte compactă a lui X_0. Cînd K parcurge mulțimea părților compacte ale lui X, mulțimile $X - K$ formează baza unui filtru γ cu aderență vidă pe X. În virtutea ipotezei noastre, $f(\gamma)$ are aderență vidă pe X_0, și deci există un compact K în X astfel încît $f(X - K) \cap K_0 = \emptyset$, adică $f^{-1}(K_0) \subset K$. Aceasta completează demonstrația lemei.

COROLAR. *Fie X și X_0 două spații local compacte. Pentru orice aplicație $f: X \to X_0$, 0-dimensională și proprie, frontiera accesibilă $\beta_f(X)$ este vidă.*

3. SUPRAFEȚE RIEMANNIENE ȘI APLICAȚII OLOMORFE

Fie $X = R \cup B$ o suprafață riemanniană bordată ([5]). O aplicație s a lui X în dreapta reală terminată $[-\infty, +\infty]$ se zice *funcție subarmonică* pe X dacă satisface condițiile următoare:

1) $s(x) < +\infty$ pentru orice $x \in X$.

2) s este superior semicontinuă.

3) Fie dată o hartă în x, de parametru t, cu $t = 0$ în x și cu $\mathrm{Im}(t) = 0$ pe B în cazul $x \in B$; atunci pentru orice $r > 0$ suficient de mic

$$s(0) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} s(r e^{i\theta})\, d\theta,$$

unde $\varepsilon = 2\pi$ dacă $x \in R$ și $\varepsilon = \pi$ dacă $x \in B$.

O funcție u pe X se zice *armonică* dacă u și $-u$ sînt subarmonice. Pentru ca u să fie armonică pe X este necesar și suficient ca u să fie continuă pe X, armonică pe R și $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ pe B [2]).

Dacă X este o suprafață ordinară (i.e. $X = R$) și cu funcție Green, avem pe X noțiunea de potențial greenian. O submulțime A a lui X se va numi atunci de *capacitate nulă*, dacă are capacitatea greeniană exterioară nulă. Această noțiune are caracter local: A este de capaci-

[2]) În [5] o astfel de funcție este numită armonică distinsă.

tate nulă pe X dacă și numai dacă fiecare punct $x \in X$ are o vecinătate deschisă și conexă U astfel încît $A \cap U$ să fie de capacitate nulă pe U.

Fie acum $X = R \cup B$ o suprafață riemanniană bordată arbitrară. O submulțime A a lui X se zice de capacitate nulă în punctul $x \in X$ dacă, fiind dată o hartă în x, de parametru t, cu $t = 0$ în x, și $\mathrm{Im}\,(t) = 0$ pe B în cazul $x \in B$, urma lui A pe această hartă este de capacitate nulă într-un cerc centrat în $t = 0$; A se zice *de capacitate nulă pe* X dacă este de capacitate nulă în fiecare punct al lui X[3]). Dacă A este boreliană (sau mai general: susliniană) atunci în virtutea teoremei lui Choquet de capacitabilitate a mulțimilor susliniene (N. Bourbaki [1]), A este de capacitate nulă dacă și numai dacă orice mulțime închisă conținută în A este de capacitate nulă.

Notăm că o submulțime închisă strict conținută în X este de capacitate nulă dacă și numai dacă este *removabilă* pentru orice funcție armonică mărginită (adică orice funcție armonică mărginită u pe $X - A$ are o prelungire armonică pe tot X).

Notăm încă faptul că orice reuniune finită sau numărabilă de mulțimi de capacitate nulă pe X este de capacitate nulă pe X. De aici rezultă că, dacă U este un domeniu pe X și A o submulțime de capacitate nulă a lui U, atunci A este de capacitate nulă pe X; căci putem scrie

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

cu K_n compacte, deci

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cap A$$

și evident fiecare $K_n \cap A$ este de capacitate nulă pe X. În particular, dacă A este o mulțime închisă, de capacitate nulă pe X, și dacă A' este o submulțime de capacitate nulă a lui $X - A$, atunci $A \cup A'$ este de capacitate nulă pe X.

O submulțime A a lui X se zice polară dacă pentru orice punct $x \in X$ există o vecinătate deschisă și conexă U a lui x și o funcție subarmonică $s \not\equiv -\infty$ pe U astfel încît

$$A \cap U \subset s^{-1}(-\infty).$$

În teoria potențialului se arată că noțiunile de mulțime polară și de mulțime de capacitate nulă coincid.

Fie E o submulțime închisă, nicăieri densă, a lui X și s o funcție subarmonică pe $X - E$. Să punem, pentru orice $x \in X$,

$$\bar{s}(x) = \overline{\lim_{x' \to x,\, x' \in X - E}} s(x').$$

Atunci $\bar{s}$ este superior semicontinuă pe X și $\bar{s} \mid (X - E) = s$. În cele ce urmează vom avea nevoie de lema următoare, de altfel cunoscută.

[3]) Folosind o definiție naturală pentru funcția Green ([5]) putem dezvolta o teorie a potențialului pe suprafețe riemanniene bordate similară celei pe suprafețe ordinare. Mulțimile de capacitate nulă pe o suprafață bordată cu funcție Green sînt atunci exact mulțimile de capacitate greeniană exterioară nulă.

LEMA 3.1. *Fie E o mulțime închisă de capacitate nulă pe X, și s o funcție subarmonică pe $X - E$, astfel încît $\bar{s}(x) < +\infty$ în orice punct $x \in X$. Atunci $\bar{s}$ este subarmonică pe X.*

Demonstrație. Vom arăta că $\bar{s}$ este subarmonică în orice punct $x \in X$. Să considerăm o hartă în x, de parametru t, cu $t = 0$ corespunzînd lui x, și cu $\operatorname{Im}(t) = 0$ pe B în cazul $x \in B$. Avem de demonstrat că, pentru $r > 0$ suficient de mic,

$$\bar{s}(0) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \bar{s}(re^{i\theta})\, d\theta,$$

unde $\varepsilon = 2\pi$ dacă $x \in R$ și $\varepsilon = \pi$ dacă $x \in B$.

Să presupunem, de exemplu, că $x \in R$. Fie D_r domeniul pe X corespunzînd cercului $\{t;\ |t| < r\}$. Pentru r suficient de mic $D_r \subset R$. Fie $\Gamma_r = \overline{D}_r - D_r$. Deoarece $\bar{s} \mid \Gamma_r$ este finită și superior semicontinuă, avem

$$\bar{s} \mid \Gamma_r = \lim_{n\to\infty} f_n,$$

unde f_n este un șir descrescător de funcții finite continue pe Γ_r. Fie u_n funcția armonică mărginită pe D_r, egală cu f_n pe Γ_r. Atunci șirul u_n este descrescător pe D_r și convergent către o funcție u, armonică pe D_r, sau $\equiv -\infty$ (în virtutea principiului lui Harnack). Dar avem $\bar{s} \leqslant u_n$ pe Γ_r. Cum E este de capacitate nulă, principiul maximului extins dă $\bar{s} \leqslant u_n$ pe $D_r - E$. De aici $\bar{s} \leqslant u_n$ pe D_r și în particular

$$\bar{s}(0) \leqslant u_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Pentru $n \to \infty$ obținem inegalitatea căutată. Cazul $x \in B$ se tratează în mod similar.

DEFINIȚIE. Vom spune despre o funcție u pe X că aparține clasei H^0B pe X și vom scrie $u \in H^0B$ pe X dacă u satisface condițiile următoare:

1) u este continuă și mărginită.
2) $u \mid R$ este armonică.
3) $u \mid B \equiv 0$.

Vom defini clasa de suprafețe riemanniene bordate O_{H^0B} prin condiția: $X \in O_{H^0B}$ dacă și numai dacă orice funcție $u \in H^0B$ pe X este o constantă.

Un domeniu Y pe $X = R \cup B$ are o structură naturală de suprafață riemanniană bordată de bord $B \cap Y$ indusă de structura lui X. Fie acum D cercul unitate în planul complex (z) și fie $\overline{D} = D \cup \Gamma$ discul unitate. Vom avea nevoie de lema următoare.

LEMA 3.2. *Cînd $X = R \cup B$ este un domeniu în $\overline{D}$ cu $R = D$, deci $B \subset \Gamma$, $X \in O_{H^0B}$ dacă și numai dacă mulțimea $\Gamma - B$ este de măsură nulă pe Γ.*

Demonstrație. Dacă $\Gamma - B$ este de măsură pozitivă pe Γ, funcția u definită prin

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma - B} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\theta - \varphi)}\, d\theta$$

aparține clasei H^0B pe X și $u \not\equiv 0$, astfel că $X \in O_{H^0B}$.

Invers, dacă $\Gamma - B$ este de măsură nulă pe Γ și dacă $u \in H^0B$ pe X, atunci avem, pentru $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho < r < 1$,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi)}\, d\theta,$$

de unde rezultă, pentru $r \to 1$, $u \equiv 0$. Natural integralele sînt considerate în sensul lui Lebesgue.

DEFINIȚIE. Fie $X = R \cup B$ și $X_0 = R_0 \cup B_0$ două suprafețe riemanniene bordate. O aplicație $f : X \to X_0$ se zice *olomorfă* dacă satisface condițiile următoare:

1) f este continuă.

2) Aplicația $R \to R_0$ definită de f este o aplicație olomorfă de suprafețe riemanniene ordinare.

3) $f(B) \subset B_0$ [4].

(Aplicațiile olomorfe neconstante se mai numesc *acoperiri riemanniene*).

Fie $X = R \cup B$ o suprafață riemanniană bordată. Un domeniu G al lui X se zice *cu frontiera relativă analitică*, dacă orice punct $x \in \overline{G} - G$ are o vecinătate deschisă și conexă U astfel încît $U \cap (\overline{G} - G)$ să fie un arc simplu analitic care divide U în exact două componente conexe, una conținută în G, iar cealaltă în $X - \overline{G}$. Fie $G \subset X$ un domeniu cu frontiera relativă analitică. Vom spune că G aparține clasei SO_{HB} și vom scrie $G \in SO_{HB}$ dacă orice funcție u, continuă și mărginită pe $\overline{G}$, armonică pe G (G se consideră suprafață riemanniană bordată de bord $B \cap G$, cu structura indusă), și nulă pe $\overline{G} - G$ este o constantă. În cazul ordinar $X = R$, $\overline{G}$ poate fi considerat în mod natural ca suprafața riemanniană bordată de bord $\overline{G} - G$; în acest caz $G \in SO_{HB}$ dacă și numai dacă $\overline{G} \in O_{H^0B}$.

DEFINIȚIE. (M. Heins [2]) O aplicație olomorfă neconstantă $f : X \to X_0$ se zice *local de tip Bl* dacă pentru orice punct $x_0 \in X_0$ există un domeniu G_0 cu frontiera relativă analitică, conținînd x_0, astfel încît, pentru orice componentă conexă G a lui $f^{-1}(G_0)$, $G \in SO_{HB}$.

Avem lema următoare a cărei demonstrație foarte simplă va fi omisă (M. Heins [2]).

LEMA 3.3. *Fie $f : X \to X_0$ o aplicație olomorfă local de tip Bl. Pentru orice domeniu G_0 al lui X_0 și orice componentă conexă G a lui $f^{-1}(G_0)$, mulțimea $G_0 - f(G)$ este de capacitate nulă.*

[4]) În [5] astfel de aplicații sînt numite olomorfe distinse.

LEMA 3.4. *Fie $f : X \to X_0$ o aplicație olomorfă și fie $\dot{X}$ un domeniu pe X. Presupunem că aplicația olomorfă $f : \dot{X} \to X_0$ este local de tip Bl. Atunci mulțimea $M = X - \dot{X}$ este de capacitate nulă și aplicația f este local de tip Bl.*

Demonstrație. (i) M este de capacitate nulă. Este suficient să demonstrăm că orice punct frontieră x a lui M, regulat pentru f (aceasta înseamnă că, fiind dată o hartă în x, de parametru z, derivata lui f în raport cu z este nenulă în x), are o vecinătate deschisă V astfel încît $M \cap V$ să fie de capacitate nulă pe V. Or, dacă x este regulat pentru f, există o vecinătate deschisă și conexă V_0 a lui $x_0 = f(x)$ astfel încît, notînd prin V componenta conexă a lui $f^{-1}(V_0)$ care conține x, domeniul V să fie relativ compact și aplicația $f : V \to V_0$ să fie topologică. Fie $\dot{V}$ o componentă conexă conținută în V a lui $\dot{X} \cap f^{-1}(V_0)$. După lema 3.3, $V_0 - f(\dot{V})$ este de capacitate nulă. Cum $f : V \to V_0$ este topologică, $V \cap M$ este de capacitate nulă.

(ii) $f : X \to X_0$ este local de tip *Bl*. Fie $x_0 \in X_0$ și fie G_0 un domeniu al lui X_0 cu frontiera relativă analitică și astfel încît orice componentă conexă $\dot{G}$ a lui $\dot{X} \cap f^{-1}(G_0)$ să aparțină clasei SO_{HB}. Fie G o componentă conexă arbitrară a lui $f^{-1}(G_0)$. Cum mulțimea $M = X - \dot{X}$ este închisă și de capacitate nulă, $\dot{G} = G - M$ este conex și de aceea $\dot{G}$ este o componentă conexă a lui $\dot{X} \cap f^{-1}(G_0)$. Rezultă $\dot{G} \in SO_{HB}$, de unde evident $G \in SO_{HB}$.

DEFINIȚIE. (S. Stoilow [10]). O aplicație olomorfă $f : X \to X_0$ se zice de clasă I, dacă pentru orice domeniu U_0 al lui X_0 și orice componentă conexă U a lui $f^{-1}(U_0)$, mulțimea $U_0 - f(U)$ este 0-dimensională.

Din lema 3.3 rezultă imediat

TEOREMA 3.1. *O aplicație olomorfă $f : X \to X_0$ este de clasă I dacă ea este local de tip Bl.*

Fie $f : X \to X_0$ o aplicație olomorfă. Vom nota $\mu(f, x)$ multiplicitatea lui f în $x \in X$, și vom pune

$$n(f, x_0) = \sum_{x \in f^{-1}(x_0)} \mu(f, x),$$

și

$$n(f) = \sup_{x_0 \in X_0} n(f, x_0).$$

Dacă U_0 este un domeniu pe X_0 și U_0 o componentă conexă a lui $f^{-1}(U_0)$, vom pune

$$M(n; U_0, U) = \{x_0 \in U_0 ; n(f, x_0) \leqslant n\}.$$

Amintim că un *element frontieră* al lui X este un filtru γ pe X cu proprietățile următoare :

1) γ are o bază formată din domenii cu frontierele relative compacte.

2) γ are aderență vidă.

TEOREMA 3.2. *Fie $f : X \to X_0$ o aplicație olomorfă de clasă I (respectiv local de tip Bl).*

(1) *Pentru orice $n < n(f)$, mulțimea închisă $M(n; U_0, U)$ este 0-dimensională (respectiv de capacitate nulă).*

(2) *Pentru orice element frontiera γ al lui X, aderența filtrului $f(\gamma)$ coincide cu X_0 sau conține cel mult un punct; în primul caz există o mulțime $F(\gamma)$ de tip F_σ, 0-dimensională (respectiv de capacitate nulă) astfel încît, pentru orice domeniu $V \in \gamma$ și orice $x_0 \in X_0 - F(\gamma)$, fibra $f^{-1}(x_0)$ conține o infinitate de puncte situate în V.*

(3) *Condiția $n(f) = \infty$ este necesară și suficientă ca să existe cel puțin un γ astfel încît aderența lui $f(\gamma)$ să coincidă cu X_0.*

(Dacă aderența lui $f(\gamma)$ coincide cu X_0, se spune că aplicația f este total nedeterminată în vecinătatea lui γ).

Teorema 3.2 în cazul aplicațiilor olomorfe de clasă I se datorește lui S. Stoilow (a se vedea notele I, II, IV în [10]). Precizarea ei în cazul unei aplicații local de tip *Bl* este imediată (pentru (1) a se vedea Heins [2]).

4. CRITERIU PENTRU $O_{H^\circ B}$

Fie $X = R \cup B$ o suprafață riemanniană bordată. O aplicație s a lui X în dreapta reală terminată $[-\infty, +\infty]$ va fi numită *funcție subarmonică generalizată* dacă există o submulțime închisă de capacitate nulă E a lui X astfel încît $s \mid (X - E)$ să fie subarmonică.

Pentru orice funcție subarmonică generalizată vom considera funcția $\bar{s}$ pe X definită prin

$$\bar{s}(x) = \overline{\lim_{x' \to x,\, x' \in X - E}} s(x'),$$

E având semnificația din definiția de mai sus. Fie $'E = \bar{s}^{-1}(+\infty)$. Atunci evident $\bar{s}$ este superior semicontinuă pe X, $\bar{s} \mid (X - E) = s \mid (X - E)$, $'E$ este o mulțime închisă și $'E \subset E$. În plus $\bar{s} \mid (X - {}'E)$ este subarmonică în virtutea lemei 3.1. În consecință $\bar{s}$ este subarmonică generalizată, diferă de s numai prin valorile ei pe o mulțime închisă de capacitate nulă, și ia valoarea $+\infty$ în orice punct în care nu este subarmonică. Vom numi $\bar{s}$ normalizata lui s.

Fie $X = R \cup B$ și $X_0 = R_0 \cup B_0$ două suprafețe riemanniene bordate și fie $f : X \to X_0$ *o aplicație olomorfă neconstantă*. Atunci aplicația f este 0-dimensională și deci este definită frontiera accesibilă β_f a lui X în raport cu f.

DEFINIȚIE. Vom spune că o mulțime $\alpha \subset \beta_f$ este *polară* dacă există o funcție subarmonică generalizată $s \not\equiv -\infty$ pe R astfel încît pentru orice $\lambda \in \alpha$, baza de filtru $s(\lambda)$ este convergentă către $-\infty$. Dacă fiecare punct $x_0 \in X_0$ are o vecinătate deschisă conexă V_0 astfel încît pentru orice componentă conexă V a lui $f^{-1}(V_0)$, $\beta_f(V)$ să fie polară (res-

pectiv reuniune numărabilă de mulțimi polare), atunci vom spune că β_f este *local polară* (respectiv *local reuniune numărabilă de mulțimi polare*).

Scopul acestei secțiuni este teorema următoare [5])

TEOREMA 4.1. *Fie* $f : X \to X_0$ *o aplicație olomorfă neconstantă satisfăcînd condițiile următoare* :

(1) $X_0 = R_0 \cup B_0$ *este compact,* R_0 *este de gen zero,* B_0 *este nevid.*

(2) $\beta_f(X)$ *este reuniune numărabilă de mulțimi polare.*

Atunci $X \in O_{H^0B}$.

Din teorema 4.1 rezultă imediat.

A) *Fie* R *și* R_0 *două suprafețe riemanniene ordinare, și* $f : R \to R_0$ *o aplicație olomorfă neconstantă. Dacă* $\beta_f(R)$ *este local reuniune numărabilă de mulțimi polare, atunci* f *este local de tip Bl.*

Pentru demonstrația teoremei 4.1 vom avea nevoie de o teoremă preliminară care este un analog pentru funcțiile subarmonice generalizate al teoremei de unicitate a lui Lusin-Privalov asupra funcțiilor meromorfe în cercul unitate.

Fie, în planul (z), $D = \{z\,;\,|z| < 1\}$ cercul unitate, $\overline{D} = \{z\,;\,|z| \leqslant 1\}$ discul unitate și $\Gamma = \overline{D} - D$ circumferința unitate.

Pentru $e^{i\theta} \in \Gamma$ să notăm

$$T(e^{i\theta}) = \left\{ z \in D\,;\, \left| \arg \frac{e^{i\theta} - z}{e^{i\theta}} \right| < \frac{\pi}{2} \right\};$$

$T(e^{i\theta})$ este deci intersecția cu D a unghiului de vîrf $e^{i\theta}$, de măsură $\frac{\pi}{2}$ și avînd ca bisectoare semidreapta care unește $e^{i\theta}$ cu punctul $z = 0$.

Fie s o funcție subarmonică generalizată pe D, și fie E o submulțime închisă de capacitate nulă a lui D astfel încît $s \mid (D - E)$ să fie subarmonică. Vom defini funcția s^* pe Γ prin

$$s^*(e^{i\theta}) = \overline{\lim_{z \to e^{i\theta},\, z \in T(e^{i\theta}) - E}} s(z).$$

Fie $\bar{s}$ normalizata lui s. Atunci este clar că

$$s^*(e^{i\theta}) = \overline{\lim_{z \to e^{i\theta},\, z \in T(e^{i\theta})}} \bar{s}(z).$$

Teorema noastră preliminară este următoarea [6]) :

TEOREMA 4.2. *Pentru orice funcție subarmonică generalizată* $s \not\equiv -\infty$ *pe cercul unitate* D, *mulțimea* $A = s^{*-1}(-\infty)$ *este de măsură nulă pe* Γ.

Demonstrație. (i) Vom demonstra mai întîi aceasta :

Fie $s \not\equiv -\infty$ o funcție subarmonică negativă pe D, și fie $'s$ funcția definită Γ prin

$$'s(e^{i\theta}) = \overline{\lim_{z \to e^{i\theta}}} s(z).$$

Atunci mulțimea $'s^{-1}(-\infty)$ este de măsură nulă pe Γ.

[5]) În legătură cu teorema 4.1 și cu teorema A) a se vedea [3] și [4].

[6]) Teorema preliminară a fost enunțată de autor mai întîi pentru cazul s subarmonică pe D, iar demonstrația ei pentru acest caz a fost dată de C. Constantinescu.

Într-adevăr, funcția $'s$ este superior semicontinuă și de aceea există un șir f_n de funcții continue finite care converge descrescînd către $'s$. Fie u_n funcția finită continuă pe $\overline{D}$, armonică în D și egală cu f_n pe Γ. Pentru orice $z = \rho e^{i\varphi} \in D$, avem

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\varphi)} f_n(e^{i\theta})d\theta.$$

Funcția $s - u_n$ este subarmonică pe D și

$$\overline{\lim_{|z|\to 1}}\,(s(z) - u_n(z)) \leqslant 0,$$

de unde

$$s \leqslant u_n$$

pe D, în virtutea principiului maximului. În consecință, vom avea și

$$s(z) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\varphi)} {}'s(e^{i\theta})\,d\theta,$$

de unde asertiunea căci $s \not\equiv -\infty$.

(ii) Fie $s \not\equiv -\infty$ o funcție subarmonică generalizată pe D și fie E o mulțime închisă de capacitate nulă pe D astfel încît $s \mid (D - E)$ să fie subarmonică. Vom folosi o construcție a lui Luzin-Privalov ([9]).

Pentru orice r, r' și ε astfel încît

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < r < r' < 1, \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4},$$

vom nota

$$T_r(e^{i\theta}) = T(e^{i\theta}) \cap \{z; r \leqslant |z| < 1\},$$
$$T_{r,r'}(e^{i\theta}) = T(e^{i\theta}) \cap \{z; r \leqslant |z| \leqslant r'\},$$

și

$$T^1_{r,r',\varepsilon}(e^{i\theta}) = \left\{z; r \leqslant |z| \leqslant r', \left|\arg\frac{e^{i\theta}-z}{e^{i\theta}}\right| \leqslant \frac{\pi}{4} - \varepsilon\right\}.$$

Fie

$$s^*_{r,r',\varepsilon}(e^{i\theta}) = \sup_{z\in T_{r,r',\varepsilon}(e^{i\theta})-E} s(z),$$

$$s^*_{r,r'}(e^{i\theta}) = \sup_{z\in T_{r,r'}(e^{i\theta})-E} s(z)$$

și

$$s^*_r(e^{i\theta}) = \sup_{z\in T_r(e^{i\theta})-E} s(z).$$

Evident

$$s^*_{r,r',\varepsilon}(e^{i\theta}) = \max_{z\in T_{r,r',\varepsilon}(e^{i\theta})} \bar{s}(z)$$

$$s^*_{r,r'}(e^{i\theta}) = \max_{z\in T_{r,r'}(e^{i\theta})} \bar{s}(z)$$

și

$$s_r^*(e^{i\theta}) = \sup_{z \in T_r(e^{i\theta})} \bar{s}(z).$$

Cum $\bar{s}$ este superior semicontinuă pe D și cum

$$\left| \arg \frac{e^{i\theta} - z}{e^{i\theta}} \right|$$

este continuă pe $\{z; r \leqslant |z| \leqslant r'\} \times \Gamma$, funcția $s_{r,r',\varepsilon}$ este superior semicontinuă pe Γ. Dar avem

$$s^*_{r,r',\varepsilon}(e^{i\theta}) \uparrow s^*_{r,r'}(e^{i\theta}), \text{ cînd } \varepsilon \to 0,$$

$$s^*_{r,r'}(e^{i\theta}) \uparrow s^*_r(e^{i\theta}), \text{ cînd } r' \to 1,$$

$$s^*_r(e^{i\theta}) \downarrow s^*(e^{i\theta}), \text{ cînd } r \to 1.$$

De aici rezultă că *funcțiile* s^*_r *și* s^* *sînt măsurabile pe* Γ *și, în particular, că mulțimea* $A = s^{*-1}(-\infty)$ *este măsurabilă.*

(iii) Să presupunem prin absurd că A este de măsură pozitivă pe Γ. După teorema lui Egorov există o mulțime A_1, închisă, conținută în A și de măsură pozitivă pe Γ, astfel încît, pe A_1, convergența lui s^*_r către s^*, pentru $r \to 1$, să fie uniformă. Există deci r_0, $\frac{\sqrt{2}}{2} < r_0 < 1$, astfel încît

$$s^*_{r_0}(e^{i\theta}) < 0$$

pentru orice $e^{i\theta} \in A_1$. Urmează că $\bar{s} < 0$ *pe* $T_{r_0}(e^{i\theta})$ *și de aici că* $\bar{s}$ *este subarmonică pe* $T_{r_0}(e^{i\theta})$ *pentru orice* $e^{i\theta} \in A_1$.

Fie $\overline{D}_1 = \{z; |z| < r_0\} \cup \left(\bigcup_{e^{i\theta} \in A_1} T_{r_0}(e^{i\theta})\right)$, și fie D_1 interiorul lui $\overline{D}_1$. Se verifică ușor că D_1 este un domeniu, că $\overline{D}_1$ este închiderea lui D_1, și că $\Gamma_1 = \overline{D}_1 - D_1$ este o curbă simplă închisă rectificabilă avînd A_1 ca submulțime închisă de măsură pozitivă. Evident, Γ_1 întîlnește circumferința $|z| = r_0$ după un număr finit de arce închise σ_i. Fie r_1 astfel încît $r_0 < r_1 < 1$ și fie $\sigma_i' \supset \sigma_i$ un arc închis al lui Γ_1 conținut în cercul $\{z; |z| < r_1\}$ și avînd capetele situate în $D-E$. Cum mulțimea E este închisă și 0-dimensională se poate modifica Γ_1 într-o curbă simplă închisă rectificabilă Γ_2, înlocuind arcele σ_i' prin arce analitice, mutual disjuncte $\sigma_i'' \subset D-E$, astfel încît domeniul mărginit limitat de Γ_2, să-l numim D_2, să nu conțină nici un punct din mulțimea

$$E \cap \{z; |z| < r_0\}.$$

Atunci funcția $\bar{s}$ este subarmonică și superior mărginită pe D_2 și satisface condiția

$$\overline{\lim_{z \to e^{i\theta}, z \in D_2}} \bar{s}(z) = -\infty$$

în orice punct $e^{i\theta} \in A_1$. Fie Φ un izomorfism analitic al lui D_2 pe D. Există atunci un omeomorfism

$$\overline{\Phi} : \overline{D}_2 \to \overline{D}$$

cu $\overline{\Phi} \mid D_2 = \Phi$. Mulțimea $\overline{\Phi}(A_1)$ este de măsură pozitivă pe Γ. Aplicînd (i) funcției $\overline{s}\,\Phi^{-1}$ se obține $\overline{s} \equiv -\infty$ pe D_2 și deci pe D. Aceasta este o contradicție și teorema preliminară este demonstrată.

Demonstrația teoremei 4.1. (i) Fie $(\hat{X}, h)$ spațiul universal de acoperire al lui X, fie $\hat{B} = h^{-1}(B)$ și $\hat{R} = h^{-1}(R)$. Vom introduce pe $\hat{X} = \hat{R} \cup \hat{B}$ structura de suprafață riemanniană bordată, unic determinată prin condiția ca aplicația $h : \hat{X} \to X$ să fie olomorfă. Din condiția 1) rezultă că suprafața riemanniană simplu conexă $\hat{R}$ este de tip hiperbolic, astfel că putem identifica $\hat{X}$ cu un domeniu al discului unitate $\overline{D}$ de așa manieră încît $\hat{R} = D$, și deci $\hat{B} \subset \Gamma$. Vom demonstra că mulțimea $\Gamma - \hat{B}$ este de măsură nulă pe Γ.

(ii) În virtutea condiției 1), aplicația $fh \mid D$ are limite unghiulare aproape peste tot pe Γ (după teorema lui Fatou). Fie $e^{i\theta} \in \Gamma$ un punct în care $fh \mid D$ are o limită unghiulară, fie $\hat{\gamma}$ filtrul unghiular pe D generat de mulțimile $T_r(e^{i\theta})$, pentru $r < 1$. Atunci filtrul de bază $\gamma = h(\hat{\gamma})$ este conex, iar baza de filtru $f(\gamma)$ este convergentă. După teorema 2.1. baza de filtru γ este convergentă pe $X \cup \beta_f$. Vom demonstra că limita lui γ aparține lui β_f.

Într-adevăr, să presupunem că γ converge către un punct $x \in X$. Există o vecinătate deschisă, conexă, relativ compactă U a lui x astfel încît toate componentele conexe $\hat{U}_i$ ale lui $h^{-1}(U)$ să fie relativ compacte și toate aplicațiile $h : \hat{U}_i \to U$ să fie omeomorfisme. Dar filtrul $\hat{\gamma}$ este conex și baza de filtru $\gamma = h(\hat{\gamma})$ converge către x. Prin urmare $\hat{\gamma}$ conține exact o componentă conexă $\hat{U}_i$ a lui $h^{-1}(U)$. Cum $h : \hat{U}_i \to U$ este topologică, $\hat{\gamma}$ converge către un punct din $\hat{U}_i$, ceea ce este o contradicție întrucît $\hat{\gamma}$ converge către $e^{i\theta} \in \Gamma - B = \overline{D} - \hat{X}$.

Astfel : *Filtrul de bază γ este convergent către un punct frontieră accesibil $\lambda \in \beta_f$ (adică este mai fin ca λ).*

(iii) Vom folosi acum condiția 2). Există o mulțime numărabilă S de funcții subarmonice generalizate pe R, astfel încît pentru orice $\lambda \in \beta_f$, baza de filtru $s(\lambda)$ este convergentă către $-\infty$ pentru cel puțin un $s \in S$.

Pentru orice $s \in S$, fie $'s = sh$; fiecare $'s$ este o funcție subarmonică generalizată pe $\hat{R} = D$. Dacă $\hat{\gamma}$ este filtrul unghiular de mai sus care converge către un punct $e^{i\theta} \in \Gamma$ în care $fh \mid D$ are o limită unghiulară, atunci filtrul de bază $\gamma = h(\hat{\gamma})$ este mai fin decît un filtru $\lambda \in \beta_f$ și deci $s(\gamma) = {}'s(\hat{\gamma})$

converge către $-\infty$ pentru cel puțin un $s \in S$. Cum S este numărabil și cum $fh \mid D$ are limite unghiulare aproape peste tot pe Γ, *mulțimea* $\Gamma - \hat{B}$ *este de măsură nulă pe* Γ *în virtutea teoremei 4.2.*

(iv) O simplă aplicație a lemei 3.2 arată acum că $\hat{X} \in O_{H^\circ B}$, de unde clar $X \in O_{H^\circ B}$ ceea ce termină demonstrația teoremei.

РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И ГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

Пусть R и R_0 простые римановы поверхности, $f: R \to R_0$ непостоянное голоморфное отображение, а $\beta_f(R)$ достижимая граница R по отношению к f (одна точка $\beta_f(R)$ является фильтром λ на R с базисом (U_n), состоящим из связных компонент множеств $f^{-1}(U_n^0)$, где U_n^0 — открытые множества в R_0, так что $\bigcap_n \bar{U}_n = \varnothing$ и $f(\lambda)$ является сходящимся). Подмножество α множества $\beta_f(R)$ называется *полярным*, если существует обобщенная субгармоническая функция $s \not\equiv -\infty$ на R, (то есть функция на R со значениями в пределах $[-\infty, +\infty]$, являющаяся субгармонической за исключением замкнутого множества нулевой емкости), так, чтобы при любом $\lambda \in \alpha$, $s(\lambda)$ был сходящимся к $-\infty$.

Доказывается следующая теорема:

A) *Пусть* $f: R \to R_0$ *непостоянное голоморфное отображение. Если* $\beta_f(R)$ *локально представляет собою счетное объединение полярных множеств* f *локально является типа Bl.*

RIEMANN SURFACES AND HOLOMORPHIC MAPS

ABSTRACT

Let R and R_0 be ordinary Riemann surfaces, $f: R \to R_0$ a non-constant holomorphic map, and $\beta_f(R)$ the accessible boundary of R with respect to f (a point of $\beta_f(R)$ is a filter λ on R having a base (U_n) made up of connected components of sets $f^{-1}(U_n^0)$ with U_n^0 open in R_0, such that $\bigcap_n \bar{U}_n = \varnothing$ and such that $f(\lambda)$ is convergent).

A subset α of $\beta_f(R)$ is said to be *polar* if there exists a generalised subharmonic function $s \not\equiv -\infty$ on R (i. e. a function on R with values in $[-\infty, +\infty]$ which is subharmonic on R excepting a closed set of

capacity zero) such that for any $\lambda \in \alpha$, $s(\lambda)$ is convergent to $-\infty$. The following theorem is proved :

A) *Let* $f : R \to R_0$ *be a non-constant holomorphic map. If* $\beta_f(R)$ is locally *a countable union of polar sets, then* f *is locally of type Bl.*

BIBLIOGRAFIE

1. BOURBAKI N., *Topologie générale.* (2-ème éd.,), Chap. IX, Hermann Paris, 1958.
2. HEINS M., *On the Lindelöfian principle.* Ann. Math., **61**, 440—473 (1955).
3. JURCHESCU M., *Asupra funcțiilor definite prin ecuații diferențiale nealgebrice.* Bul. stiinț. Acad. R.P.R. (Secțiunea de șt. mat. și fiz.), **VII**, 347—354 (1955).
4. — *Recouvrements riemanniens définis par des équations différentielles du second ordre.* C.R. Acad. Sci. Paris, **247**, 627—629 (1957).
5. — *Bordered Riemann surfaces.* Math. Ann., **143**, 264—292 (1961).
6. KURAMOCHY Z., *Mass distributions on the ideal boundaries of abstract Riemann surfaces.* I. Osaka Math. J., **8**, 119—137 (1956).
7. KURODA T., *On analytic functions on some Riemann surfaces.* Nagoya Math. J., **10**, 27—50 (1956).
8. MATSUMOTO K., *On subsurfaces of some Riemann surfaces.* Nagoya Math. J., **15**, 261—274 (1959).
9. ПРИВАЛОВ И., *Граничные свойства аналитических функций.* Moscova—Leningrad, 1950.
10. STOILOW S., *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques* (2-ème éd.), Gauthiers-Villars, Paris (1956).

KAROL BORSUK, WANDA SZMIEŁEW, *Foundations of Geometry* (Fundamentele geometriei). North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960, 444 + XIII pag.

Această carte cuprinde o introducere şi două părţi:

Partea I. Geometria euclidiană şi geometria neeuclidiană a lui Bolyai-Lobacevski. Partea II. Geometria proiectivă.

Cartea este o versiune mult schimbată a ediţiei în limba poloneză publicată la Varşovia în 1955. Schimbările se referă în special la faptul că ediţia de faţă aduce modificări importante în sistemul de axiome al lui Hilbert în ce priveşte geometria euclidiană şi cea neeuclidiană. După cum se ştie prima tratare axiomatică a geometriei euclidiene este datorită lui D a v i d H i l b e r t care în cartea sa *Grundlagen der Geometrie* din 1899 arată că geometria lui Euclid se poate construi axiomatic, dacă se admit ca noţiuni primitive noţiunile de punct, dreaptă, plan şi se acceptă un număr de 20 de axiome, organizate în cinci grupe. Una din aceste grupe conţine o singură axiomă, axioma paralelelor sau axioma lui Euclid, care spune că într-un plan printr-un punct se poate duce o singură paralelă la o dreaptă dată.

În 1903 D. H i l b e r t arată că geometria lui Bolyai-Lobacevski se poate construi axiomatic în acelaşi mod cu singura diferenţă că axioma paralelelor este înlocuită cu axioma lui Bolyai-Lobacevski care spune că printr-un punct la o dreaptă se duc mai multe paralele.

În cartea de faţă autorii adoptînd un punct de vedere utilizat în 1899 în Italia de M a r i o - P i e r i admit o singură noţiune primitivă, punctul (sau dacă vrem spaţiul format din puncte). De asemenea se introduc unele schimbări importante în numărul, enunţarea şi ordinea în care se dau axiomele.

În introducere autorii prezintă cititorului unele indicaţii istorice, precum şi noţiunile de care se va face uz în carte. Se arată în special faptul că se vor utiliza noţiuni şi notaţii din teoria mulţimilor, utilizarea continuă a teoriei mulţimilor fiind de altfel o caracteristică a cărţii.

Partea I cuprinde o introducere şi cinci capitole.

În introducere se consideră ca noţiune primitivă o mulţime S numită spaţiu şi elementele acestei mulţimi numite puncte. În S se consideră două clase de submulţimi, dreptele şi planele, şi se precizează notaţiile şi noţiunile de apartenenţă. Punctele se notează cu litere mici a, b, c, d, e, p, q, r, s, dreptele cu litere mari K, L, M, N iar planele de asemenea prin literele mari P, Q. Menţionăm că D. H i l b e r t, ca şi alţi autori ce s-au ocupat de fundamentele geometriei, de exemplu N. V. E f i m o v, utilizează litere mari latine pentru puncte, litere mici latine pentru drepte şi litere greceşti α, β, γ,... pentru plane [1]).

[1]) Cartea lui N. V. E f i m o v, intitulată *Geometria superioară* a apărut în limba rusă la Moscova în 1944 şi a fost tradusă în limba romînă în 1952 în Editura tehnică, Bucureşti.

Autorii introduc de asemenea două relații, relația $B(a, b, c)$ între trei puncte, care înseamnă că punctul b se găsește între punctele a, c și relația $E(a, b; c, d)$ sau relația de echidistanță. Această ultimă relație spune că distanța de la a la b este egală cu distanța de la c la d.

În primul capitol al părții întîia se dau axiomele de incidență sau de legătură și axiomele de ordine. Axiomele de incidență sînt în număr de 9 și sînt notate cu I 1, ... I 9. Axiomele de ordine sînt de asemenea în număr de 9 și sînt notate cu 01, ..., 09.

Primele 8 dintre axiomele de ordine se referă la relația $B(a, b, c)$ și sînt numite ca de obicei axiome liniare de ordine. Ele sînt introduse în § 6, în timp ce axioma de ordine 09, care este echivalentă cu axioma lui Pasch, este introdusă în § 18, după ce se demonstrează unele teoreme importante cu teorema 44 care spune: *Dacă o funcție φ definită pe punctele unei axe L este monotonă și intervalul de variabilitate al funcției este conex, atunci φ este continuă.* Vom menționa de asemenea că la D. Hilbert numărul axiomelor de legătură este 8 în timp ce acela al axiomelor de ordonare este 4, deci în cartea de față se introduce în plus o axiomă de incidență și patru axiome de ordine. Capitolul I conține de asemenea teoreme importante, relative la unghiuri, fascicule de drepte, fascicule de plane. De asemenea se demonstrează unele teoreme relative la topologia planului, de exemplu teorema 84.

Clasa $\mathfrak{U}$ a tuturor triunghiurilor deschise dintr-un plan P constituie o bază de vecinătăți pentru P.

Capitolul II se ocupă cu axiomele de congruențe ce sînt în număr de 7. În aceste axiome joacă evident un rol important relația $E(a, b; c, d)$ și este interesant de remarcat că se arată că noțiunea de congruență a unghiurilor este o consecință a axiomelor de congruență a segmentelor. Se dau apoi teoremele ce se referă la cazurile de egalitate a triunghiurilor.

Capitolul conține de asemenea teoreme privind unghiurile drepte, ascuțite și obtuze. Se demonstrează de exemplu teorema 73.

În orice triunghi există cel puțin două unghiuri ascuțite.

De asemenea se demonstrează teoreme referitoare la dreptele paralele și se încheie cu teoremele 120 și 121 care spun că printr-un punct a se pot duce cel mult două drepte paralele la o dreaptă dată și că relația de paralelism este reflexivă și simetrică.

Capitolul III se ocupă cu axioma de continuitate C_0 care este enunțată în următoarea formă:

Fiind date două mulțimi de puncte X, Y nevide, dacă există un punct a așa fel că dacă $p \in X$, $q \in Y$ rezultă $B(a, p, q)$ atunci există un punct b așa fel că $p \in X - b$, $q \in Y - b$ implică $B(p, b, q)$.

Este de remarcat că în axiomatica lui D. Hilbert sînt două axiome de continuitate și anume, una este a lui Arhimede iar a doua este axioma de continuitate propriu-zisă.

Axioma lui Arhimede apare în volumul de față ca teorema 6.

În capitolul III se dau de asemenea diverse teoreme relative la patrulaterul lui Saccheri de exemplu teorema 14.

Într-un patrulater al lui Saccheri baza superioară nu este mai mică decît baza inferioară.

Capitolul se încheie cu anumite proprietăți topologice ale planului și ale sistemelor de coordonate absolute.

Capitolul IV este intitulat *Modele ale geometriei absolute.* Cum se știe, se numește după Bolyai geometrie absolută acea geometrie în care nu se precizează axioma paralelelor. Se construiește modelul cartezian al geometriei absolute și se arată că această geometrie nu este contradictorie. Se consideră apoi modelul dat de spațiul proiectiv, modelul lui Klein-Beltrami etc.

În capitolul V se studiază geometria lui Euclid ce se obține adăugînd la axiomele deja introduse

$$I_\alpha\ (\alpha = 1, \ldots, 9),\ O_\beta\ (\beta = 1, \ldots, 9),\ C_\gamma\ (\gamma = 1, \ldots, 7),\ C_0,$$

în număr de 26, axioma lui Euclid sub forma

Axioma *E*. *Printr-un punct a dintr-un plan se poate duce cel mult o dreaptă ce nu întîlnește o dreaptă dată.*

În cap. VI intitulat *Geometria lui Bolyai-Lobacevski*, se studiază geometria în care în loc de axioma *E* se introduce axioma *BL*: există prin *a* cel puțin două drepte ce nu întîlnesc o dreaptă dată.

Partea a doua a cărții, ce conține circa 100 de pagini, se ocupă cu geometria proiectivă și are trei capitole, intitulate:

Axiome de incidență și ordine, *Axioma continuității* și *Modele ale geometriei proiective*.

Această sumară expunere a cărții este, credem, suficientă pentru a arăta interesul pe care cartea îl prezintă pentru acei ce doresc să adîncească problema mereu nouă a fundamentelor geometriei. Cartea este scrisă cu multă claritate, demonstrațiile sînt judicios alese și sprijinite de figuri bine realizate, iar tipărirea este făcută în condiții excelente

Acad. G. Vrănceanu

MARIO VILLA, *Lezioni di Geometria*. I. *Geometria analitica con elementi di proiettiva* (Lecții de geometrie. I. Geometria analitică cu elemente proiective). C.E.D.A.M., Padova, 1960, 388 pag.

Această a treia ediție a Lecțiilor de Geometrie se adresează studenților în matematici, celor în fizico-matematici cît și celor de la școlile politehnice.

Vol. I este împărțit în cinci părți și conține douăzeci și șase de capitole.

Partea întîia este alcătuită din opt capitole. Cap. I conține noțiuni preliminarii: dreaptă orientată, distanța dintre două puncte, fascicul de drepte, coordonate tangențiale, coordonate baricentrice.

Cap. II și III se ocupă de puncte și drepte în sistemul cartezian, unghiul a două drepte orientate, distanța de la un punct la o dreaptă, condiția de perpendicularitate a două drepte, aria unui triunghi etc.

Cap. IV intitulat *Transformări de coordonate carteziene*, tratează despre distanțe, unghiuri într-un sistem cartezian oblic, transformări de coordonate carteziene ortogonale, coordonate polare.

Cap. V se ocupă de puncte improprii, dreapta improprie, coordonate carteziene omogene coordonate plückeriene ale dreptei.

Cap. VI studiază ecuațiile cercului, elipsei, hiperbolei și parabolei în coordonate carteziene ortogonale și ecuațiile lor parametrice.

Cap. VII studiază reprezentarea analitică a curbelor plane, curbe algebrice și transcendente, ecuații parametrice ale unei curbe, tangenta și normala într-un punct la o curbă, înfășurătoare de drepte, corespondențe între două drepte etc. Ultimul capitol al primei părți tratează curbele raționale și alte curbe clasice (curba exponențială, curba erorilor, spirala lui Arhimede, cicloida, concoida).

Partea a doua (cap. IX—XIV) este consacrată Geometriei analitice în spațiu.

Cap. IX, X tratează puncte, plane, drepte, distanțe, unghiuri, arii și volume în sistemul cartezian ortogonal.

Cap. XI este consacrat transformărilor de coordonate carteziene, distanța între două puncte într-un sistem de referință cartezian oblic, coordonatelor cilindrice și celor polare iar cap. XII studiază despre puncte, drepte și plane improprii în spațiu, coordonate plückeriene în spațiu.

Cap. XIII studiază cilindrul, conul și sfera.

Ultimul capitol se ocupă de reprezentarea analitică a curbelor strîmbe, a suprafețelor algebrice și transcendente, înfășurători de plane, suprafețe riglate, suprafețe de rotație etc.

Se constată că în primele două părți ale volumului problemele metrice sînt studiate pentru simplitate într-un sistem cartezian ortogonal, indicîndu-se calea de studiu în unele probleme în sistemul cartezian oblic.

Partea a treia intitulată *Elemente de geometrie proiectivă* cuprinde trei capitole.

Cap. XV începe cu definiții și propoziții fundamentale apoi trece la forme de prima, a doua și a treia specie. Se dau legile de dualitate în plan și spațiu, proprietăți proiective etc.

Cap. XVI se ocupă de biraportul a patru elemente ale unei forme de speța I, de proprietățile armonice ale unui patrulater complet și de proprietățile duale.

Cap. XVII consideră proiectivități între forme fundamentale de prima speță, apoi definește elementele unite ale unei proiectivități, involuții, coordonate proiective în forme de prima speță, ecuațiile proiectivității, coordonate proiective în plan și spațiu.

Partea a patra intitulată *Conice și cuadrice* cuprinde cinci capitole.

În cap. XVIII se dau noțiuni generale asupra conicelor (conica prin cinci puncte, conice degenerate, ecuația tangențială a unei conice, polară în raport cu o conică, fascicule de conice).

Cap. XIX conține generarea proiectivă a conicelor (teoremele lui Pascal, Brianchon, Desargues, biraportul a patru puncte ale unei conice, proiectivități între conice suprapuse etc.).

Cap. XX dezvoltă : cele trei specii de conice în raport cu intersecția lor cu dreapta de la infinit, diametri, centre, asimptote, axe, focare, ecuația polară a unei conice, fascicule de cercuri.

Cap. XXI și XXII tratează despre cuadrice : intersecția unei cuadrice cu o dreaptă, plan tangent la o cuadrică într-un punct, puncte eliptice, parabolice, hiperbolice, cuadrice riglate, clasificarea metrică a cuadricelor, plane diametrale, elipsoidul, hiperboloizii, paraboloizii, sfera prin patru puncte etc.

Partea a cincea intitulată *Complemente*, conține patru capitole.

În cap. XXIII intitulat *Elemente de nomografie* sînt date nomograme carteziene în scări funcționale, nomograme ale ecuațiilor în mai mult de trei variabile.

În cap. XXIV intitulat *Complemente asupra geometriei dreptei în spațiu, asupra curbelor algebrice și asupra elementelor imaginare*, cuprinde coordonate plückeriene ale dreptelor din spațiu, complexe și congruențe de drepte, unele curbe raționale, teoria sintetică a elementelor imaginare etc.

În cap. XXV, *Complemente de geometrie proiectivă*, se dau condiții pentru ca trei perechi de elemente să aparțină unei involuții.

Ultimul capitol, *Complemente asupra conicelor și cuadricelor*, se referă la invarianți ai unei forme pătratice în raport cu o transformare liniară, aplicații ale invarianților la determinarea ecuațiilor conicelor într-un sistem cartezian, sisteme de coordonate curbilinii în plan, generarea proiectivă a cuadricelor riglate.

La fiecare capitol există note cu caracter istoric în legătură cu matematicieni celebri care au introdus unele noțiuni importante sau au dat teoreme fundamentale.

Cartea se termină cu reproduceri fotografice a modelelor geometrice aparţinînd colecţiunii Institutului de Geometrie „L. Cremona" al Universităţii din Bologna.

Prin bogatul material ce-l conţine, prin demonstraţiile clare şi elegante date unor teoreme clasice, prin calităţile sale tipografice, cartea de faţă se adaugă la acele multe cărţi bune de Geometrie pe care matematicienii italieni le-au scris pînă acum şi prezintă un interes deosebit pentru toţi aceia ce vor să-şi însuşească domeniul Geometriei analitice şi proiective.

G. G. Vrănceanu

С. М. НИКОЛЬСКИЙ, *Квадратурные формулы* (Formule de cvadratură). Гос. изд. Физ.-Мат. Лит., Москва, 1958, 124 pag.

Această monografie se ocupă de anumite probleme generale din teoria formulelor de cvadratură.

Se dau mai întîi metode generale pentru aflarea unor evaluări precise pentru aproximaţiile cu ajutorul unor formule de cvadratură pentru diverse clase de funcţii.

Se calculează apoi pe baza acestor metode constantele numerice exacte pentru o serie de formule de cvadratură (Gauss, Cebîşev etc.).

Multe din acestea sînt apărute pentru prima oară în literatură.

Se rezolvă unele probleme extremale care au ca scop aflarea formulelor de cvadratură care sînt cele mai bune pentru o clasă dată de funcţii în anumite condiţii.

Expunerea este originală şi accesibilă în acelaşi timp.

Paragrafele 1 — 3 sînt introductive. În paragraful 4 se dă evaluarea precisă a aproximaţiei, pentru clasa funcţiilor $W^{(r)}(M; a, b)$ şi $W_{L_p}^{(r)}(M; a, b)$ cu ajutorul unor formule de cvadratură care sînt exacte pentru polinoamele de grad $r-1$.

În paragraful 5 se dau exemple de calcul al constantelor formulelor de cvadratură.

Se dau tabele de valori ale acestor constante pentru formulele lui Cebîşev şi Gauss.

În paragraful 6 se dau evaluări precise ale aproximaţiei, pentru clasele de funcţii de mai sus, cu ajutorul formulelor de cvadratură care se obţin divizînd intervalul de integrare în n părţi egale şi aplicînd fiecărui subinterval formula de cvadratură exactă pentru toate polinoamele de grad $r-1$.

În paragraful 7 se arată că pentru orice funcţie de clasa $W^{(r)}(M; a, b)$, care nu este un polinom de grad $r-1$, ordinul aproximaţiei dat de formula de cvadratură indicată în paragraful 6 este egal cu $O(n^{-r})$.

În paragraful 8 se obţine o formulă care dă pentru o funcţie de clasa $C^{(r)}(a, b)$ o aproximaţie de ordinul $O(n^{-r-1})$.

În paragraful 9 se extind la cazul multidimensional rezultatele din paragraful 6.

Paragraful 10 este consacrat tipului de problemă extremală de aflare a celei mai bune formule de cvadratură cînd variază atît ponderea cît şi nodurile formulei. În paragraful 11 se dau rezultate ale lui S a r d (Amer. J. of Math., **LXXI**, 1949) care dă metoda de calcul a celei mai bune formule de cvadratură pentru clasa funcţiilor cu derivate de un ordin dat, mărginite în sensul lui L, atunci cînd variază ponderea şi nodurile rămîn fixe şi la distanţă egală, şi se reproduc tabelele calculate de el.

În paragraful 12 se consideră formule de cvadratură în care intervin valorile derivatelor funcției.

Ultimele 5 paragrafe sînt consacrate claselor de funcții și de polinoame care abat cel mai puțin de la zero.

Lucrarea este accesibilă celor mai largi cercuri de ingineri, cercetători științifici și studenți care posedă noțiunile de analiză matematică predate în institutele tehnice superioare.

Problemele suplimentare care necesită cunoștințe de analiză funcțională sînt tipărite cu litere mici în text.

Ca atare credem că ar fi util ca această monografie să fie tradusă în limba romînă.

L. J. Nicolescu, F. Albrecht

OBUDAI MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1883